İRRASYONEL SAYILARIN ÖĞRETİMİ İÇİN GÖRSEL MODEL ÖNERİSİ: *e* ve *π* SAYILARI

Yrd. Doç. Dr. Tuğba HORZUM*

Özet

Bu çalışma irrasyonel sayıların "tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı sayılar" ile ifade edildiğini bireylere sezdirmeye yönelik görsel bir model sunmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu görsel model matematik eğitiminde ve fen bilimlerinde sıklıkla öğrencilerin ve öğretmenlerin karşılaştığı e=2.71828182845904… ve π=3.141592653589793238…irrasyonel sayıları temelinde gerçekleştirilmiştir. e ve π sayılarının virgülden sonraki basamakları sonlu veya tekrar eden rakamlar kullanılarak yazılamamaktadırlar. Bu durum matematik camiasında irrasyonelliği ifade etmede kullanılan iki ifadeden birisidir. Bu ifadeden yola çıkarak ve e ile π sayıları baz alınarak irrasyonel sayıları öğrencilere sezdirmeye yönelik bir görsel model sunulmuştur. Bu görsel modelin oluşturulabilmesi için e ve π sayılarının ilk 2500 tam ve ondalık basamağındaki rakamlar Microsoft Excel programında 50 x 50'lik bir tabloya yerleştirilmiş, ardından rakamlara birer renk atanmış ve tablonun her bir hücresi, hücreye karşılık gelen rakam yerine atanan renk ile renklendirilmiştir. Bu şekilde yapılan renkli Excel tablosu resim formatına dönüştürülmüştür. Daha sonra, özellikle ortaokul çağındaki veya somut işlemler dönemindeki öğrencilere günlük hayatta karşılaşabilecekleri bir ortam oluşturmak adına araştırmacı tarafından tasarlanan bir şadırvan üzerinde e ve π irrasyonel sayılarının görsel modelleri için şadırvan üzerinde gerekli ışıklandırmalar planlanmış ve görsel modellerin akşam vaktinde gökyüzüne / duvara / yere yansıtılarak bu sayılara dikkat çekilmesi amaçlanmıştır.

Anahtar sözcükler: *irrasyonel sayılar,e sayısı, π sayısı, matematik öğretimi*

A VISUALIZATION PROPOSAL FOR IRRATIONAL NUMBERS: THE NUMBER e AND π

Abstract

This study is realized to make individuals understand that irrational numbers are expressed by "infinite decimal numbers that do not repeat". For this, a visual model proposal for the teaching of irrational numbers is presented. This visual model is based on e=2.71828182845904… and π=3,141592653589793238 … numbers which are often seen by studenst and teachers in mathematics education and science. The digits of these numbers after the comma cannot be written using repeating or a finite number of digits (infinite non-repeating decimal representation). This is one of the two

*Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, thorzum@konya.edu.tr
Bu çalışmanın bir kısmı 16-18 May 2014 tarihlerinde Konya'da düzenlenen International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology (ICEMST) konferansında sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

expressions used to express irrationality in the mathematical society. By this way, based on the number of e and π, a visual model was presented to make the students understand the irrational numbers. To make this visualization, the numbers of first 2500 integer part and decimal digits of e and π were placed on the size of 50 x 50 table in Microsoft Excel and these visualizations were presented on a fountain which was designed by the researcher. Then, all the numbers from 0 to 9 were assigned different colors and each cell of table was colored with the corresponding assigned colors instead of numbers. The colored Excel table made in this way was converted into image format. Then, it was intended to draw attention to these numbers via planning the illumination on the designed fountain and reflecting these colors in the sky or on the wall / floor in the evening.

Keywords: *irrational numbers, number e, number π, teaching mathematics*

1. Giriş

Sayılar ve sayı sistemleri insanoğlunun neredeyse tüm yaşamı boyunca kullandığı matematiğin en temel konularından biridir. Bu bağlamda öğrenciler sırasıyla önce doğal sayıları ve kesirleri, sonra tam sayıları ve rasyonel sayıları ardından irrasyonel sayıları öğrenirler. Matematikte ön şartlılık ilkesinin var olduğu göz önüne alınırsa öğrencilerin irrasyonel sayıları öğrenebilmeleri rasyonel sayıları anlamalarına bağlı olduğu söylenebilir. Burada bahsi geçen irrasyonel sayılar matematikte kritik bir öneme sahiptir. Shinno (2007) irrasyonel sayıların önemini üç şekilde açıklamıştır. Bunlardan ilki kıyaslanamaz / ölçülemez miktarların (yani bir birim ile karşılaştırılamayan parçaların uzunluğu) varlığı ve bunların sembol ile gösterilmesi, ikincisi hesaplama kurallarıyla elde etmenin mümkün olduğu sınırsız ve devirsiz ondalık gösterimlere sahip sayılara ilişkin merak ve üçüncüsü yeni ve daha kapsayıcı bir sayı kümesine duyulan ihtiyaçtır. Buradan da görülebileceği gibi irrasyonel sayı kavramının anlaşılması, daha büyük sayı kümeleri için önemli bir rol üstlenmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007a). Bu önemli rolüne rağmen irrasyonel sayı kavramına yönelik çalışmaların oldukça yetersiz olduğu düşünülmektedir (Sirotic, 2010). Yapılan bu kısıtlı çalışmalarda ise öğretmen ve öğrencilerin irrasyonel sayılara ilişkin bazı zorluklara sahip oldukları tespit edilmiştir. Buna göre bireylerin; irrasyonel sayıların rasyonel sayı olarak yaklaşık değerlerini tahmin edemedikleri ve bunun sonucunda irrasyonel sayıları, sayı doğrusu üzerinde doğru bir şekilde gösteremedikleri ayrıca irrasyonel sayının tanımlarını ve temel özelliklerini bilmelerine rağmen farklı temsillerini kullanmalarını gerektiren etkinliklerde başarısız oldukları, rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımlanmasında, sıralanmasında, karşılaştırılmasında öğrencilerin kavram yanılgısına sahip oldukları (Adıgüzel, 2013; Peled ve Hershkovitz, 1999; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Şandır, Ubuz ve Argün, 2007; Temel ve Eroğlu, 2014) sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca lise öğrencilerinin ve lise öğretmen adaylarının herhangi bir sayının rasyonel, irrasyonel ya da reel sayı olduğunu belirleyemediği (Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995), ortaokul öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların tanımı, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki işlemler ve sayı doğrusunda aralarındaki ilişki hakkında yanlış anlamalara sahip oldukları (Güven, Çekmez ve Karataş, 2011; Sirotic ve Zazkis, 2007a, 2007b) sonuçları da elde edilmiştir. Ek olarak irrasyonel sayı için sıklıkla kullanılan “Bölen sayı sıfırdan farklı olmak üzere iki tam sayınının bölümü şeklinde yazılamayan temsiller / sayılar” şeklindeki formal tanımı ile “Tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller / sayılar” yani kıyaslanmayan sayı olma özelliğinin bağdaştırılamadığı (Zazkis ve Sirotic, 2010) sonuçlarına da ulaşılmıştır. Burada bahsedilen zorlukların ve kavram yanılgılarının aşılabilmesi için araştırmacılar bazı önerilerde bulunmuşlardır. Örneğin Peled ve Herskovitz (1999) yaşanan zorlukların ve yanılgıların kaynağı olarak irrasyonel sayı kavramını ele almadaki sınırlı süreçlere işaret etmişler ve farklı bilgi parçalarının birleştirilmesini kolaylaştıran etkinliklerin tasarlanmasını önermişlerdir. Shinno (2007) ise farklı türdeki sayıların ölçüm sonucu ile temsil edilerek yapılandırılabileceğini ifade ederken, Kara ve Delice (2012) bu etkinliklerde görselleştirme tekniklerinin de dikkate alınması gerektiğine işaret etmişlerdir. Nitekim özellikle resimler ve şekiller ile görselleştirme, karmaşık ve soyut olan matematik konularının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlamaktadır (Özdemir, Duru ve Akgün; 2005). Ancak matematiğin tüm konularındaki kavramların somut hale getirilmesi pek mümkün görünmüyor gibi dursa da onları yarı somut hale getirmeye çalışmak dahi kavramların öğrenilmesi ve öğretilmesinde faydalı olacaktır (Yenilmez ve Şan, 2008). İrrasyonel sayılara ilişkin bir diğer çalışmayı gerçekleştiren Zaskis ve Sirotic (2010) ise yukarıda bahsi geçen sonucun nedenini irrasyonel sayıya ilişkin iki tanım arasındaki bağlantının anlaşılmamış olmasını göstermişler ve irrasyonel sayılara ilişkin geometrik, sembolik, bayağı kesir hatta sürekli kesir temsillerinin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Bu araştırmada bahsi geçen sonuçlar ve öneriler ile irrasyonel sayıların "Tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller/sayılar" tanımı göz önüne alınarak, matematikte ve fen bilimlerinde sıklıkla kullanılan *e* ve π sayıları üzerinden -farklı bir temsil örneği olarak- görsel model önerisi sunulacaktır. Çalışmada π sayısının özellikle seçilmesinin sebebi, Adıgüzel'in (2013) "π'ye eşit olmasından dolayı, 22/7'nin irrasyonel olması" ve Temel ve Eroğlu'nun (2014) "π =3 olarak alınırsa π sayısının doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı olması ve π olarak alınırsa π'nin irrrasyonel sayı olması" sonuçlarıdır. Öğrencilerin sıklıkla karşılaştığı π sayısında bile bu şekilde yanlış anlayışlara sahip olmaları diğer irrasyonel sayılarında da zorluklar yaşama ihtimallerinin olduğu şeklinde değerlendirilebilir. Ancak bu görsel model önerisini vermeden önce birer ünlü irrasyonel sayı olan *e* ve π sayılarının tarihsel gelişimleri hakkında bilgiler verilmesi bu sayıların öneminin daha iyi anlaşılması adına faydalı olacaktır.

2. Pi (π) Sayısının Tarihsel Gelişimi

Pi (π) yunan alfabesinin 16. harfi ve Yunanca "çevre (περίμετρον)" sözcüğünün ilk harfidir. Matematik dünyasında ve fen bilimlerinde önemli bir yere sahip olan π sayısının şu anki değerini hesaplamak için günümüze kadar pek çok bilim insanı yıllarını adamıştır. Nitekim π sayısının geçmişinin Eski Mısır ve Mezopotamya'ya dayandığı belirtilmektedir (Tez, 2011). Buna göre Eski Mısır ve Mezopotamya'da π sayısı 25/8=3.125 ve $\sqrt{10}$=3.162 değerlerine sahiptir. Eski Mısır matematiğinin temelini oluşturduğu bilinen ve İÖ 1650 yılında yazıldığı belirlenen *Rhind Papirüsü*'ndeki 50. problemde bir dairenin alanı; kenarı, bu daire çapının 8/9'u olan bir karenin alanına eşit olduğu ve böylece π'nin değerinin $4(8/9)^2$=3.1605 olduğu ifade edilmektedir (Gültekin ve Asyalı, 2007; O'Connor ve Robertson, 2001a). Ancak π'nin ilk gerçek değerini Siracusa'lı *Archimedes*'in kullandığı belirtilmektedir (Posamentier ve Lehmann, 2004). *Archimedes*, önce düzgün altıgenden başlayarak bir çembere hem içinden hem de dışından n-kenarlı çokgenler çizerek ve her defasında kenar sayısını iki katına çıkararak (12-gen, 24-gen, 48-gen, 96-gen) π'nin değerini bulma yoluna gitmiştir (Posamentier ve Lehmann, 2004; Tez, 2011). Buradaki mantık; içte yer alan çokgenin çevresinin çemberinkinden küçük, dıştaki çokgenin çevresinin ise çemberinkinden büyük olması ve çokgenlerin çembersel bir şekle yaklaştırılmasıdır. Bu işlemler sonucunda *Archimedes* π sayısının değerini 223/71< π < 22/7 ya da $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ olarak (veya 3,14084< π <3,14285 olarak) vermiştir (Posamentier ve Lehmann, 2004). Dikkat edilirse; bu iki sınır değerin ortalaması alındığında π'nin gerçek değeri ile arasında yaklaşık 0,0002 kadar bir hata farkını içeren 3,1418 değeri bulunur. *Archimedes*'ten sonra da Liu Hui, Tsu Ch'ung Chi, Aryabhata, El-Harezmî, El-Kaşi, Frangois Viète, Adrianen van Roomen ve Ludolph van Ceulen gibi pek çok matematikçi çemberin içine ve dışına çokgenler çizip zamanla çokgenlerin kenar sayılarını arttırarak ve böylece çokgeni çembere dönüştürmeye çalışarak π sayısını hesaplamaya çabalamışlardır (O'Connor ve Robertson, 2001a; Posamentier ve Lehmann, 2004; Tez, 2011). Bu bilgiler ışığında çeşitli matematikçilerin π için ulaştıkları değerler ve bunlara ilişkin kronolojik bilgiler bazı kaynaklardan (Blatner, 1997/2003; O'Connor ve Robertson, 2001a; Posamentier ve Lehmann, 2004; Tez, 2011) derlenerek Tablo 1 ile sunulmuştur.

Tablo 1. ***Archimedes'in Yöntemini Kullanan Matematikçilerin π için Ulaştıkları Değerler***

Kişi	Zaman	Ulaşılan π değeri
Batlamyus (~85-165)	~ İS 150	3. 1416
Tsu Ch'ung Chi (430-501)	430-501	355/113=3. 1415926
Aryabhata (476-550)	~ 510	62832/20000=3.1416
El-Harezmî (~783-850)	~ 800	3.1416
Gıyaseddin Cemşid El-Kaşi (~1380-1437)	~1420	Virgülden sonra 16. basamağa kadar doğru değere ulaşılmıştır
François Viète (1540-1603)	1540-1603	Virgülden sonra 9. basamağa kadar doğru değere ulaşılmıştır
Adrianen van Roomen (1561-1615)	1561-1615	Virgülden sonra 17. basamağa kadar doğru değere ulaşılmıştır
Ludolph van Ceulen (1540-1610)	~1600	Virgülden sonra 35. basamağa kadar doğru değere ulaşılmıştır

Avrupa Rönesans'ı ile birlikte matematiğe olan bakış açısı da formal olarak şekillenmeye başlamıştır. Bu durum π için matematiksel formüller ortaya atılmasına neden olmuştur (Tez, 2011). Bu formüllerden ilki John Wallis (1616-1703) tarafından 1665 yılında şu şekilde verilmiştir:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8....2n.2n}{1.1.3.3.5.5.7.7....(2n-1)(2n-1)}$$

Öte yandan π'nin hesaplanmasında çok çeşitli seriler de kullanılmıştır. İlk kez James Gregory (1638-1675) tarafından keşfedilen $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$ serisidir (O'Connor ve Robertson, 2001a). Bir diğer seri ise verilen terimlere kadar seri üzerinden hesap yapıldığında (3,14159169961492) sayısını verir ki bu virgülden sonra 5. basamağa kadar doğru olan $\pi^2/12 = 1 - 1/4 + 1/9 - 1/16 + 1/25 + \ldots$ serisidir. Serilerin kullanılmasının ardından, 18. yüzyıldan itibaren π sayısı için hesaplamalar hızla devam etmiştir. 18. yüzyıldan itibaren π sayısının tarihsel gelişimi kaynaklardan (Bailey, 2003; Borwein, 2000; Dosay, 1990; O'Connor ve Robertson, 2001a; Fel'dman ve Nesterenko, 1997; Posamentier ve Lehmann, 2004; Tepedenlioğlu, 1995) elde edilen bilgiler, araştırmayı yapan kişi, zaman ve π ile ilgili ulaşılan bilgi esas alınarak Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2- *18. Yüzyıldan İtibaren π Sayısı ile İlgili Ulaşılan Bilgiler*

Kişi	Zaman	π ile ilgili ulaşılan bilgi
Abraham Sharp (1651-1742)	1699	Gregory'nin formülünü kullanarak 71. basamağa kadar
John Machin (1680-1751),	1701	Kendi yöntemlerini kullanarak 100. basamağa kadar
Thomas Fantet de Lagny (1660-1734)	1719	127. basamağa kadar
Leonhard Euler (1707-1783)	**1737**	**π 'nin, çemberin çevresinin çapına oranı olması**
Baron Georg von Vega (1756-1802)	1789	126. basamağa kadar
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)	**1766**	**π 'nin irrasyonel olması**
Baron Georg von Vega (1756-1802)	1794	136. basamağa kadar
William Rutherford (1798-1871)	1841	152. basamağa kadar
Strassnitzkyve Dase	1844	200. basamağa kadar
William Rutherford (1798-1871)	1853	440. basamağa kadar
William Shanks (1812-1882)	1873	527. Basamağa kadarı doğru olacak şekilde 707 basamaklı değer vermiştir.
Ferdinand von Lindemann (1852-1939)	1882	π 'nin aşkın (transandantal) bir sayı olması
D. F. Ferguson ve J. W. Wrench Jr	1947	π 'nin 808 ondalık basamağa kadar
Georg W. Reitwiesner	1949	ENIAC [Electronic Numerical İntegrator and Computer] adlı elektronik hesap makinesiyle yaklaşık 70 saatlik süre içinde 2037 ondalık basamağa kadar
S. Nicholson ve J. Jeenel	1954	IBM NORC [Naval Ordnance Research Calculator] adlı makine ile 12 dakikada 3089 basamağa kadar
F.Genuys	1958	IBM 704 makinesi ile 1 saat 40 dakikada 10000 basamağa kadar
Shanks ve Wrench	1961	100 bin 265 basamağa kadar
J. Guilloud ve M. Bouyer	1973	CDC 6600 model makine ile 2 saatten kısa bir süre içinde 1 milyon 1250 basamağa kadar
Miyoshi ve Kanada	1981	2 milyon basamağa kadar
Kanada, Yoshino ve Tamura	1982	16 milyon 777 bin 206 Basamağa kadar
Gosper	1985	Ramanujan'ın formülünü kullanarak 17 milyon 526 bin 200 basamağa kadar
Bailey	Ocak 1986	29 milyon 360 bin 111 basamağa kadar
Kanada ve Tamura	Eylül 1986	33 milyon 554 bin 414 basamağa kadar
Kanada ve Tamura	Ekim 1986	67 milyon 108 bin 839 basamağa kadar
Kanada ve arkadaşları	Ocak 1987	134 milyon 217 bin 700 basamağa kadar
Kanada ve Tamura	Ocak 1988	201 milyon 326 bin 551 basamağa kadar
David and Gregory Chudnovsky	Mayıs 1989	480 milyon basamağa kadar
Kanada ve Tamura	Temmuz 1889	536 milyon 870 bin 898 basamağa kadar
Kanada ve Tamura	Kasım 1989	1 milyar 73 milyon 741 bin 799 basamağa kadar
David and Gregory Chudnovsky	Ağustos 1991	2milyar 260 milyon basamağa kadar

David and Gregory Chudnovsky	1994	Ramanujan'ın formülünü kullanarak 4 milyar 44 milyon basamağa kadar
Kanada ve Takahashi	1995	6 milyar 442 milyon 450 bin 938 basamağa kadar
Kanada ve Takahashi	1997	51 milyar 539 milyon 600 bin basamağa kadar
Kanada ve Takahashi	1999	206 milyar 158 milyon 430 bin basamağa kadar
Kanada, Ushiro, Kuroda	2002	1 trilyon 241 milyar 100 milyon basamağa kadar

Tablo 2'de görülebileceği gibi π'nin 1 trilyonu aşkın basamağa kadar incelenmesinin altında, insanların başlangıçta π'nin rasyonel bir sayı olduğunu ve bunu ispatlama istekleri yatmaktadır. Yani π'nin bir yerden sonra basamaklarının, önceki değerlerini tekrar etmesi ve bu sayede π'nin rasyonel olduğunun anlaşılması amaçlanmıştır. Ancak İsviçreli matematikçi Lambert π'nin irrasyonel olduğunu diğer bir ifade ile çemberin çevresi ile çapının bir ortak ölçüsü olmadığını kanıtlamıştır (Tepedenlioğlu, 1995). Bundan yaklaşık 120 yıl sonra Ferdinand von Lindemann, π'nin aşkın (transandantal) bir sayı olduğunu (yani π'nin, katsayıları tam sayı olan herhangi bir polinomsal denklemin cebirsel çözümünün olmadığını) kanıtlamıştır. Lindemann'ın bu sonucu, gerçekte "dairenin kareselleştirilmesinin" olanaksız olduğunu göstermiştir. Başka bir deyişle π'nin aşkınlığı, verilen bir dairenin alanına eşit alana sahip bir karenin cetvel ve pergel yardımıyla çizilemeyeceği anlamına gelmektedir (Çakar, 1992; Ifrah, 1985/2000).

3. *e* Sayısının Tarihsel Gelişimi

Bir başka irrasyonel sayı olan e sayısı, en az π sayısı kadar önem arz etmektedir. Çünkü e sayısı, matematik, doğa bilimleri ve mühendislikte önemli yeri olan sabit bir reel sayıdır ve doğal logaritmanın tabanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak her ne kadar yaklaşık 300 yıllık bir geçmişe sahip olsa da, e sayısının hikâyesi, π'nin hikâyesine göre çok daha az bilinmektedir. On yedinci yüzyılın ilk yıllarında coğrafi keşiflerin etkisiyle insanlar, paralarını arttırmanın yollarını ararken paranın büyümesi ile sonucu sonsuza giden kesin matematiksel bir tanım arasında bir ilişki bulmuşlardır. Bu matematiksel tanım sayesinde uluslararası ticaretlerde ve finansal alanlarda e sayısı tanınmaya başlanmıştır (Yenilmez ve Palabıyık, 2008). Günümüzde de bir niceliğin kendi büyüklüğü ile orantılı bir hızla değiştiği bütün olaylar, e sayısına dayanan matematiksel bağıntılarla anlatılırlar (Tez, 2011). Bu olaylardan bazıları; tepkime hızları, buhar basıncı, elektromotor kuvvet, bir müzik topluluğunda çıkan ses ile çalgı sayısı arasındaki bağıntı, bir bilimin zamanla gelişmesi, bir tavuğun yumurtlamasındaki yıllık azalmalar olarak gösterilebilir. Ancak e sayısı en çok "bileşik faiz formülünün temelini oluşturduğu" bilgisiyle karşımıza çıkmaktadır (Maor, 1994; Yenilmez ve Palabıyık, 2008).

Tarihte e sayısına dolaylı olarak ilk değinen İskoç matematikçi John Napier (1560-1617) olmuştur (O'Connor ve Robertson, 2001b). Napier, 1618'de logaritmalar üzerine yayımlanan kitabının ekinde, çeşitli sayıların doğal logaritmalarını verirken $\log_e 10 =$ 2.302585 eşitliğini vererek e sayısını kullanmıştır (Maor, 1994), fakat e'nin kendisiyle ilgilenmemiştir. Napier'den sonra William Oughtred (1574-1660), Henry Briggs (1561-1630), Gregorius Saint-Vincent (1584-1667), Huygens (1629-1695) ve Nicolaus Mercator'da (1620-1687) logaritma ve e sayısını kullanmalarına rağmen bizzat e sayısı üzerinden çalışmalar yapmamışlardır. e sayısını gerçek anlamda ilk keşfeden Jacob Bernoulli (1654-1705) olmuştur (O'Connor ve Robertson, 2001b).

Bernoulli, 1683'te birleşik faiz problemini incelerken $\lim_{n\to e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadesinin değeri üzerinde çalışmış ve bu esnada *e* sayısını keşfederek bu sayının yaklaşık değerini hesaplamıştır. *e* sayısının gösterimi önceleri Leibniz'in (1646-1716) Huygens'e 1690'da yazdığı mektupta *b* olarak gösterilmiştir. Ancak Euler, 1731'de Prusyalı bir matematikçi olan Christian Goldbach'a (1690-1764) yazdığı bir mektupta bu sabit sayıdan "*e* sayısı" diye bahseden ilk kişi olmuştur (O'Connor ve Robertson, 2001b). Euler 1748'de *Introductio in Analysin infinitorum* adlı çalışmasında $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$ eşitliğini göstererek *e* sayısına *Euler sayısı* adını vermiş ve $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ eşitliğini ortaya koymuştur. 18. yüzyıldan itibaren *e* sayısı ile ilgili pek çok gelişme yaşanmıştır. Bu tarihsel gelişim, bazı kaynaklardan (Avcı, Alnıaçık ve Ergun, 1995; Coolidge, 1950; Maor, 1994; O'Connor ve Robertson, 2001b; Sandifer, 2006; Yenilmez ve Palabıyık, 2008) faydalanarak özetlenmiştir (Tablo 3). Pek çok insan *e*'nin irrasyonel olduğunu ilk ispatlayan kişinin Euler olduğunu kabul ederken, e'nin cebirsel bir sayı olmadığını ispatlayan kişinin Hermite olduğu yönünde kesin bir bilgi olduğunu belirtmektedir (Maor, 1994; Sandifer, 2006). Ancak incelenen çalışmalarda e'nin tarihi ile ilgili bazı çelişkilerde görülmüştür. Örneğin Hermite'in bu ispatının 1873 (Dosay, 1990; Maor, 1994; O'Connor ve Robertson, 2001b; Sandifer, 2006) veya 1874 (Avcı, Alnıaçık ve Ergun, 1995; Coolidge, 1950) olduğu konusunda farklı ifadeler bulunmaktadır.

Tablo 3- ***18. Yüzyıldan İtibaren*** e ***Sayısının Tarihsel Gelişimi***

Kişi	Zaman	Ulaşılan *e* ile ilgili bilgi
Leonhard Euler (1707-1783)	1731	*e* olarak adlandırma
Leonhard Euler (1707-1783)	**1737**	***e*'nin irrasyonelliğinin kanıtı**
Leonhard Euler (1707-1783)	1748	$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$ eşitliğini keşfetme *e* sayısını *Euler sayısı* olarak adlandırma $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ eşitliğini keşfetme *e*'nin virgülden sonra 18. basamağına kadar değerinin bulunması: *e=2.718281828459045235*
William Shanks (1812-1882)	1853	İlk 137. basamağına kadar hesaplanması
William Shanks (1812-1882)	1871	İlk 205. basamağına kadar hesaplanması
Benjamin Pierce (1809-1880)	1864	$i^{-i}=\sqrt{e^{\pi}}$
Charles Hermite (1822-1901)	1873/1874	*e*'nin cebirsel bir sayı olmadığının kanıtı
J. M. Boorman	1884	Virgülden sonra ilk 346. basamağına kadar hesaplanması
Adams	1887	$\log_{10} e$ ile 272. basamağına kadar hesaplanması
?	1946	Virgülden sonra 808. basamağına kadar hesaplanması
John von Neumann	1949	ENIAC aracılığıyla ilk 2010 basamağına kadar hesaplanması
Daniel Shanks ve John W. Wrench	1961	100 bin 265basamağa kadar
Robert Nemiroff ve Jerry Bonnell	1994	10 milyon basamağa kadar
Patrick Demichel	Mayıs 1997	18 milyon 199 bin 978basamağına kadar
Birger Seifert	Ağustos 1997	20 milyon basamağına kadar

Patrick Demichel	Eylül 1997	50 milyon 817 basamağına kadar
Sebastian Wedeniwski	Şubat 1999	200 milyon 579 basamağına kadar
Sebastian Wedeniwski	Ekim 1999	869 milyon 894 bin 101 basamağına kadar
Xavier Gourdon	Kasım 1999	1 milyar 250 milyon basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Xavier Gourdon	10 Temmuz 2000	2 milyar 147 milyon 483 bin 648 basamağına kadar
Colin Martin ve Xavier Gourdon	16 Temmuz 2000	3 milyar 221 milyon 225 bin 472 basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Xavier Gourdon	2 ağustos 2000	6 milyar 442 milyon 450 bin 944 basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Xavier Gourdon	16 Ağustos 2000	12 milyar 884 milyon 901 bin basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Xavier Gourdon	21 Ağustos 2003	25 milyar 100 milyon basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Xavier Gourdon	18 Eylül 2003	50 milyar 100 milyon basamağına kadar
Shigeru Kondo ve Steve Pagliarulo	2007	100 milyar basamağına kadar

Tablo 3'te görüldüğü gibi, e sayısı üzerine çalışmalar yaklaşık 300 yıl önce başlayarak günümüze kadar hızla devam etmiştir. Günümüzde yoğun bir şekilde kullanılan ve yukarıda değinilmeyen, e sayısı ile ilgili en çok bilinen formüllerden ikisi aşağıda sırasıyla verilecek olan Euler formülü ve bu formülün özel bir hali olan Euler özdeşliğidir (Yenilmez ve Palabıyık, 2008).

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ ve } e^{i\pi} + 1 = 0$$

e'nin tarihinde her ne kadar bazı çelişkiler veya ulaşılamayan bilgiler var ise de π ile birlikte matematik ve fen bilimlerinde çok önemli bir yere sahip olduğu inkâr edilemez. Bu nedenle bu çalışmada; özellikle ortaokul ve lise ve hatta lisans öğrencileri için, ele alınan bu sayılara ve matematiğin eğlenceli olma yönüne ve irrasyonel sayıların tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı sayı olmalarına dikkati çekmek adına bu sayılara ait görsel modellerin oluşturulması amaçlanmıştır. *e ve* π sayılarına ilişkin ele alınan farklı sunum ile bu çalışmanın, özellikle küçük yaştaki öğrencilerin matematiğe olan ilgilerinin artmasına vesile olacağı ve daha büyük yaştaki öğrencilerin ise -bu farklı modelin / temsilin diğer irrasyonel sayılara uygulanmasıyla- irrasyonel sayıların "tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller / sayılar" tanımını daha iyi sezebilecekleri veya anlayabilecekleri düşünülmektedir. Yani bu görsel model önerisi ile bireylerin *e* ve π sayıları temelinde irrasyonel sayıların sonsuz ondalık basamağa sahip olduğunu sezdirmek amaçlanmaktadır.

4. *e* ve π İrrasyonel Sayılarına Görsel Model Önerisi

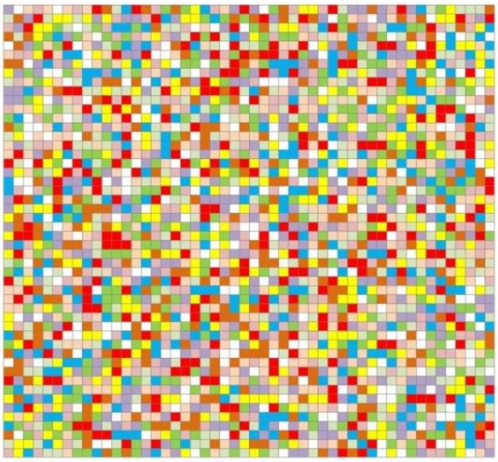
Bu çalışmada *e* ve π sayılarına ilişkin görsel modellerin elde edilebilmesi için 3 aşamaya ihtiyaç duyulmuştur. Birinci aşamada, her rakama bir renk atanmış ve ardından *e* ve π sayılarına ait görsel modelleri tasarlanmıştır. İkinci aşamada, elde edilen bu görselleştirmelerin sergilenebilmesi amacıyla tasarlanan şadırvana ait mimari çizimler bir mimarın yardımıyla modellenmiştir. Üçüncü aşamada, e ve π sayılarına ait görselleştirmeler ile mimari modellemeleri yapılan şadırvan, birbirlerine entegre edilerek farklı bir bakış açısıyla ele alınmıştır.

1.aşama: Bu aşamada Tezcan'ın (2010) π sayısı için, Horzum, Pala ve Sevil'in (2011) e sayısı için yaptıkları işlemler temel alınmıştır. Buna göre e ve π sayılarının birler basamağı ve ilk 2499 ondalık basamağındaki rakamlar Microsoft Excel programında 50 x 50'lik bir tabloya yerleştirilmiştir. Birler basamağı ve ilk 2499 ondalık basamağın alınmasının sebeplerinden biri uygulamaya dönük diğeri ise irrasyonel sayıların doğasına yöneliktir. Birincisi bu sayıları Microsoft Excel programında 50 x 50'lik bir tabloya yerleştirmenin ve her rakama karşılık gelen rengi atamanın zorluğu ikincisi ise irrasyonel sayıların virgülden sonra sonsuz basamağa sahip olmasıdır (Zaten bu çalışmanın amacı tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı sayıların varlığını bireylere göstermek değil, sezdirmektir). Excelde rakamların atanmasından sonra 0'dan 9'a kadar tüm rakamlara bir renk atanmış ve tablonun her bir hücresi, hücreye karşılık gelen rakam yerine atanan renk ile temsil edilmiştir (Tablo 4).

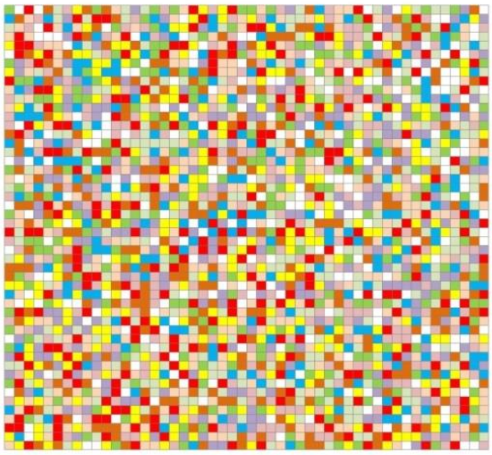
Tablo 4. *e ve π 'nin Birler ve Ondalık Basamaklarındaki Rakamlara Karşılık Gelen Renkler*

Rakam	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Renk										

Tablo 4'e göre renk ataması yapılan *e* ve π sayılarının renkli Excel tabloları resim formatına dönüştürülerek Şekil 1'de verilen görselleştirmeler elde edilmiştir.



e sayısına ait görsel model



π sayısına ait görsel model

Şekil 1. *e* ve π irrasyonel sayılarına ait görsel modeller

2. Aşama: Bu aşamada birinci aşamada elde edilen görsel modellerin bireylerin ilgisini çekecek şekilde sergilenebilmesi amacıyla araştırmacı tarafından tasarlanan şadırvana ait mimari çizimler tanıtılacaktır. Bu mimari çizimler bir mimarın yardımıyla modellenmiştir. Bu şadırvana ait üstten, karşıdan ve yandan görünümleri Şekil 2 ve Şekil 3 ile verilmiştir.

Şekil 2. Şadırvanın üstten ve yandan görünümü

Şekil 3. Şadırvanının karşıdan görünümü

3. Aşama: Bu aşamada e ve π irrasyonel sayılarına ait görsel modeller ve mimari çizimleri yapılan şadırvan, birbirlerine entegre edilerek farklı bir bakış açısıyla ele alınmıştır. İkinci ve üçüncü aşamanın ele alınmasının sebebi özellikle küçük yaştaki veya somut modele ihtiyaç duyan bireylerin "bu günlük hayatta ne işimize yarayacak?" sorularına cevap verme isteğidir. Bu bakış açısıyla matematiksel kavramların gerçek hayatla iç içe olabileceğini, dolayısıyla ele alınan görsel modellerin daha fazla içselleştirilmesi adına irrasyonel sayılara dikkatin çekilebileceği doğal bir ortamın zeminini oluşturmak hedeflenmiştir. Buna göre şadırvan üzerine bir kürenin konumlandırılmasıyla ve içerisine yerleştirilen 2 projektör ile gerekli ışıklandırmaların yapılmasıyla bu görsel modellerin akşam vaktinde gökyüzüne veya duvara / yere yansıtılarak *e* ve π sayılarının irrasyonelliğini sezdirmek amaçlanmıştır. Şadırvan üzerine konumlandırılmış küre ve bu küreden elde edilen renk yansıması Şekil 4 ile gösterilmiştir.

Şekil 4. e ve π sayılarına ait görsel modellerin gökyüzüne yansıtılması

Şekil 4 ile gösterilen şadırvanın üzerine konumlandırılmış kürenin bir yarısına *e* diğer yarısına π irrasyonel sayısına ait görsel modellerler yerleştirilmiştir. Küre içerisine birbirine zıt konumda yerleştirilen 2 projektörün akşam vakti devreye girmesiyle, bu sayılara ait görsel modeller gökyüzüne, duvara veya yere yansıtılmış olacaktır. Şekil 4 ile verilen ikinci resimde yüksek çözünürlük gerektiren renklerin teknik yetersizliklerden dolayı yansıtılamaması ile temsili olarak π sayısı yansıtılmıştır.

5. İrrasyonel Sayılara İlişkin Görsel Modellerin Matematik Öğretiminde Kullanımı

Ülkemizde 2013 yılında uygulanmaya başlanan Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] Ortaokul Matematik Öğretimi Programına göre, bireyler irrasyonel sayı kavramıyla ilk olarak 8.sınıfta karşılaşmaktadırlar. Bu programa göre öğrencilerden reel sayıları tanımaları ve rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar arasında ilişkiler kurabilmeleri beklenmektedir. Ortaokulda irrasyonel sayı kavramına ilk olarak kareköklü ifadeler verilerek değinilmektedir. Ardından programda "*Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir*" kazanımı altında "*tam kare olmayan sayıların kareköklerinin rasyonel sayı olarak belirtilemediğine (iki tam sayının oranı şeklinde yazılamadığına) dikkat çekilir. π sayısı bir irrasyonel sayı olarak tanıtılır*" ve "*devirli ondalık gösterimleri, rasyonel sayı olarak ifade etmeye yönelik çalışmalara yer verilir*" açıklamaları yer almaktadır (MEB, 2013a). Bununla birlikte yine 2013 yılında uygulanmaya başlanan Ortaöğretim Matematik Öğretimi Programında ise irrasyonel sayılar, 9 ve 11. sınıflarda ele alınmaktadır. Dokuzuncu sınıfta reel sayılar konusu altında verilen irrasyonel sayı kavramı için doğal sayı, tam sayı ve rasyonel sayı kavramları ön bilgiler olarak ele alınırken $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığının ispatı ve sayı doğrusu üzerindeki yeri gösterilmektedir. Öte yandan 11. sınıfta ise logaritma fonksiyonu altında "*On tabanında logaritma fonksiyonunu ve doğal logaritma fonksiyonunu açıklar*" kazanımı altında *e* sayısının bir irrasyonel sayı olduğunun ve x sayısının alacağı çok büyük pozitif ve çok küçük negatif değerler için $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinin e sayısına yaklaştığının vurgulanması gerektiği ifade edilmektedir (MEB, 2013b). Ortaokul ve ortaöğretim matematik öğretim programlarında yer alan bu kazanımlar göz önüne alındığında, bu çalışmada *e* ve π sayılarına yönelik sunulan görsel modeller ile irrasyonel sayı fikrinin sezdirilmesinin dahi faydalı olabileceği düşünülmektedir. Yukarıda üç aşama ile sunulan görsel modelin tasarımı için iki farklı kullanım alanı mevcuttur. Bunlardan ilki sınıf içerisinde diğeri ise sınıf dışında kullanımdır. Buna göre ikinci ve üçüncü aşamada şadırvan aracılığıyla ele alınan görsel modeller sınıf dışarısında her sınıf seviyesinde irrasyonel sayılara dikkat çekmek amacıyla kullanılabilir. Her ne kadar irrasyonel sayı kavramının 8.sınıfta öğretimi söz konusu olsa da daha küçük sınıf seviyelerinde sadece merak uyandırmak amaçlı bu model kullanılabilir. Tersine birinci aşamadaki görsel model ise matematik derslerine entegre edilebilir niteliktedir ve ortaokul, lise ve hatta üniversite düzeylerinde kullanımı söz konusu olabilir. Ancak burada sunulan görsel modelin matematik derslerinde nasıl kullanılabileceğine dair uygun örneklerin verilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu bölümde en çok bilinen irrasyonel sayılardan olan e ve π sayıları üzerinden tanıtılan irrasyonel sayılara ilişkin görsel model önerisinin matematik öğretiminde nasıl kullanılabileceğine ilişkin bazı örnekler verilecektir. Bu örneklere geçmeden önce vurgulanması gereken üç nokta vardır. Bunlardan ilki rasyonel sayıların ondalık basamakları sonlu veya tekrar eden rakamlar kullanılarak yazılabileceği, ikincisi irrasyonel sayıların ise tam tersi şekilde tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsillere sahip olduğudur. Diğeri ise matematiğin önşartlılık ilkesine sahip olması dolayısıyla öğrencilerin irrasyonel sayıları öğrenebilmeleri için öncelikle rasyonel sayıları anlamaları gerektiği gerçeğidir. Bu üç önemli noktadan yola çıkarak bu çalışmada ele alınan irrasyonel sayılar için görsel model önerisinin öncelikle rasyonel sayılarda kullanımına ardından daha soyut bir kavram olan irrasyonel sayılara geçiş yapılması gerekmektedir. Nitekim öğretimin somuttan-soyuta ve bilinenden bilinmeyene doğru yapıldığı zaman etkili olduğu bilinen bir gerçektir.

Matematik öğretiminde bu görsel modelleri etkili bir şekilde kullanabilmek için öncelikle Tablo 4 ile verilen rakam-renk tablosunu öğrencilere sunmak gerekmektedir. Ardından öğrencilerin o ana kadar tanıma imkanı buldukları bazı sayıların (doğal sayı, rasyonel sayı) görsel modellerinin elde edilme süreçleri ile ilgili bilgiler verilmelidir. Bu sayede öğrenciler görsel modellerin yapısını anlayabileceklerdir. Bu süreçte öğrenciler, öncelikle tam kısım ve ondalık kısım ayrımını bilmelidir. Bu ayrımı vurgulamak için sayıların tam kısmı ve ondalık kısmı arasında koyu bir çizgi yer aldığı belirtilmelidir. Örneğin; 135.96742 sayısının gösterimi için görsel model oluşturma süreci aşağıdaki gibidir (Tablo 5).

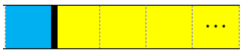
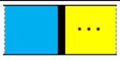
Tablo 5- ***135.96742 Sayısının Görsel Modelini Oluşturma Süreci***

Sayı	Tam Kısım			Ondalık Kısım				
135.96742	1	3	5	9	6	7	4	2

Tablo 5'e ek olarak, sayının ondalık kısmında aynı rakam(lar)ın sürekli tekrarı söz konusu ise, tekrar eden rakam sayısı kadar hücre içerisinde bu tekrar eden rakamların tamamını temsil edecek kadar basamağa (…) işareti yer almaktadır. Örneğin; 0.666… sayısında tekrar eden tek rakam 6 dır. 0.666… sayısının görsel modelinde ise son tek hücrede tekrar eden 6 rakamını temsil edecek şekilde (…) işareti olmalıdır. Benzer şekilde 81.9595… sayısı için de sırasıyla tekrar eden rakamlar 9 ve 5 tir. 81.9595… sayısının görsel modelinde ise son iki hücrede tekrar eden 9 ve 5 rakamlarını temsil edecek şekilde (…) işaretleri verilmelidir. Benzer şekilde

5.7245245245... sayısında sırasıyla 2, 4 ve 5 rakamları tekrar etmektedir. 5.7245245245.... sayısının görsel modelinde ise son üç hücrede tekrar eden rakamlarını temsil edecek şekilde (…) işaretleri verilmelidir. Dikkat edildiğinde tekrar eden sayılar birer örüntü oluşturmaktadır. Bu örüntü fikri öğrencilere kavratıldığında bu sayıların aslında $0.\overline{6}$, $81.\overline{95}$ ve $5.7\overline{245}$ sayılarının birer temsili olduğunu öğrenciler rahatlıkla kavrayabileceklerdir. Bu örnekleri özetleyen tablo aşağıda verilmiştir (Tablo 6).

Tablo 6. *Ondalık Basamakları Tekrar Eden Rakamlar Kullanılarak Yazılabilen Sayıların Görsel Temsilleri*

Sayı	İlk Görsel Temsil	Örüntü Farkedildikten Sonraki Görsel Temsil
0.666…		
81.9595…		
43.3044…		
1.3333333 …		

Tablo 6 ile verilen veya benzeri görsel modellerin yapısı öğrenciler tarafından anlaşıldıktan sonra irrasyonel sayılara ilişkin görsel modeller tanıtılabilir. Burada özellikle dikkat edilmesi gereken nokta irrasyonel sayıların virgülden sonraki basamaklarının sonlu veya tekrar eden rakamlar kullanılarak yazılamadığının yani sonsuz ve tekrar etmeyen rakamlar ile yazılabildiğinin vurgulanmasıdır. Dolayısıyla virgülden sonraki basamaklarda hiçbir şekilde bir örüntü elde edilemeyeceğinin gösterilmesidir. Burada Şekil 1 ile birer görsel modeli sunulan *e* ve π irrasyonel sayıları üzerinden bu özelliklerin sezdirilmesi sağlanabilir. Ayrıca bu görsel model oluşturma etkinlikleri, öğrencilerin yine sıklıkla karşılaştıkları $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ irrasyonel sayılarının ondalık basamakları tespit edilerek, sınıfta çeşitli renkli kağıtlarla veya boyama kalemleriyle benzer süreçler gerçekleştirilerek ele alınabilir.

6. Öneriler

Bu çalışmada, *e* ve π irrasyonel sayıları temelinde irrasyonel sayılara ilişkin bir görsel model önerisi sunulmuştur. Nitekim Adıgüzel (2013) irrasyonel sayılara ilişkin bilgi eksiklerinin ve yanılgıların giderilmesi için öğretimde irrasyonel sayıların farklı tanımlarına ve temsil biçimlerine yer verilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu nedenle bu çalışma ile sunulan görsel modelleri sınıf içerisinde ve sınıf dışarısında (bahsi geçen bu modelin inşa edilmesinden sonra gezi gözlem metodu ile) öğretmenlerin öğrencilerine tanıtması faydalı olabilir. Bununla birlikte irrasyonel sayılara ilişkin bu görsel modellerin sunulmasıyla yetinilmemeli ve bireylerin bu temsil biçimleri üzerine düşünmeleri sağlanmalı, irrasyonel sayıların ne anlama geldiği sınıf içerisinde özellikle tartışılmalıdır.

Bu çalışmada verilen görsel model önerisi sınıf içerisinde hem rasyonel hem de irrasyonel sayıların öğretimi için kullanılabilir. Bu sayede rasyonel sayılar için "sonlu veya tekrar eden sonsuz ondalık basamaklı temsiller / sayılar", irrasyonel sayılar için ise "tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller / sayılar" tanımı ile rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları sezdirilerek öğretilebilir. İrrasyonel sayılara ilişkin görsel modeller matematik öğretiminde kullanımı adlı başlıkta sadece sayıdan görsel modele olacak şekilde görsel modelin tek yönlü kullanımı sunulmuştur. Ancak görsel modeli verilen sayının bulunması, görsel model ve sayıların eşleştirilmesi gibi etkinliklerle matematik derslerinin zenginleştirilebileceği düşünülmektedir.

Araştırmacılara yönelik geliştirilen bazı öneriler de mevcuttur. Buna göre sunulan görsel modelin rasyonel ve irrasyonel sayıların öğretimine ne yönde etkisi olduğu, öğrencilerin e ve π irrasyonel sayılarına olan bakış açısını nasıl değiştirdiği çalışılmamıştır. Dolayısıyla bu görsel modelin öğrenci başarısına, tutumuna ve konunun kalıcılığına etkisi, kavramsal öğrenmeyi nasıl etkilediğine ve öğrencilerin e ve π irrasyonel sayılarına olan bakış açılarını nasıl değiştirdiğine dair çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

KAYNAKÇA

ADIGÜZEL, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları.* [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi] Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

AVCI, Y., ALNIAÇIK, K. ve ERGUN, N. (1995). "Kolay yoldan logaritma". *Matematik Dünyası, 3,* 10-12. http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/1995_3_10_12_KOLAYYOLDAN.pdf [Erişim Tarihi: 01.04.2014]

BAILEY, D. H. (2003). *Some background on Kanada's recent pi calculation* (Tech. Rep.). Lawrence Berkeley National Laboratory. http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-kanada.pdf

BLATNER, D. (2003). *π coşkusu* (N. Arık, Çev.). Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları. (Orijinal çalışma basım tarihi 1997).

BORWEIN, P. B. (2000). The amazing number Pi. http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/PAPERS/ P159.pdf [Erişim Tarihi: 01.04.2014] Nisan 2014 tarihinde alınmıştır.

COOLIDGE, J. L. (1950). "The number e" [Electronic Version]. *The American Mathematical Monthly, 57*(9), 591-602.

ÇAKAR, Ö. (1992). Doğanın güzellik ölçüsü altın oran. *Bilim ve Teknik Dergisi, 297*(8), 6-11.

DOSAY, M. (1990). "e sayısı" [Elektronik versiyon] *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Dergisi, 33* (1-2), 77-87. http://dergiler.ankara.edu.tr/dergiler/26/1242/14151.pdf [Erişim Tarihi: 1 Nisan 2014]

FEL'DMAN, N. I. ve NESTERENKO Yu. V. (1997). "Transcendental Numbers". In A. N, Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.). *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Volume 44: Number Theory IV. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

FISCHBEIN, E., JEHIAM, R. ve COHEN, C. (1995). "The concept of irrational number in high school students and prospective teachers". *Educational Studies in Mathematics, 29*: 29–44.

GÜLTEKİN, A. T.,ve ASYALI M. H. (2007). "Pi sayısının monte-carlo metodu ve Gregory/Leibniz formülüyle hesaplanması". *Journal of Yaşar University, 2*(7), 1-8. http://journal.yasar.edu.tr/wp-content/uploads/2012/11/vol2_no_7_09-G%C3%9CLTEK%C4%B0N.pdf [Erişim Tarihi: 01.04.2014]

GÜVEN, B., ÇEKMEZ, E. ve KARATAŞ, İ. (2011). "Examining Preservice Elementary Mathematics Teachers' Understandings about Irrational Numbers". *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 21*(5), 401-416.

HORZUM, T., Pala, H. ve Sevil, S. (2011). "e saatli merdiven"[Öz]. *10. Matematik*

Sempozyumu. Işık Üniversitesi, 21-23 Eylül 2011 İstanbul, 154.

IFRAH, G. (2000). *Rakamların evrensel tarihi- VII: İslam dünyasında Hint rakamları* (K. Dinçer, Çev.). Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları. (Orijinal çalışma basım tarihi 1985).

KARA, F. ve DELİCE, A. (2012). Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri. X.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. Niğde, Türkiye.

Maor, E. (1994). *e: The story of a number* (1st ed.). Princeton: Princeton University Press.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013a). Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: M.E.B. http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx?islem=2&kno=215 [Erişim Tarihi: 10.04.2014]

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013b). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: M.E.B. http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx?islem=2&kno=215 [Erişim Tarihi: 10.04.2014]

O'Connor, J. J. ve Robertson, E. F. (2001a). *A history of pi.* http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html [Erişim Tarihi 01.04.2014]

O'Connor, J. J. ve Robertson, E. F. (2001b) *The Number e.* http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/e.html [Erişim Tarihi: 01.04.2016]

ÖZDEMİR, M. E, DURU, A. ve AKGÜN, L. (2005). "İki ve Üç Boyutlu Düşünme: Iki ve Üç Boyutlu Geometriksel Şekillerle Bazı Özdeşliklerin Görselleştirilmesi". *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13*(2), 527-540.

PALED, I. ve HERSHKOVITZ, S. (1999). "Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39–46.

POSAMENTİER, A. S. ve LEHMANN, I.(2004). *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number.* New York: Prometheus Books.

SANDIFER, E. C. (2006). Who Proved e is Irrational? In *How Euler did it: The MAA Tercentenary Euler Celebration* (185-190).Washington DC: The Mathematical Association of America.

SHINNO, Y. (2007). "On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers". In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. ve Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4: 185-192. Seoul: PME.

SİROTİC, N. ve ZAZKİS, R. (2007a). "Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge". *Educational Studies in Mathematics, 65,* 49–76.

SİROTİC, N. ve ZAZKİS, R. (2007b). "Irrational numbers on the number line – where are they?" *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477-488.

STAFYLIDO, S. ve Vosniadou, S., (2004). "The development of students' understanding of the numerical value of fractions". *Learning and Instruction, 14,* 503–518.

ŞANDIR, H., Ubuz, B. ve Argün, Z. (2007). "9. Sınıf Öğrencilerinin Aritmetik İşlemler, Sıralama, Denklem ve Eşitsizlik Çözümlerindeki Hataları". *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 32*, 274-281.

TEMEL, H. ve EROĞLU, A. O. (2014). "İlköğretim 8.sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırmaları üzerine bir çalışma". *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 22*(3), 1263-1278.

TEPEDENLİOĞLU, N. (1995). *Kim korkar matematikten*? İstanbul: Sarmal Yayınları.

Tez, Z. (2008). *Matematiğin Kültürel Tarihi*. İstanbul: Doruk Yayıncılık.

TEZCAN, G. (2010). "On renkli 5156 basamaklı pi duvarı" [Öz]. *9. Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenlikleri*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 20-22 Ekim 2010, Trabzon.

YENİLMEZ, K., ve Palabıyık, U. (2008). "e sayısı ve kayıp tarihi". *XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Koç Üniversitesi, İstanbul, H. 1-10.

YENİLMEZ, K. ve Şan, İ. (2008). "Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Özdeşliklerin Görsel Modellerini Tanıma Düzeyleri". *Journal of Qafqaz University, 24*, 213-221.

ZAZKIS, R. ve Sirotic, N. (2010). "Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link". *CBMS Issues in Mathematics Education*, *16*: 1-27.