

Ayrık zamanlı PI, PID ve PIR kontrolörler ile baskın kutup bölgesi atama

Dominant pole region assignment with discrete time PI, PID and PIR controllers

Ayşe DUMAN MAMMADOV^{1*} , Emre DİNCEL¹ , Mehmet Turan SÖYLEMEZ¹ 

¹Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü, Elektrik-Elektronik Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
dumana@itu.edu.tr, dincele@itu.edu.tr, soylemez@itu.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 01.07.2021
Kabul Tarihi/Accepted: 27.01.2022

Düzeltilme Tarihi/Revision: 23.01.2022

doi: 10.5505/pajes.2022.79710
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Bu çalışmada, kapalı çevrim sistemin zaman özelliklerinin istenen aralıkta kalması için baskın kutup bölgesi atama yöntemiyle ayrık zamanlı PI, PID ve PIR kontrolörlerin tasarlanması amaçlanmıştır. Öncelikle, kapalı çevrim sistemin baskın ve baskın olmayan kutuplarının konumlanmaları istenen bölgeler için sınır fonksiyonlarının belirlenmesi anlatılmıştır. Burada, sınır fonksiyonları için, baskın kutupların konumlanması istenen bölge ayrık zaman düzleminde sabit yarıçaplı iki çember ve sabit bir sönüm oranı eğrisi, kalan kutupların konumlanması istenen bölge ise sabit yarıçaplı bir çember kullanılır. Daha sonra, baskın kutup bölgesi atama probleminin çözüm yöntemi ayrık PI kontrolör için verilmiştir. Önerilen yöntem, kontrolörün bir parametresini sabitleyerek ($K_p = k_p^*$) ayrık PID ve PIR kontrolörler için genişletilmiştir. PIR kontrolörde ek olarak gecikme parametresi h 'nin pozitif bir tamsayı olarak seçilmesi ile tasarıma başlanır. Önerilen yöntem, iki sistem üzerinden ayrık PI, PID ve PIR kontrolörler için anlatılmıştır.

Anahtar kelimeler: Kutup atama, Baskın kutup bölgesi, PI, PID, PIR, Ayrık zaman düzlemi.

Abstract

In this study, it is aimed to design discrete time PI, PID and PIR controllers with the dominant pole region assignment method in order to have time domain characteristics of the closed loop system in the desired interval. First of all, determination of the boundary functions for the regions where the dominant and non-dominant poles of the closed-loop system are desired to be located are explained. Here, for the boundary functions, the region where the dominant poles are desired to be located are two circles of constant radius and a constant damping ratio curve in the discrete time domain, and the region where the remaining poles are desired to be located is a circle of constant radius. Then, solution method of dominant pole region assignment problem is given for discrete PI controller. The proposed method is extended for discrete PID and PIR controllers by fixing a parameter of the controller ($K_p = k_p^*$). In addition, the design starts with selecting the delay parameter h as a positive integer in the PIR controller. The proposed method is demonstrated for discrete PI, PID and PIR controllers via two systems.

Keywords: Pole assignment, Dominant pole region, PI, PID, PIR, Discrete time domain.

1 Giriş

Kutup atama yöntemi, basit bir tasarım prosedürü sağlaması ve kapalı çevrim performansının istenildiği gibi ayarlanabilmesi nedeniyle kontrol sistemlerinde yaygın olarak kullanılan bir tasarım yöntemidir [1]. Diğer taraftan, kapalı çevrim sistemin kutuplarının keyfi olarak yerleştirilmesi özellikle yüksek mertebeden sistemler için her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumun önüne geçmek için, baskın kutup atama yöntemi kullanılabilir [2]-[7]. Baskın kutup atama yönteminde, kapalı çevrim sistemin aşım ve yerleşme zamanı gibi performans özellikleri daha çok baskın bölgedeki kutuplar tarafından belirlendiğinden, kapalı çevrim sistemin kutuplarından ikisinin baskın bölgede, kalan kutupların ise mümkün olduğunca baskın kutuplardan uzakta (genellikle 3-5 kat) konumlanması istenir [8]. Bu yöntem etkili bir tasarım yöntemi olsa da, kalan kutuplar baskın kutuplardan yeterince uzağa yerleştirilmezse, kapalı çevrim sistemin geçici hal yanıtını tahmin etmek zorlaşır ve bu durumda istenilen performans özelliklerinin karşılanması garanti edilemez [9].

Oransal integral (PI) ve oransal integral türev (PID) gibi düşük dereceli kontrolörler, basit bir yapıya sahip olmaları, kolay uygulama sağlamaları ve dayanıklı olmaları nedeniyle endüstriyel uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Ayrıca, PI kontrolör K_i integral parametresinin sabit durum hatalarını ortadan kaldırması ve ek olarak PID kontrolör K_d türev parametresinin de geçici hal yanıtını iyileştirmesi nedeniyle, kontrol problemlerinin çoğunda iyi performans sağlamak için yeterli olmaktadır [10]. Literatürde, PI ve PID kontrolör parametrelerini ayarlamak için birçok yöntem de vardır [11]-[17]. Diğer taraftan, PID kontrolör anlaşılması ve kullanılması kolay bir yapıya sahip olsa da bazen pratikte zorlayıcı olabilir. PID kontrolör kullanımında ortaya çıkabilen sorunlardan biri, yüksek frekanslı ölçüm gürültüsünü artırabilen türev terimini ayarlamaktır; bu nedenle, bazı kontrol uygulamalarında, türev teriminden kaçınılmak istenir. Diğer taraftan, zaman gecikmesinin kontrol uygulamalarında bazı sistemleri stabilize etmek için kasıtlı olarak kullanıldığı çalışmalar mevcuttur [18]-[21]. Zaman gecikmesinin pozitif etkileri de göz önüne alınarak, [22]-[24]'de yapılan çalışmalar yardımıyla [25]'de oransal integral gecikmeli (PIR) kontrolör önerilmiştir. PIR kontrolör, standart türev terimi yerine gecikmeli bir oransal terim içerir; böylelikle, ölçüm gürültüsü büyümesi azaltılabilirken, bozucu bastırma performansı ve integral terimi sayesinde olan sürekli hal hatası giderme özelliği korunmuş olmaktadır. Kontrol yapılarında gecikme içeren farklı çalışmalar yapılmıştır [26]-[29]. Belirtilen bu

*Yazışılan yazar/Corresponding author

nedenlerden, baskın kutup atamayı PID ve PIR kontrolör ile sağlamak önemlidir.

PID kontrolörün serbestlik derecesinin baskın kutupları atamak için yeterli olduğu göz önünde bulundurulduğunda bile, kalan kutupları yalnızca tek bir parametre (örneğin K_p) ile baskın kutuplardan uzağa yerleştirmek zordur. Diğer taraftan, kesin performans kriterleri seçmek yerine bu kriterleri belirli aralıklarda seçmek mantıklı bir yaklaşım olmaktadır. Sistemlerde istenilen minimum ve maksimum değerler arasında performans özelliklerine sahip olması istenir. Performans kriterlerinin belirli değerler arasında olması, baskın kutup çiftinin sabit bir nokta yerine belirli bir bölgede yer almasını gerektirir. Bunun sonucunda, baskın kutup bölgesi atama problemi ortaya çıkar. Bu problemin çözümü için, Kang Hil H_∞ tasarımı, kazanç payı veya faz payı gibi ek özellikleri dikkate alarak, PID kontrolör ile baskın kutuplar yerine baskın kutup bölgesini kullanmayı önermiştir [30]. Böylece, yerleşme zamanı ve aşım gibi istenilen performans özellikleri karşılanabilmektedir. Bir başka çalışmada, Dincel E ve Söylemez MT tarafından kapalı çevrim sistemin istenilen performans özelliklerini karşılamak için kapalı çevrim sistemin kutuplarından ikisini istenen bir bölgeye atayan ve kalan kutupların ise baskın kutuplardan uzakta konumlanmalarını sağlayan PI ve PID kontrolörleri tasarlanmıştır [31]. Bahsedilen bu çalışmalar sürekli zaman alanında yapılmıştır, fakat ayrık zaman alanında baskın kutup bölgesi atama üzerine bu şekilde bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmada, istenilen performans kriterlerini karşılamak için kapalı çevrim sistemin kutuplarından ikisini belirlenen bir bölgeye, kalan kutupların ise baskın kutuplardan uzakta konumlanmalarını garanti altına almak için belirlenen bir bölgeye atayan ayrık zamanlı PI, PID ve PIR kontrolör parametrelerinin tespit edilmesi amaçlanmaktadır. Ayrık zaman düzleminde, baskın kutupların yerleştirileceği bölgeyi belirleyen sınır fonksiyonları aşım, yerleşme zamanı, sönüm oranı (ζ), doğal frekans (ω_n) gibi farklı performans kriterleri ile tanımlanabilir. Burada önerilen yöntemde, baskın kutupların konumlanması istenen bölge ayrık zaman düzleminde sabit yarıçaplı iki çember ve sabit bir sönüm oranı eğrisi yardımıyla, kalan kutupların konumlanması istenen bölge ise sabit yarıçaplı bir çember yardımıyla belirlenmiştir ve kapalı çevrim sistemin kutupları için sınır fonksiyonları oluşturulmuştur. Daha sonra, sınır fonksiyonları kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi yardımıyla parametre düzlemine aktararak, ayrık PID ve PIR kontrolörler için, kontrolörün parametrelerinden biri sabit seçilerek ($K_p = k_p^*$) aynı adımlar diğer parametreler için uygulanarak ve parametre düzleminde kapalı çevrim sistemin için gereken baskın kutup çiftini baskın bölgedeki istenilen bölgeye yerleştiren ayrık zamanlı kontrolör parametre seti elde edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümde, kapalı çevrim sistemin kutupları için sınır fonksiyonlarının belirlenmesi, daha sonra ise baskın kutup bölgesi atama probleminin çözümü için ayrık zamanlı PI, PID ve PIR kontrolörler için verilmiştir. Üçüncü bölümde, ayrık PI, PID ve PIR kontrolörler için önerilen yöntem örnekler üzerinden anlatılmıştır. Son olarak, önerilen yöntem için bazı notlara dördüncü bölümde yer verilmiştir.

2 Baskın kutup bölgesi atama

2.1 Sınır fonksiyonlarının belirlenmesi

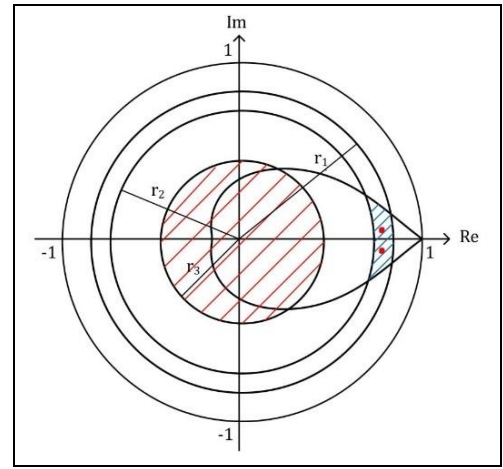
Kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarının yerleştirileceği bölgenin sınırları istenilen performans özellikleri ile belirlenir.

Burada, baskın kutup bölgesini belirlemek için iki farklı sınır fonksiyonu kullanılmaktadır. Sınır fonksiyonlarından biri, baskın kutup bölgesini ayrık düzlemde belirli yarıçaplı çember ile sınırlayan fonksiyondur. Bu fonksiyon, baskın kutupların ayrık düzlemdeki konumları $z_{1,2} = \sigma_z \pm j\omega_z$ biçiminde ifade edildiğinde, orijine olan uzaklıkları (r) kullanılarak belirlenen çemberleri temsil eder ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1)$$

Ayrıca, belirlenen bölgedeki kapalı çevrim sistem kutuplarının baskınlığını garanti altına almak için kalan kutuplar da yine belirli yarıçaplı bir çemberin içine yerleştirilebilir.

Diğer sınır fonksiyon ise, ayrık zamandaki ζ eğrisi yardımıyla oluşturulur. Sonuç olarak, kapalı çevrim kutupları ayrık düzlemde Şekil 1'de gösterilen bölgeler içine atanır.



Şekil 1. Kapalı çevrim sistem kutuplarının konumları.

Figure 1. Location of closed-loop system poles.

Fakat, ζ eğri denkleminin sınır fonksiyonu olarak kullanılmasını matematiksel olarak daha basitleştirmek için, ζ eğrisi yerine sınır fonksiyonu olarak kullanılacak bir eğri uydurulmasının kullanılması problemin çözümünü kolaylaştıracağından önerilen bu yöntem problemin çözümü için daha mantıklı bir yaklaşım olarak görülmektedir. Problemin bu şekilde çözümünü kolaylaştırmak için Şekil 1'de gösterilen ayrık düzlemdeki ζ eğrilerini çemberler arasında değişimini en iyi temsil edebilecek fonksiyonlardan birisinin aşağıda verilen fonksiyonun olduğu belirlenmiştir.

$$y = f(x) = A \cos(wx) \quad (2)$$

Performans kriteri olarak seçilen ζ eğrisin tespit edilen fonksiyonla ile temsil edilebilmesi için, ilk olarak belirlenen yarıçaplar yardımıyla, σ_z aralığı hesaplanır. Daha sonra, ilgili ζ eğrisine en yakın fonksiyonu üretecek olan A ve w katsayıları eğri uydurma yöntemiyle (mesela MATLAB programında fit komutu kullanılarak) kolayca hesap edilebilir. İlgili ζ eğrisini temsil eden denklem diğer nümerik yöntemler kullanılarak da belirlenebilir.

2.2 Ayrık zamanlı PI kontrolör ile kutup bölgesi atama

Doğrusal ve zamanla değişmeyen, bir sistemin ayrık zamandaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)} \quad (3)$$

Ayrık zamanlı PI kontrolöre ilişkin transfer fonksiyon ise;

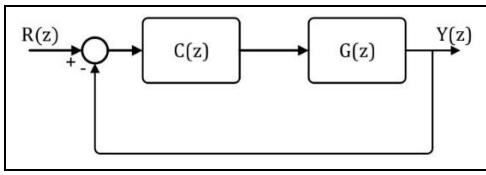
$$C_{PI}(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} \quad (4)$$

biçiminde yazılır.

Şekil 2'de verilen kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi;

$$P_c(z) = 1 + C_{PI}(z)G(z) = 0 \quad (5)$$

olarak ifade edilir. Baskın kutupları istenilen bölgeye yerleştirmek için elde edilen sınır fonksiyonları sırasıyla Denklem (5)'te verilen kapalı çevrim sisteminin karakteristik denkleminde $z = x + jf(x)$ olarak yerine konulur.



Şekil 2. Kapalı çevrim sistemin kontrol yapısı.

Figure 2. Control structure of the closed-loop system.

$$P_c(x + jf(x)) = N_G \left((x + jf(x))(K_i + K_p) - K_p \right) + D_G(x + jf(x) - 1) \quad (6)$$

Daha sonra, Denklem (6)'daki karakteristik denklem reel ve sanal kısımlarına ayrılır.

$$Re[P_c(x + jf(x))] = 0 \quad (7)$$

$$Im[P_c(x + jf(x))] = 0 \quad (8)$$

Denklem (7) ve (8) birlikte çözdürüldüğünde, ayrık PI kontrolörün K_p ve K_i parametreleri x' e bağlı olarak elde edilir. Daha sonra, kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarının konumlanması istenen bölgeyi oluşturan sınır fonksiyonlarının keşimlerinden karakteristik denkleminde yerine koyulan sınır fonksiyonun sınırları hesaplanır. Bu sınır değerleri (x_1, x_2, \dots) , PI kontrolör parametrelerinde yerine konularak sınır fonksiyonunun sağladığı bölge $K_p - K_i$ düzlemine aktarılır. Bu şekilde, belirlenen bütün sınır fonksiyonları Denklem (6)'da yerine konulur ve PI kontrolörün parametre düzlemine tek tek aktarılır. Böylelikle, kapalı çevrim sistemin baskın kutup çiftini baskın bölgedeki istenilen bölgeye yerleştiren ayrık PI kontrolör parametre seti elde edilmiş olur.

Diğer taraftan, kapalı çevrim sistemin kalan kutuplarını baskın kutuplardan uzağa yerleştirmek ve baskın kutup atamayı garanti altına almak için de bir sınır fonksiyonu belirlenebilir. Bu sınır fonksiyonu da yarıçapı belirlenen bir çember denklemini ile oluşturulur ve kalan kutupların yerleştirilmesi istenen bölge aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r \leq 1, r \in \mathbb{R}^+\} \quad (9)$$

Bu sınırlar da parametre düzlemine yukarıda anlatıldığı gibi aktarılırsa, $K_p - K_i$ düzlemindeki baskın kutuplar için oluşturulan bölge birkaç bölgeye bölünür. Bütün kapalı sistem kutuplarının belirlenen bölgeler içinde kaldığı alt bölge çözüm kümesini (boş küme olmadığı sürece) verir.

2.3 Ayrık zamanlı PID ve PIR kontrolör ile kutup bölgesi atama

Ayrık zamanlı PID kontrolörün transfer fonksiyonu

$$C_{PID}(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z} \quad (10)$$

ve ayrık zamanlı PIR kontrolöre ilişkin transfer fonksiyon ise

$$C_{PIR}(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} - K_r z^{-h} \quad (11)$$

olarak ifade edilebilir.

Ayrık PIR kontrolör için, baskın kutup bölgesi atamaya yöntemine başlamadan önce h parametresi zaman gecikmesini ifade ettiği için, pozitif bir tamsayı olarak seçilir.

Baskın kutup bölgesi atama yoluyla ayrık zamanlı PID ve PIR kontrolör tasarımı, ayrık zamanlı PI kontrolör tasarımı ile neredeyse aynıdır. Ancak, PID/PIR kontrolörün bir parametresi sabit seçilmelidir. Burada, sabit bir $K_p = k_p^*$ için, verilen bütün sınır fonksiyonların sağladığı bölge $K_{d/r} - K_i$ parametre düzlemine aktarılır. Böylece, $K_p = k_p^*$ için, kapalı çevrim sistemin kutuplarını istenilen bölgelere yerleştiren ayrık PID/PIR kontrolör parametre seti bulunur. Bu yöntem istenildiği kadar geniş bir K_p aralığı için uygulanarak 2D veya 3D olarak sonuçlar elde edilebilir.

3 Tasarım örnekleri

3.1 Örnek 1 (Ayrık PI kontrolör)

Zaman gecikmesine sahip birinci mertebeden sisteme ait bir transfer fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-0.5s}$$

Örnekleme zamanı, Nyquist Shannon teoremine göre $t_s = 0.1$ sn. olarak alınmıştır. Sıfırıncı mertebeden tutucu kullanılarak, sisteme ilişkin ayrık zamandaki transfer fonksiyonu,

$$G(z) = \frac{-0.09516}{z^5(z - 0.90484)}$$

olarak elde edilmiştir.

Kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarını ayrık düzlemde istenilen bölgeye yerleştirmek için, üç sınır fonksiyonu belirlenmiştir. Bu sınır fonksiyonlarından ikisi aşağıda denklemin verilen yarıçapı 0.9 ve 0.95 olan çemberlerdir, yani baskın kutupların bu iki çember arasında olması istenmektedir.

$$f_1(x) = \sqrt{0.95^2 - x^2}$$

$$f_2(x) = \sqrt{0.9^2 - x^2}$$

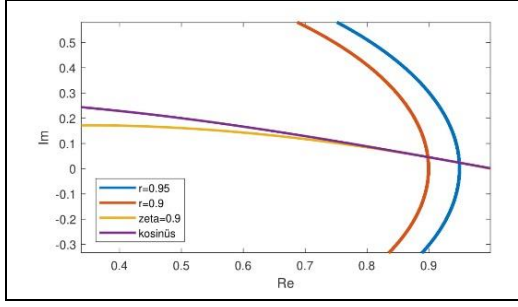
Diğer sınır fonksiyonu ise, ayrık zaman düzlemindeki $\zeta = 0.9$ eğrisini iki çember arasında temsil eden bir kosinüstür.

$$f_3(x) = 0.2824 \cos(1.5658x)$$

Bulunan kosinüs denkleminin belirlenen aralık için ilgili ζ eğrisine karşılık geldiği Şekil 3'te gösterilmiştir.

Kapalı çevrim sistemin kalan kutuplarının da yarıçapı 0.75 olan çember içinde konumlanması istenmektedir.

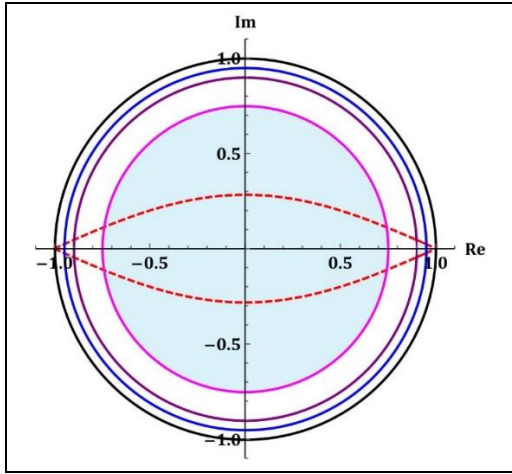
$$f_4(x) = \sqrt{0.75^2 - x^2}$$



Şekil 3. Sönüm oranı ve kosinüs eğrileri (Örnek 1).

Figure 3. Curves of damping ratio and cosine (Example 1).

Şekil 4'te kapalı çevrim sistemin baskın ve baskın olmayan kutuplarının konumlanması istenen bölgeler verilmiştir.



Şekil 4. Baskın ve baskın olmayan kutuplar için belirlenen bölgeler (Örnek 1).

Figure 4. Determined locations for dominant and nondominant poles (Example 1).

Kapalı çevrim sistemin ayrık zamanlı PI kontrolör ile karakteristik denklemi

$$P_c(z) = z^7 - 1.90484z^6 + 0.90484z^5 + (0.09516K_i + 0.09516K_p)z - 0.09516K_p$$

olarak yazılır.

Daha sonra, Şekil 5'te gösterilen baskın kutupların bölgesinin sınır fonksiyonları sırasıyla karakteristik denkleme aktarılır.

$$P_c(x + j\sqrt{0.95^2 - x^2}) = 0$$

$$P_c(x + j\sqrt{0.9^2 - x^2}) = 0$$

$$P_c(x + j0.2824 \cos(1.5658x)) = 0$$

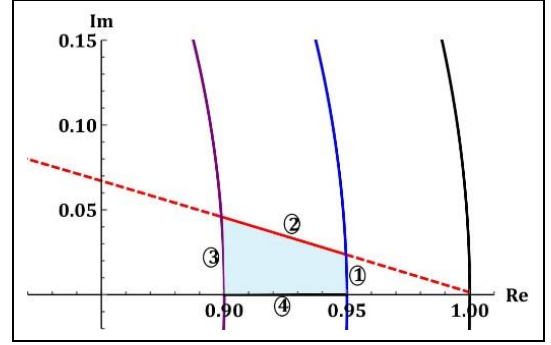
Daha sonra, her bir sınır fonksiyonu için karakteristik denklem reel ve sanal kısımlara ayrılarak kontrolör parametreleri x 'e bağlı olarak $K_p(x)$ ve $K_i(x)$ şeklinde bulunur. Birinci sınır fonksiyonu için,

$$\operatorname{Re} \left(P_c(x + j\sqrt{0.95^2 - x^2}) \right) = 0 \Rightarrow K_p(x) \& K_i(x)$$

$$\operatorname{Im} \left(P_c(x + j\sqrt{0.95^2 - x^2}) \right) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu sınır fonksiyonu için, Şekil 5'deki 1. bölgede sanal eksenden bir sınırlanma mevcuttur ve bu sınır $f(x) \in (0, 0.02362)$ olarak kolayca bulunabilir. Daha sonra, bu

sınır K_p ve K_i parametrelerinde yerine konularak $K_p - K_i$ parametre düzlemine aktarılır.

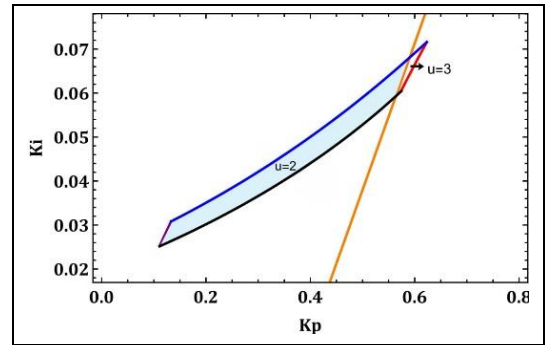


Şekil 5. Baskın kutupların bölgesinin sınırları (Örnek 1).

Figure 5. Boundaries of the dominant poles region (Example 1).

Şekil 5'te numaralandırılan diğer bölgeler için de sınır fonksiyonlarının kesişim noktaları belirlenir. 3. bölge için sınır $f(x) \in (0, 0.04594)$ iken, 2. ve 4. bölgeler için ilgili sınırla sırasıyla $x \in (0.89883, 0.94971)$ ve $x \in (0.9, 0.95)$ 'dir. Daha sonra, bütün sınır fonksiyonları ve reel eksen üzerindeki sınır çizgisi için aynı prosedür uygulanarak $K_p - K_i$ parametre düzlemine aktarılır.

Kapalı çevrim sistemin kalan kutupları için de verilen sınır fonksiyonu için aynı adımlar ile sınırlar Şekil 6'da gösterilen parametre düzleminde elde edilir.



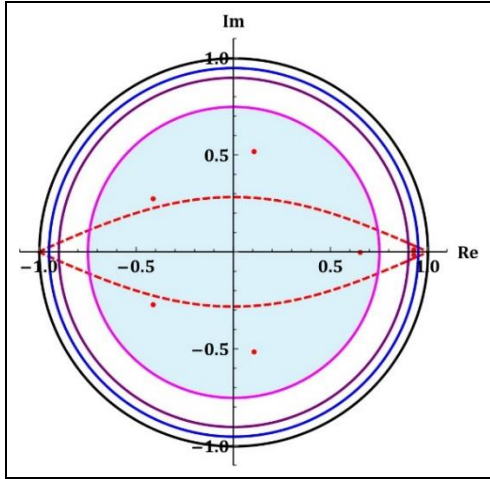
Şekil 6. Parametre düzlemindeki ilgili alt bölgeler (Örnek 1).

Figure 6. Relevant subregion in parameter plane (Example 1).

Baskın olmayan kutuplar için yazılan sınır fonksiyonu parametre uzayında baskın kutupların oluşturduğu bölgeyi bölerek alt bölgeler oluşturur. Şekil 6'daki açık mavi ile gösterilen bölge istenilen çözüm bölgesini oluşturur. Diğer bir deyişle, ayrık PI kontrolör parametreleri elde edilen bölgeden seçilirse, kapalı çevrim sistemin kutuplarından ikisi istenen baskın bölgeye atanırken ($u = 2$), kalan kutuplar 0.75 yarıçaplı çemberin içine yerleştirilir.

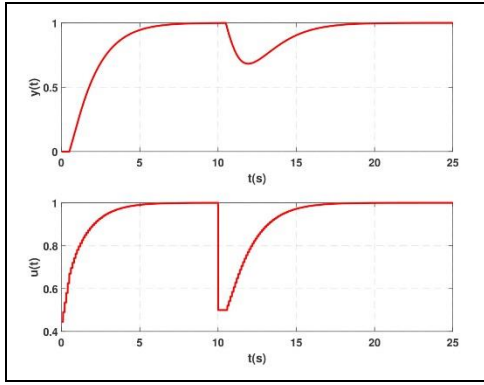
Örnek olarak, ayrık PI kontrolör parametreleri $K_p = 0.4$ ve $K_i = 0.045$ olarak seçildiğinde, kapalı çevrim sistemin kutupları ayrık düzlemde Şekil 7'deki gibi elde edilir.

Kapalı çevrim sistemin ayrık PI kontrolör ile basamak yanıtı ve kontrol işareti Şekil 8'de verilmiştir. Basamak yanıtından da anlaşılacağı gibi, kapalı çevrim sistemi 6.28 sn.'de aşısız bir şekilde oturmaktadır. Bu da daha önceden sağlanması istenilen performans kriterlerini sağlamaktadır. Kontrol işareti de uygun ve istenilen sınırlardadır.



Şekil 7. Kapalı çevrim sistemin ayrık PI ile kutup dağılımı (Örnek 1).

Figure 7. Distribution of the closed-loop system poles with PI controller (Example 1).



Şekil 8. Kapalı çevrim sistemin basamak yanıtı ve kontrol işaretini (Örnek 1).

Figure 8. Step response and control signal of the closed-loop system (Example 1).

3.2 Örnek 2 (Ayrık PID kontrolör)

Örnek 1'de verilen sistem için ayrık zamanlı PID kontrolör ile baskın kutup bölgesi atama yapılmak istenilirse, kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi

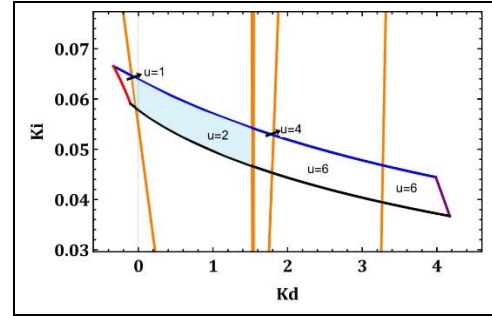
$$P_c(z) = z^8 - 1.9048z^7 + 0.9048z^6 + 0.0952(K_d + K_i + K_p)z^2 - 0.09516K_pz - 0.19032K_dz + 0.09516K_d$$

şeklinde olur. Bu noktada, kontrolörün bir parametresi sabit olarak seçilir. $K_p = 0.55$ için, kontrolörün parametreleri x 'e bağlı olarak $K_i(x)$ ve $K_d(x)$ olarak bulunur. Şekil 5'deki numaralandırılan bölgeler için bulunan sınırlar $K_i(x)$ ve $K_d(x)$ 'de yerine yazılarak $K_d - K_i$ parametre düzlemine aktarılır ve kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarını istenilen bölgeye yerleştiren ayrık PID kontrolör seti elde edilmiş olur.

Kalan kutuplar için verilen sınır fonksiyonu için de aynı adımlar ile parametre düzlemine aktarıldığında, elde edilen bölge alt bölgelere ayrılır.

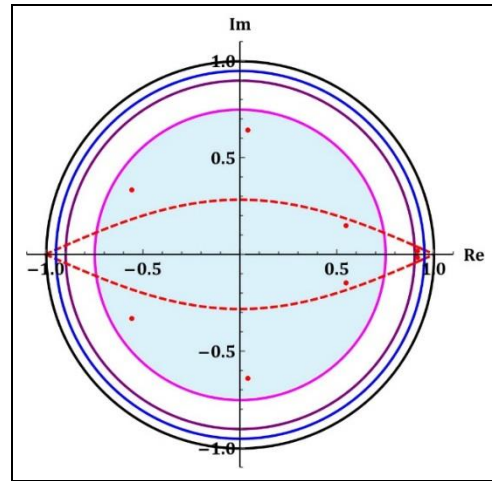
Şekil 9'daki açık mavi ile gösterilen bölge istenilen çözüm bölgesini oluşturur. Diğer bir deyişle, ayrık PID kontrolör parametreleri $K_p = 0.55$ için elde edilen bölgeden seçilirse, kapalı çevrim sistemin kutupları istenilen bölgelere yerleştirilebilir. Örneğin, ayrık PID kontrolör parametreleri

$K_p = 0.55$, $K_d = 0.5$ ve $K_i = 0.055$ için, kapalı çevrim sistemin kutupları ayrık düzlemde Şekil 10'daki gibi elde edilir.



Şekil 9. $K_p = 0.55$ için parametre düzlemindeki ilgili alt bölgeler (Örnek 1).

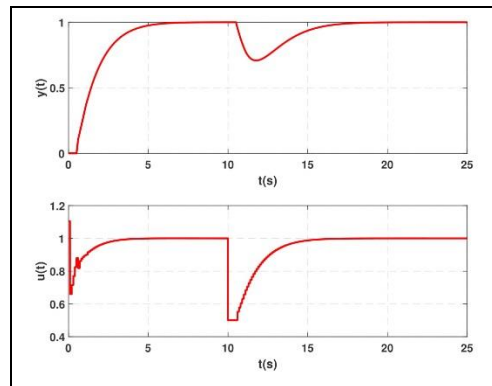
Figure 9. Relevant subregion in parameter plane for $K_p = 0.55$ (Example 1).



Şekil 10. $K_p = 0.55$ için kapalı çevrim sistemin ayrık PID ile kutup dağılımı (Örnek 2).

Figure 10. Distribution of the closed-loop system poles with PID controller for $K_p = 0.55$ (Example 2).

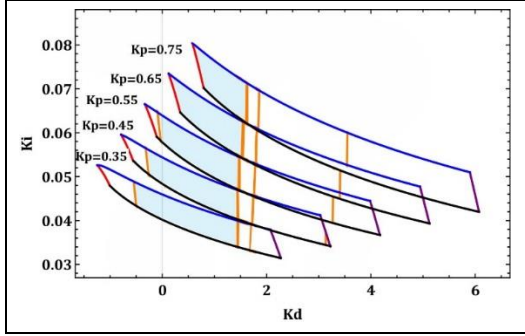
Seçilen parametreler ile kapalı çevrim sistemin basamak yanıtı ve kontrol işaretini Şekil 11'de verilmiştir. Benzetim sonuçlarına göre, kapalı çevrim sistemi 5.5 sn.'de bir şekilde oturmaktadır.



Şekil 11. Kapalı çevrim sistemin basamak yanıtı ve kontrol işaretini (Örnek 2).

Figure 11. Step response and control signal of the closed-loop system (Example 2).

K_p parametresinin farklı değerleri için elde edilen $K_d - K_i$ parametre düzlemindeki bölgeler Şekil 12'de gösterilmiştir.



Şekil 12. Farklı K_p 'ler için parametre düzlemindeki ilgili alt bölgeler (Örnek 2).

Figure 12. Relevant subregions in parameter plane for different K_p values (Example 2).

Şekil 12'de görüldüğü gibi, farklı K_p değerleri için parametre düzlemindeki bölgeler de farklılık göstermektedir.

3.3 Örnek 3 (Ayrık PIR kontrolör)

Zaman gecikmeli birinci mertebeden sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-0.3s}$$

Örnekleme zamanı $t_s = 0.1$ sn. için, sistemin ayrık zamandaki ilgili transfer fonksiyonu

$$G(z) = \frac{0.09516}{z^3(z - 0.90484)}$$

şeklinde dir.

Kapalı çevrim sistemin baskın kutup çiftini ayrık düzlemde istenilen bölgeye yerleştirecek üç sınır fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{0.95^2 - x^2} \\ f_2(x) &= \sqrt{0.85^2 - x^2} \\ f_3(x) &= 0.4117 \cos(1.5592x) \end{aligned}$$

Verilen sınır fonksiyonlarından ikisi çember, biri ise bu iki çember arasında kalan $\zeta = 0.8$ eğrisini temsil eden kosinüs denklemdir. Ek olarak, kapalı çevrim sistemin kalan kutuplarının da içinde olması istenen sınır fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f_4(x) = \sqrt{0.6^2 - x^2}$$

Ayrık PIR kontrolörün gecikme parametresi $h = 1$ olarak seçildiğinde, kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} P_c(z) &= z^6 - 1.9048z^7 - 1.9048z^5 + 0.9048z^4 \\ &+ 0.09516(K_i + K_p)z^2 - 0.09516(K_p + K_r)z \\ &- 0.19032K_d z + 0.09516K_r \end{aligned}$$

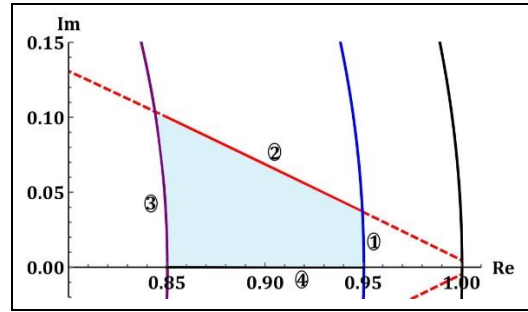
Şekil 13'de numaralandırılan baskın kutupların bölgesini belirten sınır fonksiyonları karakteristik denkleme sırasıyla aktarılır. Örnek olarak, 2 ile numaralandırılan bölgenin karakteristik denkleme aktarıldığı gösterildiğinde, denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_c(x + j0.4117 \cos(1.5592x)) = 0$$

Daha sonra, kontrolörün sabit parametresi $K_p = 1$ olarak seçilir ve karakteristik denklemde yerine yazılır. Böylece, denklemde bilinmeyen parametreler K_i , K_r ve x olarak kalır. Ayrık PIR kontrolöre ilişkin parametreler K_i ve K_r 'nin bulunması için karakteristik denklem reel ve sanal kısımlarına ayrılır.

$$\begin{aligned} \text{Re}(P_c(x + j0.4117 \cos(1.5592x))) &= 0 \\ \text{Im}(P_c(x + j0.4117 \cos(1.5592x))) &= 0 \Rightarrow K_r(x) \text{ \& } K_i(x) \end{aligned}$$

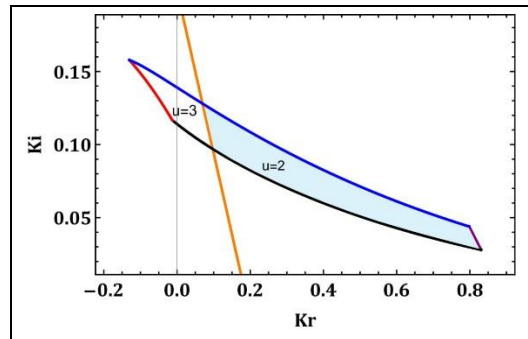
Elde edilen iki denklem birlikte çözdürüldüğünde, kontrolör parametreleri x cinsinden bulunmuş olur. Daha sonra, x 'in alacağı değerleri bulmak için 2. bölgenin 1 ve 3 ile olan kesişim noktaları hesaplanır. Buradan da 2. bölgenin sınırları $x \in (0.84361, 0.94927)$ olarak bulunur. Bu x değerleri da $K_i(x)$ ve $K_r(x)$ 'de yerine konularak $K_i - K_r$ parametre düzleminde aktarılır.



Şekil 13. Baskın kutupların bölgesinin sınırları (Örnek 3).

Figure 13. Boundaries of the dominant poles region (Example 3).

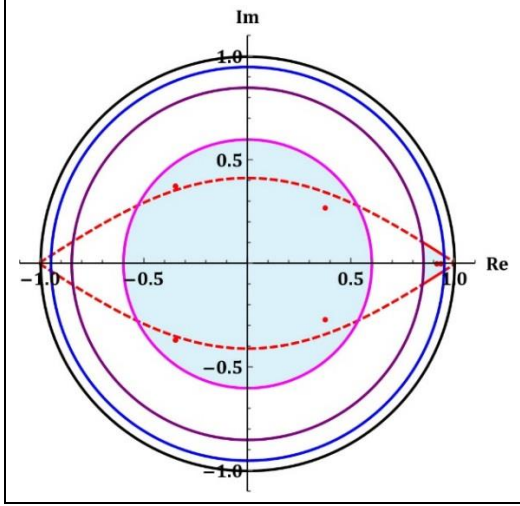
Şekil 13'te numaralandırılan 1, 3 ve 4. bölgeler için de sınırlar sırasıyla $f(x) \in (0, 0.0373)$, $f(x) \in (0, 0.10402)$ ve $x \in (0.85, 0.95)$ olarak bulunur. Bu bölgeler için de aynı prosedür uygulanarak sınır fonksiyonları $K_r - K_i$ parametre uzayına aktarılır. Ayrıca, kalan kutupların yerleştirilmesi istenen sınır fonksiyonu da karakteristik denklemde yerine konularak parametre düzleminde aktarılır. Bu sınır fonksiyonu baskın kutuplar için verilen sınır fonksiyonlarının oluşturduğu bölgeyi alt bölgelere ayırır. Bu alt bölgeler, kutupların baskın veya baskın olmayan bölgelerdeki sayısına göre farklılık gösterir. Sonuç olarak, verilen bütün sınır fonksiyonları ile elde edilen $K_r - K_i$ düzlemi Şekil 14'te gösterilmiştir.



Şekil 14. $K_p = 1$ için parametre düzlemindeki ilgili alt bölgeler (Örnek 3).

Figure 14. Relevant subregion in parameter plane for $K_p = 1$ (Example 3).

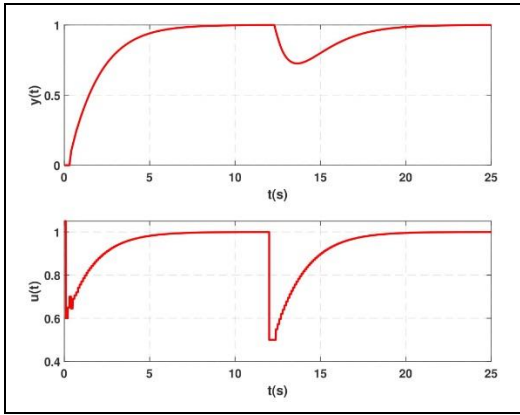
Burada, açık mavi ile gösterilen bölge istenilen çözüm bölgesini ($u = 2$) oluşturur. Ayrık PIR kontrolör parametreleri $K_p = 1$ için elde edilen bölgeden seçilirse, kapalı çevrim sistemin kutuplarından ikisi sınır fonksiyonları ile belirlenen baskın bölgeye atanırken, kalan kutuplar 0.6 yarıçaplı çemberin içine yerleştirilir. Bu bölgeden kontrolörün diğer parametreleri $K_r = 0.5$ ve $K_i = 0.05$ olarak seçilirse, kapalı çevrim sistemin kutupları ayrıık düzlemde Şekil 15'deki gibi yerleşir.



Şekil 15. $K_p = 1$ için kapalı çevrim sistemin ayrıık PIR ($h = 1$) ile kutup dağılımı (Örnek 3).

Figure 15. Distribution of the closed-loop system poles with PIR controller ($h = 1$) for $K_p = 1$ (Example 3).

Seçilen parametreler ile kapalı çevrim sistemin basamak yanıtı ve kontrol işareti Şekil 16'da verilmiştir. Benzetim sonuçlarına göre, sistem aşısız bir şekilde 6.5 sn.'de yerleşmiştir, bu da istenilen performans kriterlerini karşılamaktadır.

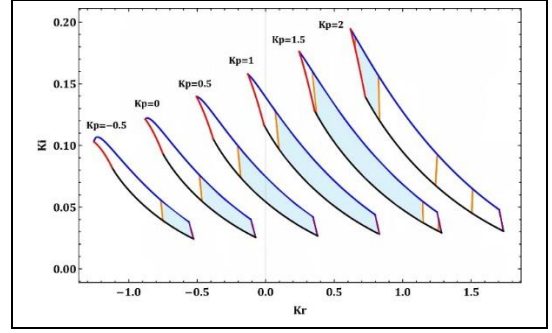


Şekil 16. Kapalı çevrim sistemin basamak yanıtı ve kontrol işareti (Örnek 3).

Figure 16. Step response and control signal of the closed-loop system (Example 3).

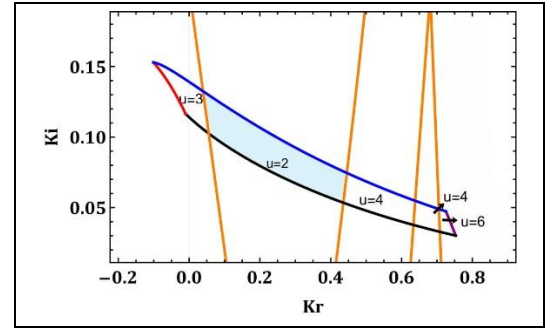
Farklı K_p değerleri için $K_r - K_i$ parametre uzayındaki bölgeler farklılık gösterir. Örnek olarak, birkaç farklı K_p için bölgeler Şekil 17'de gösterilmiştir.

Ayrıık PIR kontrolörün gecikme parametresinin değeri değiştirilirse elde edilen çözüm kümesi de değışir. $h = 2$ ve $h = 3$ için, sabit $K_p = 1$ ile elde edilen parametre uzayları sırasıyla Şekil 18 ve 19'da verilmiştir.



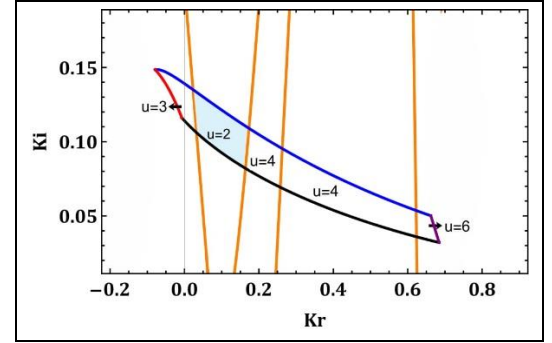
Şekil 17. Farklı K_p 'ler için parametre düzlemindeki ilgili alt bölgeler (Örnek 3).

Figure 17. Relevant subregions in parameter plane for different K_p values (Example 3).



Şekil 18. $h = 2$ için elde edilen çözüm kümesi ($K_p = 1$) (Örnek 3).

Figure 18. Solution set for $h = 2$ ($K_p = 1$) (Example 3).



Şekil 19. $h = 3$ için elde edilen çözüm kümesi ($K_p = 1$) (Örnek 3).

Figure 19. Solution set for $h = 3$ ($K_p = 1$) (Example 3).

Şekillerde görüldüğü gibi, h parametresinin değeri arttıkça $K_r - K_i$ parametre düzlemindeki çözüm kümeleri daralır. h 'nin çok büyük değerlerinde çözüm kümesinin boş küme de olabileceği unutulmamalıdır.

4 Sonuç

Bu çalışmada, ayrıık zamanlı PI, PID ve PIR kontrolörler ile baskın kutup bölgesi atama probleminin çözümüne odaklanılmıştır. Bunun için, belirli değerler arasında belirlenen performans kriterlerini karşılayan kapalı çevrim sistemin iki kutbu belirlenen bölgeye atanır. Böylece, kapalı çevrim sistemin minimum ve maksimum istenen değerler arasındaki zaman özelliklerini karşılaması sağlanır. Ayrıca, belirlenen bölgeye atanan kapalı çevrim sistem kutup çiftinin baskınlığını

garantiye almak için kalan kutuplar önceden belirlenen bölgeye atanır. Burada, kutupların atanması istenen bölgeler çemberler ve sönüm oranı eğrisi yardımıyla belirlenir. Bu sınırlar yardımıyla parametre düzlemine geçiş sağlanır. Böylece, kapalı çevrim sistemin kutuplarını istenilen bölgelere yerleştiren ayrık zamanlı kontrolör parametre seti elde edilmiş olur. Ayrık PID ve PIR kontrolörlerde PI kontrolör tasarımından farklı olarak, kontrolörün bir parametresi sabit seçilerek ($K_p = k_p^*$) parametre düzleminde çözüm kümesi bulunur. Ek olarak, ayrık PIR için, gecikme parametresi h pozitif tam sayı olarak önceden belirlenir ve farklı h değerleri için elde edilen çözüm kümesi de değişir.

Kapalı çevrim sistemin kalan kutupları, özellikle sistemin transfer fonksiyonunun derecesi çok yüksek ise, baskın kutupların bölgesinden her zaman uzağa yerleştirilemeyebilir. Ayrık PI, PID ve PIR kontrolörler kapalı çevrimde yalnızca sınırlı sayıda kutup atayabildiğinden, parametre düzleminde bulunan çözüm kümesi boş küme olabilir. Bu nedenle, istenilen kutup konfigürasyonunu sağlayan herhangi bir alt bölge yoksa performans kriterleri ve/veya amaçlanan baskınlık faktörü değiştirilerek tasarım sürecinin tekrarlanması gerektiğini belirtmekte fayda vardır.

5 Conclusion

In this study, it is focused on the solution of the dominant pole region assignment problem with discrete time PI, PID and PIR controllers. For this, two poles of the closed-loop system that meet the performance criteria determined between certain values are assigned to a specified region. Thus, it is ensured that the closed-loop system has the time domain characteristics between the minimum and maximum desired values. Also, to ensure the dominance of the closed-loop system pole pair which is assigned to the designated region, the remaining poles are assigned to another predetermined region. The regions where the poles are to be located are determined in the discrete time domain by the help of circles and a fixed damping ratio curve. Then, by the help of the specified boundaries, a transition to the parameter plane is used. Thus, a discrete time controller parameter set that places the poles of the closed-loop system in the desired regions is obtained. Unlike the PI controller design in discrete PID and PIR controllers, a parameter of the controller is fixed ($K_p = k_p^*$) and there is a solution set in the two-dimensional parameter plane. In addition, for the discrete PIR, the delay parameter h must be pre-determined as a positive integer. As can be seen from the example given, when the value of h changes, the obtained solution set also changes.

The remaining poles of the closed-loop system may not always be located as further away from the region of the dominant poles as desired, especially if the order of transfer function of the system is too high. Since discrete PI, PID and PIR controllers can only assign a limited number of poles in closed-loop, the solution set in the parameter plane can be an empty set. Therefore, it is worth noting that if there is no sub-region that provides the desired pole configuration, the design procedure should be repeated by changing the performance criteria and/or the target dominance factor.

6 Yazar katkı beyanı

Gerçekleştirilen çalışmada Ayşe DUMAN MAMMADOV yöntem geliştirme ve ilk taslağın oluşturulması; Emre DİNCEL önerilen yöntemin yazılım ve simülasyon çalışmaları ile elde edilen sonuçların incelenmesi başlıklarında; Mehmet Turan

SÖYLEMEZ yazım denetimi ve içerik açısından makalenin kontrol edilmesi başlıklarında katkı sunmuşlardır.

7 Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur.

Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

8 Kaynaklar

- [1] Åström KJ, Murray RM. *Feedback Systems: An Introduction For Scientists And Engineers*. New Jersey, USA, Princeton University, 2010.
- [2] Halder K, Das S, Gupta A. "Time delay handling in dominant pole placement with PID controllers to obtain stability regions using random sampling". *International Journal of Control*, 94(12), 3384-3405, 2020.
- [3] Wang H, Han QL, Liu J, He D. "Discrete-time filter proportional-integral-derivative controller design for linear time-invariant systems". *Automatica*, 116, 1-15, 2020.
- [4] Das S, Halder K, Gupta A. "Delay handling method in dominant pole placement based PID controller design". *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 16(2), 980-991, 2019.
- [5] Dinçel E, Mutlu İ, Schrödel F, Söylemez MT. "Further results on dominant pole placement via stability mapping approach". *IFAC-PapersOnLine*, 51(4), 918-923, 2018.
- [6] Das S, Halder K, Gupta A. "Performance analysis of robust stable PID controllers using dominant pole placement for SOPTD process models". *Knowledge-Based Systems*, 146, 12-43, 2018.
- [7] Srivastava S, Misra A, Sarkar A. "Analysis design of robust pid controller with dominant pole placement approach". *2019 6th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)*, Noida, India, 7-8 March 2019.
- [8] Wang QG, Zhang Z, Astrom KJ, Zhang Y, Zhang Y. "Guaranteed dominant pole placement with PID controllers". *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 5842-5845, 2008.
- [9] Dinçel E, Söylemez MT. "Limitations on dominant pole pair selection with continuous PI and PID controllers". *2016 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Saint Julian's, Malta, 20 October 2016.
- [10] Ang KH, Chong G, Li Y. "PID control system analysis, design, and technology". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(4), 559-576, 2005.
- [11] Hägglund T. "The one-third rule for PI controller tuning". *Computers & Chemical Engineering*, 127, 25-30, 2019.
- [12] Grimholt C, Skogestad S. "Optimal PI and PID control of first-order plus delay processes and evaluation of the original and improved SIMC rules". *Journal of Process Control*, 70, 36-46, 2018.
- [13] O'Dwyer A. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. 3rd ed. London, UK, Imperial College Press, 2009.
- [14] Nise NS. *Control systems engineering*. 8th ed. Pomona, USA, John Wiley & Sons, 2020.
- [15] Ribeiro JMS, Santos MF, Carmo MJ, Silva MF. "Comparison of PID controller tuning methods: analytical/classical techniques versus optimization algorithms". *In 2017 18th international Carpathian control conference (ICCC)*, Sinaia, Romania, 7 July 2017.

- [16] Bharat S, Ganguly A, Chatterjee R, Basak B, Sheet DK, Ganguly A. "A Review on tuning methods for PID controller". *Asian Journal For Convergence In Technology (AJCT)*, 5(1), 1-4, 2019.
- [17] Bucz Š, Kozáková A. *Advanced Methods of PID Controller Tuning for Specified Performance*. Editor: Shamsuzzoha M. PID Control Industrial Process, 73-119, London, UK, IntechOpen, 2018.
- [18] Kharitonov VL, Niculescu SI, Moreno J, Michiels W. "Static output feedback stabilization: Necessary conditions for multiple delay controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1), 82-86, 2005.
- [19] Niculescu SI, Michiels W. "Stabilizing a chain of integrators using multiple delays". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(5), 802-807, 2004.
- [20] Swisher GM, Tenqchen S. "Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second-and third-order systems". In *1988 American Control Conference*, Atlanta, GA, USA, 15-17 June 1988.
- [21] Galip Ulsoy A. "Time-Delayed control of siso systems for improved stability margins". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(4), 1-12, 2015.
- [22] Villafuerte R, Mondie S, Garrido R. "Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3), 983-990, 2013.
- [23] Ramírez A, Mondié S, Garrido R. "Proportional Integral Retarded control of second order linear systems". In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Firenze, Italy, 10-13 December 2013.
- [24] Ramírez A, Garrido R, Mondié S. "Velocity control of servo systems using an integral retarded algorithm". *ISA Transactions*, 58, 357-366, 2015.
- [25] Ramírez A, Mondié S, Garrido R, Sipahi R. "Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(6), 1688-1693, 2015.
- [26] López K, Mondié S, Garrido R. "A tuning procedure for the Cascade Proportional Integral Retarded Controller". *IFAC-PapersOnLine*, 51(14), 61-65, 2018.
- [27] Koh M, Ramírez A, Sipahi R. "Single-Delay proportional-retarded (PR) protocols for fast consensus in a multi-agent system". *IFAC-PapersOnLine*, 51(14), 31-36, 2018.
- [28] Lpez K, Garrido R, Mondie S. "Position control of servodrives using a Cascade Proportional Integral Retarded controller". In *2017 4th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Barcelona, Spain, 5-7 April 2017.
- [29] Ramirez A, Sipahi R. "Fast Consensus Against Noise in a Large-Scale Multi-Agent System with Distributed Proportional-Retarded (PR) Controllers". In *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, Milwaukee, WI, USA, 27-29 June 2018.
- [30] Kang HII. "Design of dominant pole region assignment with PID controllers". In *2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, Changsha, China, 11-12 May 2010.
- [31] Dincel E, Söylemez MT. "Dominant pole region assignment with continuous PI and PID controllers". In *2017 10th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)*, Bursa, Turkey, 30 November-2 December 2017.