



## International Journal of Food, Agriculture and Animal Sciences (IJFAA)

e-ISSN : 2791-8807



### Solution of Non-Full-Rank Models: An Application on Plum Production in Bingöl

Şenol ÇELİK<sup>1\*</sup>

**Article info:**

Received: 10.08.2022  
Accepted: 24.09.2022

**Article type:** Research

**Keywords:**

Linear model, generalized  
inverse, plum, Bingöl

**Abstract**

In this study, a solution was developed for the non-full rank model in one-way analysis of variance. A generalized inverse matrix and variance analysis was applied on the plum production amount per tree in 5 randomly determined districts of Bingöl province. In the calculation of the analysis of variance, according to the linear model  $Y = X\beta + \varepsilon$ , the generalized inverse of the  $X'X$  matrix, which is not fully rank in the equation  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ , was taken to estimate the  $\beta$  parameter. Analysis of variance was performed with the generalized inverse matrix. As a result of variance analysis, the difference between the amount of plum according to the districts was found to be significant ( $p < 0.001$ ). Dunn-Sidak test, one of the multiple comparison tests, was applied to determine between which districts the difference was.

**Citation:** Çelik, Ş. 2022. Solution of Non-Full-Rank Models: An Application on Plum Production in Bingöl. International Journal of Food, Agriculture and Animal Sciences, 2 (2): 17-28.

### Tam Ranklı Olmayan Modellerin Çözümü: Bingöl'de Erik Üretimi Üzerine Bir Uygulama

**Makale Bilgileri**

Geliş Tarihi: 10.08.2022  
Kabul Tarihi: 24.09.2022

**Makale türü:** Araştırma

**Anahtar kelimeler**

Lineer model,  
genelleştirilmiş ters, erik,  
Bingöl

**Öz**

Bu çalışmada, tek yönlü varyans analizinde tam ranklı olmayan model için çözüm geliştirilmiştir. Bingöl iline ait rasgele belirlenen 5 ilçedeki ağaç başına erik üretim miktarı verileri üzerine genelleştirilmiş ters matris ile varyans analizi uygulanmıştır. Varyans analizinin hesaplanmasında  $Y = X\beta + \varepsilon$  lineer modeline göre,  $\beta$  parametresini tahmin etmek için  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  denkleminde tam ranklı olmayan  $X'X$  matrisinin genelleştirilmiş tersi alınmıştır. Genelleştirilmiş ters matris ile varyans analizi yapılmıştır. Varyans analizi sonucunda ilçelere göre erik miktarı arası farklılık önemli bulunmuştur ( $p < 0.001$ ). Farklılığın hangi ilçeler arasında olduğunu belirlemek için çoklu karşılaştırma testlerinden Dunn-Sidak testi uygulanmıştır.

**Atıf:** Çelik, Ş. 2022. Tam Ranklı Olmayan Modellerin Çözümü. Bingöl'de Erik Üretimi Üzerine Bir Uygulama. Uluslararası Gıda, Tarım ve Hayvan Bilimleri Dergisi, 2(2): 17-28.

#### Giriş

Varyans analizi (ANOVA) modelleri lineer modellere en iyi örneklerden biridir. Bu modeller bazen deney tasarımı olarak da bilinir. ANOVA modelleri, incelenmek istenen faktörün durumuna göre bir faktörlü deneyler ve iki faktörlü deneyler olarak incelenen faktör sayısına göre değişiklik gösterir (Akdi ve Balıbey, 2018). ANOVA modelleri ile ilgili olarak şimdiye kadar çok sayıda çalışma yapılmış olup, birçok alanda kullanılması mümkündür. Her alanda olduğu gibi tarım verilerine de uygulanabilir.

<sup>1</sup> \* Correspponding author, <https://orcid.org/0000-0001-5894-8986>, Bingöl Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootečni Bölümü, Biyometri ve Genetik ABD, Bingöl, Türkiye, senolcelik@bingol.edu.tr.

Genetik tabanı en geniş olan ılıman iklim meyve türlerinden birisi eriktir (Aslantaş, 2017). Erik üretimi, yaklaşık 2000 yıl öncesine uzanmaktadır. Erik yetiştiriciliğinin anavatanı Anadolu, Hazar Denizi civarı ve Kafkaslar olduğu kabul edilmektedir (Özbek, 1978; Bilgü ve Seferoğlu, 2005). Türkiye genelinde Ege, Akdeniz, Marmara Bölgeleri ve Orta Anadolu'nun bazı bölgelerinde erik üretimi yaygın olarak yapılır (Eriş ve Barut, 2000). Erik meyvesi için yetiştirilir. Odununun herhangi bir ekonomik değeri yoktur ve sadece yakacak olarak kullanılır (Özçağırın, 2011).

Sert çekirdekli bir meyve olan erik dünyadaki üretim miktarı bakımından şeftaliden sonra ikinci sırada yer almaktadır. Dünyada beş kıta üzerinde de yetiştiriciliği yapılmaktadır (Özçağırın, 2011). Erik, Türkiye'de en fazla tüketilen sert çekirdekli meyve türlerinden biridir. Yüksek besleyici özelliğe ve düşük kalori içeriğine sahip olan erik; fruktoz, sukroz, glikoz gibi karbonhidratlar; malik asit, sitrik asit gibi organik asitler; aromatik bileşenler, vitaminler, yüksek lif içeriği, karotenoidler, antosiyaninler, flavanoidler ve fenolik maddeler içermektedir (Ertekin ve ark, 2006).

Yüksek vitamin içeriği, lif ve antioksidan madde içeriği ile erik yetiştiricilikte ön plana çıkan meyvelerden biridir (Kim ve ark. 2003). Türkiye'nin her bölgesinde, erik yetiştirilebilmekte ve genellikle de taze meyve olarak tüketilmektedir. Ayrıca şurup, pekmez, reçel, marmelat ve pestili yapılmakta ya da kurutulularak da tüketilmektedir (Civil ve Haciseferoğulları, 2010).

FAO, 2020 verilerine göre, erik üretim miktarı bakımından dünya ülkeler sıralamasında Çin (6 475 700 ton) ilk sırada, Romanya (757 880 ton) ikinci ve Sırbistan (582 547 ton) üçüncü durumdadır. Türkiye ise 329 056 ton erik üretimi ile dünyada altıncı sıradadır.

Bu çalışmanın amacı, Bingöl ilinde seçilmiş 5 ilçede ağaç başına erik veriminin ilçelere göre değişiminin tam ranklı olmayan bir model ve ANOVA ile çözümlenmek ve sonuçların karşılaştırılmasıdır.

## Materyal ve Yöntem

Çalışmanın materyali Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK)'nin [www.tuik.gov.tr](http://www.tuik.gov.tr) web adresinde "Bitkisel Üretim İstatistikleri" bölümünde "Meyveler içecek ve baharat bitkileri" başlığı altında verim (ton) bilgilerinden oluşmaktadır. Meyve veren ağaç başına verim (kg) değerleri 2017-2021 dönemine ait Bingöl ilinde Adaklı, Genç, Karlıova, Kiğı ve Merkez olmak üzere 5 ilçeye aittir. Erik verimi bilgileri için varyans analizi yapılmıştır.

$Y = X\beta + \varepsilon$  modeline göre,  $\beta$  nın en küçük kareler tahmin edicisi normal denklemler  $X'X\hat{\beta} = X'Y$  şeklindedir. Bu normal denklemlerin çözümü  $X'X$  matrisinin G tersine göre değişiklik gösterir.  $X'XG$  matrisi  $X'X$  nin bir G tersi ise  $\beta$  nın en küçük kareler tahmin edicisi  $\hat{\beta} = (GX'X)^{-1}X'Y$  olarak hesaplanır (Akdi ve Balıbey, 2018).

Tek yönlü ANOVA modeli

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, j = 1, 2, \dots, ni = 1, 2, \dots, k$  şeklinde tanımlanabilir (Şenoğlu ve Acıtaş, 2010).

Tek yönlü varyans analizinin lineer modeli incelendiğinde,

$\mu$ : Kitle ortalaması,  $\alpha_i$ : i'nci faktörün etkisi,  $\varepsilon_{ij}$ : Hata etkisi,  $Y_{ij}$ : Gözlem değerleri

$Y = X\beta + \varepsilon$  lineer modeli matris formu ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Öztürk ve Akdeniz, 1996).

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ Y_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \varepsilon_{ij} \end{bmatrix}$$

Yine burada, Y: Gözlem vektörü,  $\beta$ : Parametre vektörü, X: 0 ve 1 değerlerini alan tasarım matrisi,  $\varepsilon$ : Hata terimleri vektörü.

$\beta' = [\mu \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_i]$  şeklindedir (Searle, 1997).

X'X karesel form simetriktir, elemanları X'in bileşenlerinin kareleri toplamıdır. Normal denklemlere X'Y de dahildir, elemanları Y vektörü ile X'in sütunlarının iç çarpımlarıdır. X'X matrisi aşağıdaki gibidir.

$$X'X = \begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \dots & n_i \\ n_1 & n_1 & \dots & \dots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_i & 0 & \dots & \dots & n_i \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \dots \\ \dots \\ Y_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{12} + \dots + Y_{ij} \\ Y_{11} + \dots + Y_{1j} \\ Y_{21} + \dots + Y_{2j} \\ \dots \\ Y_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \end{bmatrix}$$

X'X matrisinde matrisin rankı ve parametre sayısı farklı olduğundan

$X'X\beta = X'Y$  eşitliğindeki normal denklemler  $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$  ile çözülemez. Bu denklemi çözebilmek için matrislerin genelleştirilmiş inversinden yararlanarak  $X'X\beta^0 = X'Y$  normal denklemi yazılır.  $\beta^0$  parametresi hesaplanır. X'X ifadesinin rankı parametre sayısına eşit olduğunda denklem çözülür.

$X'X\beta^0 = X'Y$  denklemi  $GX'Y$  yardımıyla çözülebilir. Burada G matrisi X'X matrisinin genelleştirilmiş inversidir (tersidir) ve  $X'XGX'X = X'X$  şeklinde tanımlanır. X'X ve X'Y matrislerinden oluşan normal denklemler

$$\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \dots & n_i \\ n_1 & n_1 & \dots & \dots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_i & 0 & \dots & \dots & n_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \dots \\ \alpha_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{ij} \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşur. X'X'in rankı parametre sayısına eşit olmadığı için X'X'in tersi yoktur ve çözümü yoktur. Dolayısıyla tam ranklı olamayan modeldir. X'X'in genelleştirilmiş inversi bulunarak  $\beta^0 = GX'Y$  denklemi çözülür. X'X matrisinin genelleştirilmiş inversi G ise aşağıdaki gibidir.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D\{1/n_i\} \end{bmatrix}$$

Burada  $D\{1/n_i\}$  ifadesi  $i=1,2,\dots,a$  için diagonal (köşegen) matristir (Searle, 1997).

Genel kareler toplamı (GKT), gruplar arası kareler toplamı (GAKT) ve gruplar içi (hata) kareler toplamı (GİKT=HKT) sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır (Searle, 1997; Akdi ve Balıbey, 2018).

$$GKT = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

$$GAKT = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2$$

$$GİKT(HKT) = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

Tek yönlü varyans analizi tablosu aşağıdaki gibidir (Tablo 1).

**Tablo 1.** Tek yönlü varyans analizi tablosu

Varyasyon kaynağı	Kareler toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler ortalaması	F
Gruplar arası (GAKT)	$\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2$	k-1	$GAKO = \frac{GAKT}{k-1}$	$F = \frac{GAKO}{GİKO}$
Gruplar içi (GİKT)	$Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$	N-k	$GİKO = \frac{GİKT}{N-k}$	
Genel (GKT)	$Y'Y - n\bar{Y}^2$	N-1		

Gruplar arası farklılık istatistiksel olarak önemli ise bu farklılığın hangi gruplar arasında olduğunu tespit etmek için çeşitli çoklu karşılaştırma testleri mevcuttur. Burada bu çoklu karşılaştırma testlerinden Dunn-Sidak testi uygulanmıştır.

Dunn-Sidak testi özellikle "En küçük anlamlılık fark testi (LSD)"nin barındırdığı hatayı geliştirmek üzerine kurulmuştur ve hata miktarlarına karşı sınırlamalar getirmektedir (Kayri 2009). Dunn-Sidak testi Bonferroni'nin modifiye edilmiş hali olup, Bonferroni'ye göre güven aralığı daha dar ve daha güçlüdür. Dunn-Sidak testinde Student t tablo değeri kullanılır (Toothaker, 1992, Uçkardeş, 2006). Dunn-Sidak Güven Aralığı (GA) (Stoline ve Ury, 1979) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$GA = (\bar{X}_i - \bar{X}_j) \mp t_{\alpha',v} \sqrt{HKO \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} (1 - (1 - \alpha)^{1/k})$$

Burada,

$t_{\alpha',v}$ :  $\alpha'$  ve  $v$  için Student t tablo değeri,  $v$ : Hata serbestlik derecesi, HKO: Hata kareler ortalaması,  $\alpha'$ : Önem seviyesi,  $k$ : Ortalama karşılaştırma sayısı,  $\bar{X}_i$ :  $i$  grubuna ait ortalama,  $\bar{X}_j$ :  $j$  grubuna ait ortalama,  $n_i$ :  $i$  grubunun tekerrür sayısı,  $n_j$ :  $j$  grubunun tekerrür sayısıdır.

Güven aralığının alt ve üst sınırlar arasında eğer "0" değerini içermiyorsa iki ortalama arasındaki fark önemlidir.

## Araştırma Sonuçları ve Tartışma

Bingöl ili Adaklı, Genç, Karlıova, Kiğı ve Merkez ilçelerinin 2017-2021 dönemini kapsayan son 5 yıl içindeki ağaç başına erik verimleri kg olarak ele alınmıştır. İlçelerin grup, yılların ise tekerrür olduğu deneme 5 grup ve 5 tekerrürden ibarettir. İlçelere göre ağaç başına düşen erik veriminin (kg/ağaç) farklılık gösterip göstermediği varyans analizi ile test edilmiştir. Denemedeki gözlem sayısı ise 25'dir. Tek yönlü varyans analizi (ANOVA) yani tesadüf parsellerinde denem planı uygulandı. Önce genelleştirilmiş ters matris kullanılarak tam ranklı olmayan modelin çözüm için gerekli hesaplamalar yapıldı. Sonra SPSS paket programı ile çözümü yapılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı. Bingöl'ün ilçelerine göre ağaç başına erik miktarı (kg) yani verim Tablo 2'de sunulmuştur. Ağaç başına erik verimlerine ilişkin tanıtıcı istatistikler Tablo 3'te verilmiştir.

**Tablo 2.** İlçelere göre ağaç başına erik verimi (kg)

Yıllar	Adaklı	Genç	Karlıova	Kiğı	Merkez
2017	24	29	19	22	28
2018	25	29	19	27	30
2019	25	30	19	27	30
2020	25	32	25	27	30
2021	25	31	26	27	30
<b>Toplam</b>	<b>124</b>	<b>151</b>	<b>108</b>	<b>130</b>	<b>148</b>

Tüm gözlem değerleri toplamı=124+151+108+130+148=661

**Tablo 3.** Tanıtıcı istatistikler

İlçeler	N	$\bar{X}$	s	$s_{\bar{X}}$	Min.	Max.
Adaklı	5	24.80	0.45	0.20	24	25
Genç	5	30.20	1.30	0.58	29	32
Karlıova	5	21.60	3.58	1.60	19	26
Kiğı	5	26.00	2.24	1.00	22	27
Merkez	5	29.60	0.89	0.40	28	30
Genel	25	26.44	3.73	0.75	19	32

$\bar{X}$ : Ortalama (ağaç başına miktar (kg)), s: Standart sapma,  $s_{\bar{X}}$ : Standart hata, Min.: En düşük, Max.: En yüksek

Tablo 3 incelendiğinde, meyve veren ağaç başına düşen ortalama en yüksek erik üretimi 30.20 kg ile Genç ilçesinde iken, en düşük verim 24.80 g ile Adaklı ilçesinde olmuştur. Veriler matris şeklinde aşağıdaki değişkenlerle ifade edilir.

$$Y = \begin{bmatrix} 24 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 29 \\ 29 \\ 30 \\ 32 \\ 31 \\ 19 \\ 19 \\ 19 \\ 25 \\ 26 \\ 22 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{35} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \\ \varepsilon_{54} \\ \varepsilon_{55} \end{bmatrix},$$

Y vektörü 25\*1 boyutlu, X matrisi 25\*6 boyutlu,  $\beta$  vektörü 6\*1 boyutlu ve  $\varepsilon$  vektörü ise 25\*1 boyutludur. Matris çarpımında ilk matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı aynı olmalıdır.

$$Y = \begin{bmatrix} 24 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 29 \\ 29 \\ 30 \\ 32 \\ 31 \\ 19 \\ 19 \\ 19 \\ 25 \\ 26 \\ 22 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{35} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \\ \varepsilon_{54} \\ \varepsilon_{55} \end{bmatrix},$$

şeklinde matris hesaplaması yapılır.  $X'Y = (X'X)\hat{\beta}$  hesaplaması yapılır. Önce  $X'X$  matrisi hesaplanır.



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 661 \\ 124 \\ 151 \\ 108 \\ 130 \\ 148 \end{bmatrix}$$

Burada parametre değerlerini hesaplamada  $X'X$  matrisinin tersi hesaplanamayacağı için  $X'X$  in genelleştirilmiş ters matrisi yani  $G$  matrisi hesaplanacaktır.  $G$  matrisi aşağıdaki gibidir.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$\hat{\beta} = GXY'$  eşitliğinde,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 661 \\ 124 \\ 151 \\ 108 \\ 130 \\ 148 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.8 \\ 30.2 \\ 21.6 \\ 26 \\ 29.6 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Gruplar arası kareler ortalaması (GAKT) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$GAKT = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2$$

Burada,  $n=25$ ,  $\bar{y} = \frac{661}{25} = 26.44$ ,  $\bar{y}^2 = 26.44^2 = 699.0736$  olarak hesaplanmıştır.

$$\hat{\beta}'X'Y = [0 \quad 24.8 \quad 30.2 \quad 21.6 \quad 26 \quad 29.6] \begin{bmatrix} 661 \\ 124 \\ 151 \\ 108 \\ 130 \\ 148 \end{bmatrix} = 17729$$

$$GAKT = [0 \quad 24.8 \quad 30.2 \quad 21.6 \quad 26 \quad 29.6] \begin{bmatrix} 661 \\ 124 \\ 151 \\ 108 \\ 130 \\ 148 \end{bmatrix} - 25 * 26.44^2$$

$GAKT = 0 + 3075.2 + 4560 + 2332.8 + 3380 + 438.8 - 17476.8 = 17729 - 17476.8 = 252.16$   
Gruplar içi kareler toplamı yani hata kareler toplamı aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$GİKT = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

Bu eşitlikte  $\hat{\beta}'X'Y=17729$  olarak daha önce hesaplandı.  $Y'Y$  ifadesi de aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.



Y'Y

$$= [24 \ 25 \ 25 \ 25 \ 25 \ 29 \ 29 \ 30 \ 32 \ 31 \ 19 \ 19 \ 19 \ 25 \ 26 \ 22 \ 27 \ 27 \ 27 \ 27 \ 28 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30]$$

24  
25  
25  
25  
25  
29  
29  
30  
32  
31  
19  
19  
19  
25  
26  
22  
27  
27  
27  
27  
28  
30  
30  
30  
30  
19  
25  
26  
22  
27  
27  
27  
27  
28  
30  
30  
30  
30

$$Y'Y = 24^2 + 25^2 + 25^2 + \dots + 30^2 + 30^2 = 17811$$

Bu hesaplama sonuçları formülde yerine konulduğunda,  $GKT=17811-17729=82$  olarak bulunur. Bu değer aynı zamanda Hata Kareler Toplamı (HKT)'dir. Genel Kareler Toplamı (GKT) ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$GKT = Y'Y - n\bar{Y}^2$  eşitliğinde önceden hesaplanan değerler yerine yazılıp hesaplandığında,  $GKT = 17811 - 17476.8 = 334.16$  sonucu elde edilir. Bu sonuçlara göre varyans analizi tablosu Tablo 4'te sunulmuştur.

**Tablo 4.** Tek yönlü varyans analizi sonuçları

Varyasyon kaynağı	KT	sd	KO	F
Gruplar arası (GAKT)	252.16	5-1=4	63.04	$F = \frac{63.04}{4.10} = 15.38$
Gruplar içi (GİKT)	82	25-5=20	4.10	
Genel (GKT)	334.16	25-1=24		

KT: Kareler toplamı, sd: Serbestlik derecesi, KO: Kareler ortalaması

G matrisi ile elde edilen varyans analizi sonuçları SPSS paket program sonuçları ile karşılaştırılmıştır (Tablo 5).

**Tablo 5.** SPSS paket program sonuçları

Varyasyon kaynağı	sd	KT	KO	F	p
Grup	4	252.16	63.04	15.38	0.001
Hata	20	82	4.10		
Genel	24	334.16			

Çizelge 4 ve Çizelge 5 karşılaştırıldığında aynı sonuçlar elde edilmiştir. Varyans analizi sonucunda ilçelere (gruplara) göre erik verimi farklılığı önemli bulunmuştur ( $p<0.001$ ). Gerek tam ranklı olmayan modelde genelleştirilmiş ters matris hesabı ile gerekse SPSS paket programı ile aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Verim farklılığının hangi ilçeler (gruplar) arasında olduğunu tespit etmek için çoklu karşılaştırma testlerinden Dunn-Sidak testleri uygulanmıştır. Dunn-Sidak testi ile ilgili hesaplama sonuçları Tablo 6'da verilmiştir.

**Tablo 6.** Dunn-Sidak testi güven aralığı hesaplaması

Karşılaştırılan Gruplar	Ortalama fark	$t_{0.005,20} \sqrt{4.10 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)}$	Alt sınır	Üst sınır	
Genç-Merkez	0.6	3.643	-3.043	4.243	
Genç-Kiği	4.2	3.643	0.557	7.843	* önemli
Genç-Adaklı	5.4	3.643	1.757	9.043	* önemli
Genç-Karlıova	8.6	3.643	4.957	12.243	* önemli
Merkez-Kiği	3.6	3.643	-0.043	7.243	
Merkez-Adaklı	4.8	3.643	1.157	8.443	* önemli
Merkez-Karlıova	8	3.643	4.357	11.643	* önemli
Kiği-Adaklı	1.2	3.643	-2.443	4.843	
Kiği-Karlıova	5	3.643	1.357	8.643	* önemli
Adaklı-Karlıova	3.2	3.643	-0.443	6.843	

Tablo 6'da, ilçeler arası farklılığın belirlenmesinde Dunn-Sidak testi için güven aralığından faydalanılmıştır. Güven aralığı alt ve üst sınırlar arasında sıfır (0) yoksa ilçeler arası erik veriminin önemli olduğu anlaşılmıştır. Aksi halde (0 olduğunda) ilçeler arası verim farkının önemsiz olduğuna karar verilmiştir. Örneğin Genç-Kiği ilçeleri erik üretim verimi karşılaştırması yapıldığında, Genç için  $\bar{X}_i = 30.20$ , Kiği için  $\bar{X}_j = 26$ 'dir.  $n_i = n_j = 5$ ,  $HK0=4.10$ ,  $\alpha = 0.05$  için,  $\alpha' = \frac{1}{2}(1 - (1 - 0.05)^{1/5}) = 0.005$  ve  $v=20$ 'dir.  $t_{0.005,20} = 2.845$

Bu değerler Dunn-Sidak testi güven aralığında yerine konulduğunda,

$$GA = (30.20 - 26) \mp t_{0.005,20} \sqrt{4.10 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)} = 4.20 \mp 2.845 * 1.28$$

hesaplandığında, alt sınır 0.557, üst sınır ise 7.843'tür. Alt ve üst sınırlar arasında sıfır (0) değeri olmadığı için bu iki ilçe arasındaki erik üretim miktarı arası farklılık istatistiksel olarak önemlidir ( $p < 0.05$ ). Benzer hesaplamalar diğer gruplar (ilçeler) arası için de yapıldığında elde edilen sonuçlar Tablo 6'da olduğu gibidir. SPSS paket programı ile uygulanan Dunn-Sidak testi sonuçları, Tablo 7'de verilmiştir.

**Tablo 7.** SPSS ile Dunn-Sidak testi sonuçları

ilçeler	$(\bar{X}_i - \bar{X}_j)$ (I-J)	p
Genç-Adaklı	-5.4*	0.004
Adaklı-Karlıova	3.2	0.194
Adaklı- Kiği	-1.2	0.988
Merkez- Adaklı	-4.8*	0.013
Genç-Karlıova	8.6*	0.000
Genç-Kiği	4.2*	0.037
Genç-Merkez	0.6	1.000
Karlıova-Kiği	-4.4*	0.026
Karlıova-Merkez	-8*	0.000
Kiği-Merkez	-3.6	0.103

$(\bar{X}_i - \bar{X}_j)$ : Ortalama fark

Dunn-Sidak testi sonucunda, Genç-Adaklı, Merkez-Adaklı, Genç-Karlıova, Genç-Kiği, Kiği-Karlıova ve Merkez-Karlıova ilçeleri arasındaki ağaç başına erik verimleri (kg) önemli farklılık göstermiştir ( $p<0.05$ ).

Bir çalışmada, çakal eriği, yonuz eriği ve marmelatlarının fizikokimyasal ve fitokimyasal özellikleri varyans analizi ile incelenmiştir. Örneklerin pH ve titrasyon asitliği değerleri bakımından gruplar arasında farklar istatistiksel olarak önemli bulunmuştur (Başkaya Sezer ve ark., 2016). Sezer ve Çetin (2021)'in çalışmasında, erik meyvesinin farklı düşme yüksekliklerinden farklı yüzeyler üzerindeki zedelenme hacimleri hasat dönemleri arasında önemli farklılık göstermiştir.

Bir diğer çalışmada, ağaç başına verim (kg) bakımından erikler çeşitlerine göre önemli farklılık göstermiştir. Farklılıkların hangi çeşitler arasında olduğunu belirleyen çoklu karşılaştırma testlerinden LSD testi kullanılmıştır (Açar, 2016).

Bu çalışmada ise varyans analiz üzerinde bir lineer model uygulaması yapılmıştır. Ayrıca Dunn-Sidak testi çoklu karşılaştırma yapılarak daha önce yapılan birçok çalışmadan bu özellikleri nedeniyle farklı sonuçlar göstermiştir.

## Sonuç

Varyans analizi sonucunda, Bingöl ilinde ağaç başına erik verimi (kg) ilçelere göre önemli farklılık göstermiştir. Tek yönlü varyans analizinde, GAKT=252.16, HKT=82, GKT=334.16, GAKO=63.04, HKO=4.10 ve F=15.38 bulunmuştur. Bu çalışmada uygulandığı gibi, tam ranklı olmayan lineer modellerde genelleştirilmiş ters matrisi ile varyans analizi hesaplamasının uygun olduğu görülmüştür. Ayrıca araştırmacılar tarafından çok az bilinen ve çok nadir uygulanmış olan Dunn-Sidak testinin de uygulanması olanağı olmuştur. Bu testin kullanılmasıyla yapılan çalışmalar için çok gerekli olduğu vurgulanmıştır. Sonuç olarak tam ranklı olmayan modellerde genelleştirilmiş ters matris hesaplaması ile varyans analizini gerçekleştirmek mümkün olmuştur.

## Kaynaklar

- Açar, İ. 2016. Bazı Japon Grubu Erik (*Prunus salicina* Lindl.) Çeşitlerinin Gaziantep'teki Performansları. Harran Tarım ve Gıda Bilimleri Dergisi, 20(4): 247-252
- Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No:38, Ankara.
- Akdi, Y., Balıbey, M. 2018. Lineer Modellere Giriş Teori ve Uygulama. Gazi Kitabevi, Ankara. ISBN: 978-605-344-681-1
- Aslantas, R. 2017. Yumuşak ve Sert Çekirdekli Meyve Türleri. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Bahçe Bitkileri Bölümü Ders Notu. Erzurum
- Başkaya Sezer, D., Erdoğan Tokatlı, K., Demirdöven, A. 2016. Çakal Eriği ve Yonuz Eriği Marmelatları. JAFAG, 33(1): 125-131.
- Bilgü, G., Seferoğlu, G. 2005. Japon Grubu (*Prunus Salicina* L.) bazı erik çeşitlerinin Aydın yöresindeki gelişme durumlarının belirlenmesi. ADÜ Ziraat Fakültesi Dergisi, 28(2): 95-100
- Çivil, C., Haciseferoğulları, H. 2010. Eğirdir Bölgesinde Yetiştirilen Bazı Erik Çeşitlerinde Mekanik Hasat Parametrelerinin Belirlenmesi. Selçuk Tarım ve Gıda Bilimleri Dergisi, 24(3): 21-29
- Eriş, A., Barut, E. 2000. Ilıman İklim Meyveleri I. Uludağ Üniversitesi Ziraat Fakültesi Bahçe Bitkileri Bölümü Ders Kitabı, No:6
- Ertekin, C., Gozlekci, S., Kabas, O., Sonmez, S., Akinci, I. 2005. Some Physical, Pomological and Nutritional Properties of Two Plum (*Prunus domestica* L.) Cultivars. Journal of Food Engineering, 75(4): 508-514.
- FAO, 2020. Food and Agriculture Organization of the United Nations. Crops and livestock products. Crops Primary. Plums and sloes. <https://www.fao.org/faostat/en/#data/QCL> (Erişim tarihi: 18 Nisan 2022).
- Kayri, M. 2009. Araştırmalarda gruplar arası farkın belirlenmesine yönelik çoklu karşılaştırma (Post-Hoc) teknikleri. Fırat Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 19: 51-64.
- Kim D.O., Chun O.K., Kim Y.J., Moon H.Y., Lee C.Y., 2003. Quantification of polyphenolics and their antioxidant capacity of fresh plums. Journal Agricultural and Food Chemistry 51: 6509-6515
- Mazmanoğlu, A. 2014. Deney Tasarımı ve Genelleştirilmiş Ters Matrislerle İstatistik Analiz Yöntemleri. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., No: 20779. ISBN: 978-605-133-720-3

- Özbek, S. 1976. Özel Meyvecilik. Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yayınları, No: 128
- Özçağırın, R., Ünal, A., Özeker, E., İsfendiyaroğlu, M. 2011 Ilıman İklim Meyve Türleri (Sert Çekirdekli Meyveler Cilt:1). Ege Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yayınları, No:553, 103-107, Bornova, İzmir.
- Searle, S.R. 1997. Linear Models. N.Y. State College of Agriculture Cornell University, Ithaca, N.Y.
- Sezer, S. A., Çetin, M. 2021. Erik Meyvesinin Farklı Hasat Dönemlerindeki Bazı Fiziksel ve Mekanik Özelliklerinin Belirlenmesi. Anadolu Tarım Bilimleri Dergisi, 36: 73-79, doi:10.7161/omuanajas.781776
- Stoline, R.M., Ury, H.K. 1979. Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means. Technometrics, 21: 87-93
- Şenoğlu, B., Acıtaş, Ş. 2010. İstatistiksel Deney Tasarımı Sabit Etkili Modeller. Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti., No: 1584, Ankara. ISBN: 978-605-395-394-4
- Toothaker, L.E. 1992. Multiple Comparison Procedures. Sage Publications Inc., London, 104s.
- TÜİK, 2021. Türkiye İstatistik Kurumu. Bitkisel Üretim İstatistikleri. Meyveler içecek ve baharat bitkileri. <https://biruni.tuik.gov.tr/medas/?kn=92&locale=tr> (Erişim tarihi 25.05.2022).
- Üçkardeş F. 2006. İstatistik Testler Üzerine Bir Çalışma. Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş