DOI: 10.5961/highereduscı.1197423

İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Kanıt Şemalarının İncelenmesi

Examination of Proof Schemes of Elementary Mathematics Teachers

Funda KURTTEKİN, Mustafa AKINCI

ÖZ

Çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmenlerinin kullandıkları kanıt şemalarını belirlemektir. Nitel araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışma, durum çalışmasıdır. Çalışmanın araştırma grubunu oluşturan, dört ilköğretim matematik öğretmeninin seçiminde; amaçlı örnekleme yöntemi olan kolay ulaşılabilir örnekleme yönteminden yararlanılmıştır. Çalışmanın verileri, görev temelli görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Görev temelli görüşmeler, çalışma kâğıdı ve kanıt süreçlerine ait soru formundan oluşmaktadır. Veri toplama araçlarının geçerlilik ve güvenirliğini sağlamak amacıyla pilot uygulama yapılmış, veri toplama araçları; pilot uygulama sonuçları, uzman görüşleri ve yapılan çalışmalar dikkate alınarak son hâlini almıştır. Öğretmenlerin sahip oldukları kanıt şemaları Harel ve Sowder'in kanıt şemaları kavramsal çerçevesine göre belirlenmiştir. Elde edilen bulguların analizinde, nitel veri analizi olan betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Çalışmanın sonuçları incelendiğinde, öğretmenlerin doğrulamalarında üç temel kategorideki dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait özelliklere rastlanırken, alt kategorilerde bulunan dışsal otoriter ve sembolik kanıt şemalarına ait özelliklere rastlanmamıştır. Öğretmenlerin bazı kanıtlamalarında birden fazla şemaya ait özellikler sergiledikleri görülmüştür. Ayrıca en fazla kullanılan şema analitik dönüşümsel kanıt şeması olmuştur. Kanıtlamada en üst basamak olarak karşımıza çıkmakta olan analitik kanıt şemaları, ağırlıklı kullanılmasına rağmen öğretmenlerin kendilerini ifade etme konusunda çekimser bir tavır sergiledikleri ve kanıta ait bilgilerinde eksikler olduğu görülmüştür. Çalışmanın sonuçlarına bağlı olarak bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kanıt, Kanıt şemaları, İlköğretim matematik öğretmenleri

ABSTRACT

The purpose of this study is to identify the proof schemes employed by elementary mathematics teachers. This is a case study which employs the qualitative research methodology. The convenience sampling method, one of the types of purposive sampling method, was used to select the participants of the study. The data were collected by using task-based interviews which consist of worksheets and a test including proof processes related items A pilot study was made to ensure the validity and reliability of the data collection tools. The data collection tools were prepared by taking into account the results of the pilot study, expert opinions and studies carried out. Elementary mathematics teachers' proof schemes were investigated based on Harel and Sowders's proof schemes. In the analysis of the findings, the descriptive analysis method which was one of the types of qualitative analyses was used to analyze the data. Results showed

Kurttekin F., & Akıncı M. (2023). İlköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt şemalarının incelenmesi. *Yükseköğretim ve Bilim Dergisi/Journal of Higher Education and Science, 13*(2), 245-262. https://doi.org/10.5961/higheredusci.1197423

Funda KURTTEKİN
ORCID ID: 0000-0003-4474-6077

Matematik Öğretmeni, Kızılcapınar Ortaokulu, Zonguldak, Türkiye
Mathematics Teacher, Kizilcapinar Secondary School, Zonguldak, Türkiye

Mustafa AKINCI (✉)
ORCID ID: 0000-0003-2096-7617

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Zonguldak, Türkiye
Zonguldak Bülent Ecevit University, Ereğli Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Zonguldak, Türkiye
mustafa.akinci@beun.edu.tr

Geliş Tarihi/*Received* : 31.10.2022
Kabul Tarihi/*Accepted* : 29.05.2023

the characteristics of external, experimental and analytical proof schemes in three basic categories in teachers' verifications were observed while the characteristics of external authoritarian and symbolic proof schemes in the sub-categories were not encountered. It was seen that teachers performed characteristics based on more than one schema in some of the items. In addition, the most frequently used scheme was the analytical transformational proof scheme. It is concluded that teachers lack confidence in their ability to articulate themselves and have deficiencies in their knowledge of proof despite the analytical proof schemes were employed frequently which were at the highest level in proof. Some recommendations are given based on the results of the study.

Keywords: Proof, Proof schemes, Elementary mathematics teacher

GİRİŞ

Kanıt bir probleme ait bulunan sonucun doğruluğunu göstermek, sonucu başkalarına aktararak görmelerini sağlamak ve bu bilgiyi ikna etmek amacıyla kullanılır (Almeida, 2003). Bell (1976) ise kanıtı üç farklı anlamla açıklamıştır. Bunlar bir problemin ya da durumun doğruluğunun ya da yanlışlığının test edilmesi, doğru ise neden doğru; yanlış ise neden yanlış olduğunun belirtilmesi, ardından doğruluğunu kabul ettiğimiz ifadelerin sonuçlarını tümdengelim şeklinde düzenleyip sistemleştirilmesi olarak tanımlamıştır.

Matematiğin temelini oluşturan kanıt (Mingus & Grassl, 1999), matematik öğreniminde ve öğretiminde önemli bir yere sahip olduğu birçok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır (Erdoğan & Özdemir Erdoğan, 2013; Hanna & de Villiers, 2008; Tall, 1998; Yeşildere & Türnüklü, 2007). Çünkü matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yolu olarak karşımıza matematiksel kanıtlar çıkmaktadır (Tucker, 1999). Matematiksel kanıtlar, öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümü için yöntemler; stratejiler, araçlar ve kavramlar gibi önemli matematiksel ifadeler sunmaktadır (Mariotti & Balacheff, 2008). Ayrıca matematiksel kanıtlar, matematik eğitimcilerinin yaptıklarının öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (İmamoğlu, 2010). Dolayısıyla kanıtlar, matematiksel bilgileri içselleştirmeyi sağlayan önemli ve ana mekanizmalardan biri olarak görülebilir (Pala & Narlı, 2018). Çünkü kanıtlama esnasında bir teoremi açıklama, bu teoremin doğruluğunun ya da yanlışlığının neden olduğunu ifade etme; farklı mantıksal düşünme yöntemlerini ve kanıt çeşitlerini seçme ve kullanma söz konusudur (Baki, 2014). Matematiksel kanıt sayesinde öğrenciler, matematik bilgilerinin aşamalarını inşa ederek keşfedebilir (Stylianides, 2007). Yine matematik bilgileri kanıtlama sayesinde öğrenciler tarafından neden sonuç ilişkileri kurularak öğrenilebilir ve kavranabilir (Hanna, 1990). Aynı zamanda matematiğe ait bilgilerini geliştirebilir (Kitcher, 1984). Uygan, Tanışlı ve Köse (2014), kanıtın öneminin sayısız kaynakta belirtilmiş olmasına rağmen matematik eğitiminin gerçekleştirildiği sınıf ortamlarında kanıt kavramı hakkında yeterli bilgiye sahip olunmadığı, genel olarak sıkıcı bir eylem olarak ifade edildiği, herhangi bir problemin sadece sonucuna ulaşmak için kullanılan bir yöntem olarak görüldüğünü belirtmişlerdir. Dolayısıyla matematiksel kanıt, öğretim programlarının sadece belirli zamanlarında ya da belirli konularında kullanılan bir süreç olarak değil de, müfredatın bir parçası ve sınıftaki tüm öğrenciler tarafından benimsenen eğlenceli tartışmalar bütünü hâline getirilebilir. Tall (2014), matematiksel kanıtın gelişme sürecinin erken çocukluk döneminde başladığını, yaşantılarla her dönemde geliştiğini belirtmiştir. Dolayısıyla kanıt çok küçük yaşlarda bilişsel olarak sahip olunan bir özelliktir ve zamanla gelişmesi, durağan hâle gelmesi ya da gerilemesinin de bireyin yaşantılarına bağlı olduğu söylenebilir. Bu sebeple kanıt kavramının eğitim öğretim kademelerinin tümünde yer alması gerekmektedir (CadwalladerOlsker, 2007; Hanna, 2000).

Harel ve Sowder (1998), kanıtlama kavramını bir ifadenin doğrulanmasında ortaya çıkan kuşkuları ortadan kaldırabilme veya oluşturabilme amacıyla kişinin yaşadığı süreç olarak açıklamıştır. Problemi çözümleyerek, doğru anda doğru fikrin akla gelmesi ise kanıt oluşturma demektir (Selden & Selden, 2003). Harel ve Sowder (1998), kanıtlamayı "aslını anlama" ve "ikna etme" süreci olarak ifade etmiştir. Bell (1976), matematiksel kanıt bir durumun doğruluğunu gösterirken karşı tarafı ikna etme sürecinde takip edilen adımlardır. Formel bir yol olarak karşımıza çıkan matematiksel kanıt, belli bir gerekçelendirme, aynı zamanda akıl yürütme biçimidir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Matematiksel kanıt, matematik ve matematik eğitimi için önemli bir elemandır (Güven, Çelik & Karataş, 2005). Matematiksel kanıt sayesinde öğrenciler matematikçiler tarafından yapılanların ne anlam ifade ettiğini öğrenebilirler (İmamoğlu, 2010). Çünkü öğrenciler matematiğe ait kanıtlamalar sayesinde doğrulamalara ait formüllerin yeterli olmayacağını aynı zamanda formüllerin sebepleriyle açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, et al., 2005). Ancak matematiksel ifadelerin doğruluğu gösterilirken kişilerin yaptıkları açıklamalar farklılık göstermektedir. Kişilerin nasıl ikna oldukları ve etrafında bulunan kişileri nasıl ikna ettikleri üzerine yapılan açıklamalara odaklanan Harel ve Sowder bu açıklamaları kanıt şemaları teorik çerçevesinde açıklamıştır.

Kanıt şemaları üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde farklı çalışma gruplarına odaklanıldığı alanyazın incelendiğinde öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin kanıta bakış açılarını, kanıtlama süreçlerini ve kanıtı içselleştirmelerini ortaya koymaya çalışan araştırmalara rastlamak mümkündür (Almeida, 2000; Cusi & Malara, 2007; Harel & Sowder, 1998; Housman & Porter, 2003; Jones, 1997; Knuth, 2002; Recio & Godino, 2001; Solomon, 2006). Türkiye'de de kanıt süreçlerinin yaşatılmasının ve kanıt kavramının öğretime katkısı fark edilmiş pek çok araştırmacı tarafından son yıllarda çalışmalar yapılmıştır (Barak, 2018; Çontay & Paksu, 2018; Ercan, 2020; İskenderoğlu, 2003; İskenderoğlu, 2010; Keçeli-Bozdağ, 2012; Pekşen-Sağır, 2013; Zaimoğlu, 2012). Bunun yanı sıra bazı çalışmalar kanıt şemalarını özellikleriyle doğrudan betimsel şekilde incelememişlerdir. Bu çalışmalar boylamsal araştırma olan üniversite öğrencilerinin kanıt şemalarının gelişimini inceleyen (CadwalladerOlsker, 2007; Haverhals, 2011; Martin, McCrone, Bower & Dindyal, 2005; McCrone & Martin, 2004; Recio & Godino, 2001; Sowder & Harel, 2003) kanıt şemalarının farklı değişkenlerle ilişkisini bir arada inceleyen (Housman & Porter, 2003; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Stylianou, Chae & Blanton, 2006; Uygan et al., 2014) ve bulgularında kanıt şemaları ile özelliklerinden bahseden (Ellis, 2007; Grigoriadou, 2012; Harel, 2001; Harel & Rabin, 2010; Soto, 2010) deneysel araştırmalardır. İlgili alanyazın incelendiğinde birçok çalışmada (Flores, 2006; Güner, 2012; Harel, 2001; Haverhals, 2011; Housman & Porter, 2003, İskenderoğlu, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki & İskenderoğlu, 2010; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Sarı, Altun & Aşkar, 2007; Stylianou et al., 2006; Şen & Güler, 2015; Şengül & Güner 2013) öğretmen adaylarının sergiledikleri tepkilerin üç temel kategoride bulunan dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait olduğu belirlenmiştir.

Matematiksel kanıtlar, matematik ve matematik eğitimi için önemli olmasına rağmen matematiksel kanıt yapmak her seviyeden öğrenci ve matematik öğretmen adayları için zor görülmektedir (Arslan & Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun & Toluk, 2003; Coşkun, 2009). Yapılan çalışmalar öğrenci ve öğretmenlerin kanıtı anlamlandırma ve kanıtlamaya dair kavram yanılgılarına sahip olduklarını göstermektedir (Güner, 2012; Knuth, 2002; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Norby, 2013; Riley, 2003). Ayrıca öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları problemlerin altında yatan güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar, öğrencilerin sadece kanıt yaparken değil, kanıtın ne olduğunu anımsarken bile zorluk yaşadıklarını ortaya koymuştur (Chazan, 1993).

Matematiksel ispat, doğruluğu önceden bilinene önermeler arasındaki ilişkilere dayanan mantıksal bir çıkarımdır (Dede & Karakuş, 2014). Yani birey bir matematiksel ifadenin ispatlama sürecinde önceden doğru olduğu bilinen önermelerle verilen ifade arasında ilişki kurup mantıksal çıkarımlar yapmak durumundadır. Bu nedenle ispat, matematikte doğrulama ve mantıksal düşünme becerilerinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Öğrencilerin ispat anlayışını geliştirmek bu konuda yeterliklerini artırmak için öğretmenlerin ispat hakkındaki bilgilerini anlamak önemlidir (Doğan, 2019). Öğretmenlerin bu konuda yeterli bilgiye sahip olmaları, öğrencilerinin de bu becerileri geliştirmelerine imkân sağlayabilir. Nitekim öğretmen kanıtlama sürecinde ne derece başarılı ve yetenekli olursa öğrencilerinin de bu yeteneği ortaya koyabilmelerine fırsat tanımış olur (Baki, 1999). Öğretmenlerin doğrulanması gereken bir matematiksel ifade karşısındaki tepkileri onların sahip oldukları kanıt şemalarını gösterir. Bu şemalar ile öğretmenlerin ispatı anlama düzeyleri ve ikna oldukları kanıt teknikleri mümkün olmaktadır (Knapp, 2006).

Bu bağlamda ilköğretim matematik öğretmenlerinden güncel ortaokul matematik programında bulunan konular esas alınarak hazırlanan dokuz önermenin kanıtlanmasının istendiği bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel ifadeleri doğrulama sürecinde eksikliklerinin ve yeterliklerinin tespit edilmesi ve öğretmenlerin ispatlamaya ilişkin öğretim anlayışlarının kanıt şemaları yardımıyla tespit edilmesi amaçlanmıştır.

Kavramsal Çerçeve

Harel ve Sowder (1998) yaptıkları araştırmalarında kişinin gelişiminde ortaya çıkan zihinsel yetenek ve bilişsel düzeyin kanıt şemalarının temsili olduğunu ifade etmişler ve kanıtın süreç içerisinde değerlendirildiğini ve bireylerin yazmış oldukları ifadelerden değil, düşüncelerinden yola çıkarak kanıt şeması ifadesini kavramsallaştığını belirtmişlerdir. Bireylerin aynı zamanda birden fazla kanıt şemasına ait özellik gösterebileceğini ifade eden Sowder ve Harel (1998) kanıt şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana grupta sınıflandırmışlardır:

1. Dışsal Kanıt Şemaları

Dışsal kanıt şemalarına ait özelliklere sahip diyebileceğimiz bireylerin, bir durumun aslını anlayabilme ve bu duruma karşısındakini ikna etme sürecinin dışsal kaynaklara bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Kişilerin matematik öğreniminde elde ettiği bilgileri doğrulamalarında otorite, önceden edindikleri ifadeler veya sembol gibi bazı nedenlere dayandırılmasıyla oluşmaktadır (Martin et al., 2005; İskenderoğlu, 2010). Burada kişinin belirtilen sebeplere güvenmesi söz konusudur. Birey güvendiği ya da inandığı şekliyle doğrulamalarını yaptığında doğrulamalarından şüphe duymamaktadır. Dışsal kanıt şemaları otoriter, alışkanlık edinilmiş ve sembolik kanıt şeması olmak üzere üç alt şemaya ayrılmıştır.

Otoriter Kanıt Şeması

Matematik öğretiminin ilk basamaklarından itibaren matematiksel bilgiler öğretmenler tarafından sistematik biçimde öğrencilere aktarılmaktadır. Öğrenci de bunların birer basamak olduğunu ve kendisinin de öğretmenlere benzer süreçlerden geçmesi gerektiğini düşünmektedir. Bu da bireyin merak duygusunu köreltip, düşünmelerden uzak bakış açısı geliştirmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla hazır olan her bilgi ya da doğrulama öğrenciler açısından sıklıkla tercih edilmektedir. Elde edilen bu ezber ya da taklit yöntemi vazgeçmesi zor hâle gelmektedir. Bireyler doğrulamalarında öğretmen, kitap, formül ya da güvendiği herhangi bir kişiyi referans olarak gösteriyorsa; bireylerin otoriter kanıt şeması özelliklerine ait tepkiler sergilediği söylenebilmektedir. Kişi kanıtlama sürecinde "Formülü kullandım.", "Sınıftaki arkadaşım böyle çözmüştü.", "Kitapta yazanlara göre." şeklinde ifadeler kullanarak otoriter kanıt şemasına ait ifadelere başvurabilmektedir. Bu noktada otoriteye başvurduğu anlaşılmaktadır. Bir doğrulamaya ikna etmek için, belli kaynaktan ulaşılan kural, tanım, formüller kullanılmaktadır (İskenderoğlu, 2010). Çontay (2017), otoriter kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; "*İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma"* ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi olarak belirtmektedir.

Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması

Bireyler probleme ait doğrulamalarını sunarken problemin doğruluğu yerine görüntüsünden ya da kanıtın alışılan biçiminden yola çıkarak sonuca varmaktadırlar. Bundan dolayı öğrenciler yapılan kanıtlama yanlış da olsa biçimine bakarak doğru olduğuna karar vermektedirler (Martin & Harel, 1989). Bireyler zihinsel süreçte düşünme becerilerini kullanarak çözüm üretmek yerine karşısındaki kişiyi ikna edebilmek için eskiden öğrendikleri nedenleri ortaya koymaktadırlar. Çontay (2017), alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; *"işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma", "sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama", "kanıtı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma", "kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle kanıtı yapılandırma", "kanıtın doğruluğunu kanıtın görüntüsünden etkilenerek yargılama"* ve *"genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma"* ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Bu şemaya ait özellikler göz önünde bulundurulduğunda öğrenciler doğrulamalarını kanıtlamak için eski öğrenmiş oldukları bilgilerini ve düşünme yollarını tercih etmektedirler. Bireyler, yüzeysel çözüm basamaklarını ön plana almakta ve detaylı açıklamalar önemsenmemektedir (Lee, 1999).

Sembolik Kanıt Şeması

Bu şemada semboller anlam ifade etmeden bilinçsizce kullanılmaktadır. Bireyler sembolleri kendi anlamından bağımsız, verilen durumla ilişkisi olmadan kullanmaktadırlar (Sowder & Harel, 1998). Çontay (2017), sembolik kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; *"kanıtı yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle etme"* ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi olarak belirtmektedir. Alışılagelmiş sembolik fikirler içeren şemalar, sembolik kanıt şemalarıdır (İskenderoğlu, 2016). Sembolik kanıt şemaları, matematiksel fikirlerin; sembolik akıl yürütme ile kanıtlanmasıdır (Harel & Sowder, 1998). Örneğin öğrencilerin kesirlerle toplama işlemi yaparken, paydaları eşitleyerek işlem yapması gerektiğini ihmal ederek; payları toplayarak elde ettiği değeri kesrin payına, paydaları toplayarak elde ettiği değeri ise kesrin paydasına yazması sembolik kanıt şemasına ait izler taşıdığını göstermektedir.

2. Deneysel Kanıt Şemaları

Bu şemaya ait özellikler göz önünde bulundurulduğunda bireylerin örnekler üzerinden doğrulamalar gerçekleştirdiği görülmektedir. Kanıtlar çoğunlukla örneklere dayandırılmaktadır (Flores, 2002). Bir başka açıdan bakıldığında da kanıtlamalarında çizimlerden de faydalanılabilir. Deneysel kanıt şeması fiziksel kanıt ya da duyusal deneyimlerin kullanılarak doğruluk ve yanlışlığın gösterildiği kanıt şemalarıdır (Harel & Sowder, 1998). Deneysel kanıt şemasına ait tepkiler sergileyen bireyler, problem çözme sürecinde matematiksel duruma ait çözümlerinde sezgilerini ve bilgilerini kullanmaktadırlar (Lee, 1999). Deneysel kanıt şemaları, algısal ve temel örnekler kanıt şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır.

Algısal Kanıt Şeması

Bu kanıt şemasında bireyler, güçlü kanıta sahip değillerdir; kanıtlamalarındaki doğruları ya da yanlışları, hisseleriyle ifade etmeye çalışmaktadırlar (Mejia-Ramos & Tall, 2005). Çontay (2017), algısal kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; "*kanıtın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma"* ve "*sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe"* ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Çizim ve sezgiler esas alınarak sonuca ulaşılmaya çalışılmaktadır (İskenderoğlu, 2016). Bireylerin görsel algıları bu kanıt şemasına ait özellik olarak karşımıza çıkmaktadır (Harel, 2007).

Temel Örnekler Kanıt Şeması

Bu kanıt şemasında bir duruma ait doğrulamalarda örneklerden yararlanılmaktadır. Temel örnekler kanıt şeması, öğrencilerin örneklerle varsaydıkları doğruluğa kendisini veya karşısındakini ikna etmek amacıyla kullandığı düşünme biçimidir (Sowder & Harel, 1998; İskenderoğlu, 2016). Bireyler, öğrendikleri bilgileri kontrol etmek için ya da anlamlandırmak için de örneklerden yararlanmaktadırlar (Flores, 2002). Çontay (2017), temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; "*kanıtın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma"* ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi olarak belirtmektedir. Ayrıca bu şema kanıt yapmaya yeni başlayanlar için net, anlaşılır bir şemadır ve matematik diliyle geçersiz veya geçerli olabilmektedir (Hanna & de Villiers, 2008).

3. Analitik Kanıt Şemaları

Bu şemaya ait özelliklerde öğrencilerin mantıksal çıkarımlarla varsayımları geçerli kılması söz konusudur (Harel & Sowder, 1998). Bu süreçte öğrenciler mantıksal tümdengelim kullanmaktadırlar. Ayrıca doğrulama sürecinde sunulan nedenler aksiyom ve teoremlerle birlikte akıl yürütmeyi de içermektedir (İskenderoğlu, 2016). Matematikte analitik kanıt şemaları kanıt yapmada son aşama olarak görülmektedir (Sowder & Harel, 1998). Analitik kanıt şemaları, dönüşümsel kanıt şeması ve aksiyomatik kanıt şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır.

Dönüşümsel Kanıt Şeması

Dönüşümsel kanıt şemasına ait özellikler sergileyen bireylerin gerekçelendirme yolu durumların genel yönleriyle bağlantılıdır ve akıl yürütme süreçleri, varsayımları genel bir analitik çerçeveye yöneliktir (Sowder & Harel, 1998). Bu kanıt şeması akıl yürütmeleri içermektedir. Bireyler bu kanıt şemasına ait tepkilerinde özel bir durumdan yola çıkarak genellemelere ulaşmaktadırlar. Mantıksal çıkarım, genelleme ve işlemsel beceri bu kanıt şemasına ait önemli üç özelliktir (Harel & Sowder, 2007; İskenderoğlu, 2016). Çontay (2017), dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; "*kanıtı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma", "ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma"* ve "*kanıtın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama"* ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Dönüşümsel kanıt şemaları aksiyomatik kanıt şemaları için gerekli alt yapı olarak görülmektedir (Sowder & Harel, 1998).

Aksiyomatik Kanıt Şeması

Aksiyomatik kanıt şemasına ait özellikler sergileyen birey, bir matematiksel gerekçelendirmenin başlama noktasını; tanımsız terimler, aksiyomlar olarak ele almakta ve bu sistemde rahat biçimde çalışabilmektedir (Harel & Sowder, 1998; Sowder & Harel, 1998). Ayrıca matematiksel ifadelerin doğruluğu gösterilirken tanımlar, teoremler; tahminler ve tanımsız terimler neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanılmaktadır (Harel & Sowder, 2007). Yani aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip bir birey, kanıtının başlangıç noktasını tanım; teorem ve formüller olarak almakta ayrıca bunları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanarak akıl yürütmelerini gerçekleştirmektedir.

YÖNTEM

Araştırmanın Deseni

İlköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt şemalarının tespit edilmesi için çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Bir durumu detaylıca anlamlandırabilmek için durumun kendine özgü yollarla sorgulanmasına ve anlamlandırma sürecine nitel araştırma denir (Creswell, 2009). Durum çalışması ise bir veya daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun, birbiriyle ilişkili sistemlerin ayrıntılı incelendiği yöntemdir (McMillan, 2000). Ayrıca durum çalışmalarında katılımcılara zorunlu olmadıkça herhangi bir müdahalede bulunulmamaktadır (Yin, 2009). Bu bağlamda çalışmada katılımcıların doğrulama süreçlerine müdahale edilmemiş ve kanıt şemalarının derinlemesine incelenebilmesi için çalışmanın araştırma deseninin nitel araştırma desenlerinden durum çalışmasına uygun olduğuna karar verilmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir tekniği kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemi belli özelliklere sahip özel durumların incelenmesinde tercih edilmekte olup katılımcılar araştırmacı tarafından belirlenmektedir (Balcı, 2005). Katılımcıların kanıt şemalarına ait net karar verilemeyen durumlarda kendileriyle tekrar iletişime geçebilmek için rahat ulaşılabilir olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu, Milli Eğitim Bakanlığına bağlı farklı ortaokullarda görev yapmakta olan dört ilköğretim matematik öğretmeni oluşturmuştur. Çalışmada yer alan öğretmenlerin gönüllülük esasına göre katılımına dikkat edilmiştir. Gizlilik, özel hayata saygı; katılımcıların kimlikleri ile çalışmanın gerçekleştirildiği sosyal ve kültürel ortamı tanımlayan bilgilerin paylaşılmaması, katılımcıların kimliklerinin gizli tutulmasıdır (Johnson & Christensen, 2004). Bu doğrultuda çalışmada yer alan öğretmenlerin gerçek kimlikleri belirtilmemiştir. Öğretmenler Eylül, Fulya, Rana ve Selin olarak isimlendirilmiştir. Öğretmenler, farklı devlet üniversitelerinin eğitim fakültelerinden mezun; ilçe merkezi ve köy okullarında görev yapmaktadırlar. Tüm öğretmenlerin görev süreleri 8-10 yıl arasındadır. Ayrıca öğretmenlerden Selin ve Eylül matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmaktadırlar.

Veri Toplama Araçları

Çalışmada veri toplama aracı olarak Görev Temelli Görüşme Formu kullanılmıştır. Öğretmenlerle gerçekleştirilen görev temelli görüşmeler, araştırmacının öğretmenlerden kanıtlamaları istenilen soruların bulunduğu çalışma kâğıdından ve kanıt süreçlerine ait soru formundan oluşmaktadır.

Görev Temelli Görüşmeler

Çalışmada öğretmenlerle görev temelli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmeler, görüşmecinin önceden hazırladığı yapılandırılmış şekilde olabildiği gibi, araştırmacının düşüncelerine göre farklılaşabilen değişimleri içeren ve görüşmeciye katılımcıların muhakemelerini yargılamaya fırsat verecek yarı yapılandırılmış şekilde de olabilir (Maher & Sigley, 2020). Bu çalışmada görev temelli görüşmeler yarı yapılandırılmış şekilde gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmeler, bireyin akıl yürütmesi; problem çözme davranışları, matematiksel bilgi ve matematik anlayışıyla ilgili bilgi edinmek amacıyla kullanılır (Koichu, 2009). Görev temelli görüşmeler klinik görüşmelerin bir biçimidir. Ayrıca görev temelli görüşmeler katılımcı ve görüşmeci ile gerçekleştirilir (Houssart & Evens 2011). Görev temelli görüşmelerde katılımcıya görüşmeyi yapan kişi tarafından bir ya da daha fazla görev verilir (Goldin, 2000). Bu süreçte katılımcı problem çözme aşamasında veya sonrasında görüşme süresince konuşarak problemle de uğraş içerisindedir. Katılımcılara görev olarak eskiden görmüş oldukları veya ilk kez karşılaştıkları soru, problem ya da etkinlikler yöneltilebilir (Maher & Sigley, 2020). Koichu ve Harel (2007), görüşmeci ve katılımcının normlar tarafından düzenlenmiş görev üzerinde etkileşimde bulundukları durumu görev temelli görüşme olarak adlandırmaktadırlar.

Çalışmada görev temelli görüşmeler, çalışma kâğıdı ve kanıt süreçlerine ait soru formu ile yürütülmüştür. Araştırmacı, öğretmenler çalışma kâğıdındaki soruları doğrularken; aynı zamanda öğretmenlere yaptıkları işlemleri açıklaması amacıyla kanıt süreçlerine ait sorular (Ek 3) yöneltmiştir.

Çalışma Kâğıdı: Öğretmenlerin hangi kanıt şemaları özelliklerine sahip olduklarını belirlemek amacıyla kullanılacak olan sorular, öğretmenlerin seviyelerine uygunluğu ve kanıt şemalarının ortaya çıkarılması açısından önem taşımaktadır. Bu sebeple çalışma kâğıdındaki soruların, ortaokul müfredatına uygun olmasına; bu kapsamda her öğrenme alanına ait soru hazırlanılmasına ve öğretmenlerin tüm kanıt şemalarına ait özellikleri sergileyebilecekleri seviyede olmasına dikkat edilmiş, sorular bu doğrultuda hazırlanılmaya çalışılmıştır. Çalışma kâğıdındaki sorular için pilot uygulama öncesi uzman görüşü alınmıştır. Bu uzman bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi alanında öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır. Pilot uygulama öncesi uzmandan alınan görüşler doğrultusunda on beş sorudan oluşan çalışma kâğıdı (Ek 1) hazırlanmıştır. Ardından matematik eğitimi alanında görev yapmakta olan iki öğretim üyesinden uzman görüşü alınarak çalışma kâğıdı (Ek 2) dokuz soru olarak revize edilmiş ve pilot uygulamaya hazır hale getirilmiştir. Uzman teyidi alınmasıyla sorulardaki geçerlik ve güvenirliğin artırıldığı düşünülmüştür. Pilot uygulamada, öğretmenin çalışma kâğıdındaki sorulara cevap verebildiği; sorulara ait vermiş olduğu cevaplarda kanıt şemalarının gözlenebildiği tespit edilmiştir. Bu sebeple Ek 2'de verilen çalışma kâğıdı aynı şekliyle asıl uygulamaya dâhil edilmiştir.

Kanıt süreçlerine ait soru formu: Asıl uygulamada öğretmenlerin kanıt şemaları tespit edilirken, kanıtlama sürecinde kullandıkları yöntemler ile ilgili detaylı bilgi alınmasını sağlayacak sorular yöneltmenin kanıt şemalarını daha net ortaya çıkarmak açısından önem taşıdığı düşünülmektedir. Araştırmacı, Ek 3'te verilen kanıt süreçlerine ait soru formunu alan yazındaki çalışmalardan (İskenderoğlu, 2003; İskenderoğlu, 2010; Çontay, 2017; Flores, 2002; Sowder & Harel, 1998) derleyerek oluşturmuştur. Kanıt süreçlerine ait soru formundaki soruların, öğretmenleri herhangi bir kanıt şemasına yönlendirmeyecek şekilde seçilmesine dikkat edilmiştir. Pilot uygulama sonrası son hâlini alan sorular belirli bir sıraya göre değil, öğretmenlerin doğrulamalarına uygun olacak şekilde yöneltilmiştir. Kanıt süreçlerine ait soru formunda öğretmenlere çalışma kâğıdındaki soruları nasıl kanıtlayacakları, kanıtlamalarından nasıl emin oldukları, kanıtlamalarında uyguladıkları yöntem, akıllarına ilk gelen yöntemin uyguladıkları yöntem olup olmadığı ve her zaman bu yöntemi kullanıp kullanmadıkları şeklinde sorular yöneltilmiştir.

Veri Toplama Süreci

Araştırmacı çalışmaya başlamadan önce öğretmenlerle ayrı ayrı yapılacak olan çalışmanın içeriğini ve amacını detaylı şekilde anlattığı görüşmeler gerçekleştirmiştir. Araştırmacı öğretmenlere çalışma kâğıdını yönelteceğini, buradaki soruları kendi çözüm yöntemleri doğrultusunda istedikleri gibi cevaplandırabileceklerini ve bu sürecin video kayıt altına alınacağını belirtmiştir. Ayrıca doğrulamalarındaki ifadelerinin doğru ya da yanlış olmasından ziyade düşüncelerinin, çözüm aşamalarının ve fikirlerinin paylaşılmasının önemli olduğu özellikle belirtilmiştir. Araştırmacı, öğretmenler çalışma kâğıdındaki soruları doğrularken; aynı zamanda öğretmenlere yaptıkları işlemleri açıklamaları amacıyla kanıt süreçlerine ait sorular (Ek 3) yöneltmiştir. Gerçekleştirilen görev temelli görüşmeler 1 saat 20 dakika ile 1 saat 40 dakika arasında sürmüştür. Çalışma sırasında tüm süreç video kayıt altına alınmış ve sonrasında yazı hâline dönüştürülmüştür.

Veri Analizi

Çalışmada elde edilen veriler, nitel veri analizi yöntemlerinden; betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Öğretmenlerin kanıt şemaları, Sowder ve Harel'in (1998) geliştirmiş olduğu kanıt şemaları olan üç temel şema ile bu şemalara ait yedi alt şemaya göre değerlendirilmiş ve bu çalışmanın analiz birimini oluşturmuştur. Bu bağlamda bu çalışmanın betimsel analiz yöntemine uygun olduğu düşünülmüştür.

Görev temelli görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde ilk olarak video kayıtlar, bilgisayar ortamında yazı hâline dönüştürülmüştür. Yazı hâline dönüştürülen metinlerde öğretmenlerin hangi kanıt şemalarına ait özellikleri taşıdığı iki araştırmacı tarafından birbirinden bağımsız şekilde belirlenmiştir. Ardından üç hafta boyunca belirli aralıklarla bir araya gelerek iki analizi birbiriyle karşılaştırmışlardır. Ortak belirlenen şemalar aynı şekilde alınmıştır. Farklı şemalara ait olduğu düşünülen bulgular ise araştırmacıların bir araya gelmesiyle tekrar birlikte incelenmiş ve üzerine tartışılarak ortak bir karara bağlanmıştır. Son durumda araştırmacıların veri setindeki analizleri karşılaştırıldığında tutarlık oranının yüzde yüz olduğu belirlenmiştir. Belirlenen kanıt şemalarının göstergeleri olan kodlar alanyazındaki bazı çalışmalardan (Harel & Sowder, 1998, Harel & Sowder, 2007; İskenderoğlu, 2010; Çontay, 2017) derlenerek oluşturulmuştur. İlgili temel kanıt şemaları, temalar; alt kategorilerindeki kanıt şemaları, alt temalar ve belirlenen kanıt şemasının göstergeleri olan kodlar Tablo 1'de sunulmuştur.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel çalışmalarda geçerlik, araştırmacının incelediği olguyu, olduğu gibi ve olabildiğince tarafsız gözlemesidir (Yıldırım & Şimşek, 2018). Güvenirlik ise araştırma sonuçlarının tekrar edilebilirliği ile ilgilidir. Nitel çalışmalarda iç geçerlik, inandırıcılık; dış geçerlik, aktarılabilirlik; iç güvenirlik, tutarlık ve dış güvenirlik ise teyit edilebilirlik şeklinde ifade edilmektedir. Çalışmanın bulguları aktarılırken katılımcıların ifadelerinden alıntılara yer verilerek sonuçlar yorumlanmıştır. Ayrıca çalışmadan elde edilen bulgular, Sowder ve Harel'in (1998) kavramsal çerçevesi ve bu konuda yapılmış benzer araştırmalar ile uyumlu olduğu için çalışmanın başka araştırmalar tarafından yararlanılabilir seviyede olduğu düşünülmüştür. Bu sayede çalışmanın inandırıcılık ve aktarılabilirlik özelliklerini sağladığı düşünülmüştür. Çalışmada kodlama güvenirliğini sağlamak amacıyla, veri analizi sürecinde öğretmenlerin kanıt şemaları belirlenirken uzman görüşünden yararlanılmıştır. Ayrıca araştırmanın yöntemi ve aşamaları açık biçimde ifade edilmiş olup verilerin nasıl toplanacağı, nasıl işleneceği, nasıl yorumlanacağı ve nasıl sonuçlara ulaşılacağı detaylıca anlatılmıştır. Uygulamanın sonuçları, elde edilen verilerle ilişkilendirilerek ham veriler başkaları tarafından incelenebilecek biçimde muhafaza edilmiştir. Çalışmanın tartışma bölümünde farklı ya da aynı çalışmalar bu çalışma ile karşılaştırılmış, birbiriyle ilişkili şekilde sunulmuştur. Tüm bunların, çalışmanın tutarlık ve teyit edilebilirlik özelliklerine katkı sağladığı düşünülmüştür.

Tablo 1: Kanıt Şemalarının Asıl Uygulamaya Ait Göstergeleri

Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergesi
Dışsal Kanıt Şeması	Alışkanlık Kanıt Şeması	Önceki öğrenmelerini anlamlandırmadan kullanma
Deneysel Kanıt Şeması	Algısal Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma
	Temel Örnekler Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma
Analitik Kanıt Şeması	Dönüşümsel Kanıt Şeması	Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar oluşturma
	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Tanımları, neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanma

BULGULAR

Öğretmenlerin, görev temelli görüşmelerde dışsal deneysel ve analitik kanıt şemalarını ortaya koyan özelliklerini gösterdikleri tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bazı bulgularda, öğretmenlerin kanıtlarını yapılandırmasında hatalar olduğu belirlenmiştir. Bu hatalı kanıt yapılandırmalarına bulgularda yer verilmemiştir. Aşağıdaki başlıklarda öğretmenlerin her bir kanıt şemasının alt kategorilerine dâhil olan ifadeleri, bu ifadelerin kanıt şemaları sınıflandırmaları ve kanıt şemalarının göstergesi olarak alt başlıklar hâlinde sunulmuştur.

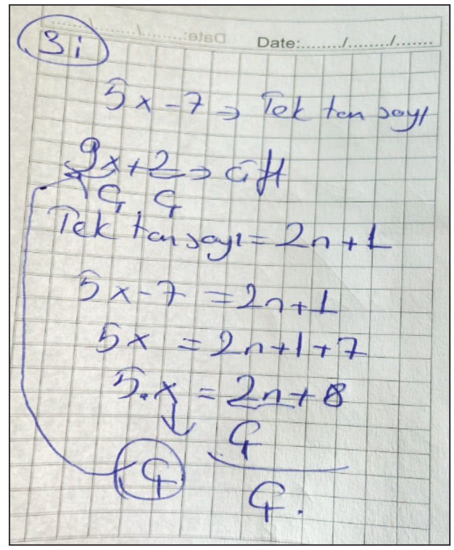
1. Dışsal Kanıt Şemalarına Ait Bulgular

Bu bölümde, öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde dışsal kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde dışsal kanıt şemalarından olan otoriter kanıt şeması ve sembolik kanıt şeması özelliklerine ait ifadelerine rastlanmamışken Selin ve Rana Öğretmenin alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini bazı sorularda, ağırlıklı olmasa da sergiledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin dışsal kanıt şemalarının göstergelerine ait dağılımları Tablo 2'de sunulmuştur.

Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına ait bulgular

Rana Öğretmen üçüncü soruyu yanıtlarken bazı açıklamalarında alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği fakat ağırlıklı olarak temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Rana Öğretmen üçüncü soruyu kanıtlamaya başladığında deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait özellikler sergilemiştir. Bunun yanı sıra yaptıklarının "*ezber olduğunu*" ifade ettiği için dışsal alışkanlık kanıt şemasına ait izler taşıdığı düşünülmüştür. Selin Öğretmen ise beşinci soruya ait bazı açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği fakat ağırlıklı olarak dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Selin Öğretmenin vermiş olduğu cevaplar ve açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

Selin Öğretmen, beşinci soruda ("x tamsayı olmak üzere, $5x$-7 tek tamsayı ise $9x$+2 çift tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ilk olarak $5x$-7'yi bir tek sayı ($2n$+1) olarak ifade ederek x'in teklik çiftlik durumunu araştırmıştır. Selin, x'in çiftliğini tespit ettikten sonra gerekli dönüşümleri yaparak $9x$+2 ifadesinin çift olduğu sonucuna ulaşmıştır. Selin'in bu ifadelere ait cevabına aşağıda yer verilmiştir:



Şekil 1: Selin'in çalışma kâğıdının beşinci sorusuna ait cevabı.

Şekil 1'deki cevabı incelendiğinde, Selin'in dönüşüm yaparak kendi akıl yürütmelerini gerçekleştirdiği görülmüştür. Aşağıda Selin'in cevabına ait açıklamalarına yer verilmiştir:

> *S:* ***5x-7 = 2n + 1 dedim. Buradan 5x = 2n + 8, 2n çift bir sayı. ç+ç=ç gelmek zorunda. O zaman 5x çift olmalı. O zaman x de çift olmak zorunda. x, çift sayı ise buraya döndüğümüzde 9x+2, 9x de çift sayı geliyor. 2 bir çift sayı çift ile çiftin toplamı da çift sayı.*** *Yine burada lisedeki bilgilerime dayanarak yaptığım bir ispat oldu. Yine kabullerden yola çıktım tekle çiftin toplamı tek gibi yani 3'te anlattığım kabullerden yola çıktım.*

Selin, cevabında ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklarla kanıtını yapılandırmıştır. Fakat bazı ifadelerinde, doğrulamalarını lisedeki öğrenmelerine dayandırdığı görülmüştür. Bunun yanı sıra Selin'e bu soruya ait kullandığı yöntemi her zaman tercih edip etmeyeceği sorulduğunda "*Yani başka bu tarz bir soru gelse, yine aynı şeyi söylerdim.*" ifadesini kullanmıştır. Tüm bu ifadeler göz önüne alındığında Selin'in, kanıtını savunmasına ait ifadelerinde dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerinden izler taşıdığı fakat kanıtlamasına ait cevabında analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Tablo 2: Öğretmenlerin Dışsal Kanıt Şemaları Göstergelerine Ait Dağılımları

Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergeleri	Öğretmen	Soru No
Dışsal Kanıt Şeması	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Önceki öğrenmelerini anlamlandırmadan kullanma	Rana	3, 7*
			Selin	5
			Eylül	3*
			Fulya	3*

** Bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması.*

2. Deneysel Kanıt Şemalarına Ait Bulgular

Bu bölümde, öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde deneysel kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde deneysel kanıt şemalarının alt kategorileri olan algısal kanıt şeması ve temel örnekler kanıt şeması özelliklerini sergiledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin deneysel kanıt şemalarının göstergelerine ait dağılımları Tablo 3'te sunulmuştur.

Deneysel algısal kanıt şemasına ait bulgular

Öğretmenlerden Eylül, çalışma kâğıdının üçüncü ve yedinci sorularında deneysel algısal kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuştur. Bu ifadeler "*önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma*" şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca Eylül'ün bu sorulara ait cevaplarında deneysel temel örnekler ve analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerinden izler taşıdığı görülmüştür. Öğretmenin belirtilen göstergeye ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

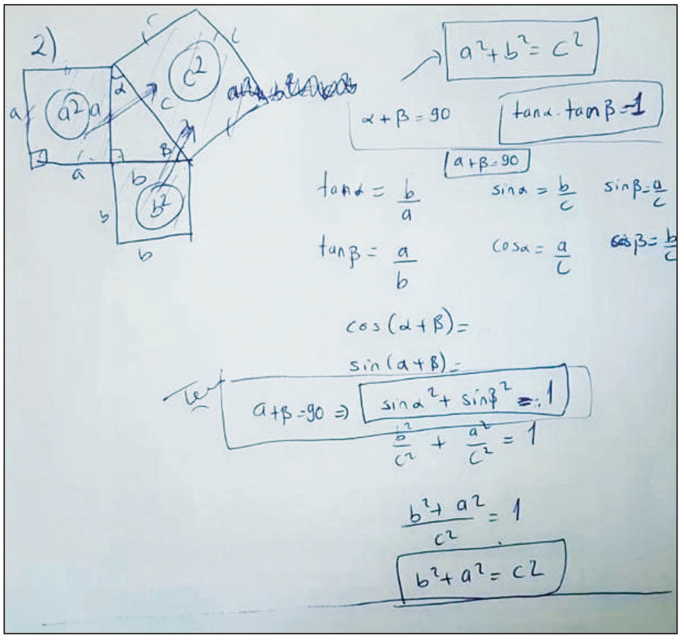
Eylül, çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna ("Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir" önermesini kanıtlayınız.) başladığında deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait özellikleri sergilemiş ardından bunun kanıt için yeterli olmadığını belirtmiştir. Ardından kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu fakat yapılandırmasında yazdığı formülden emin olmadığı dolayısıyla deneysel algısal kanıt şemasına ait özellikler taşıdığı düşünülmüştür. Eylül, bu soruya ait cevaplarında öncelikle kenar uzunlukları a, b ve c birim olan bir üçgen çizmiş ardından bu kenarlardan aynı kenar uzunluklarına sahip kareler oluşturmuştur. Dik kenarlardan oluşturulan karelerin alanları toplamının, hipotenüs kenarından oluşturulan karenin alanına eşit olduğunu ifade ederek bunun bir doğrulama olabileceğini fakat kanıt oluşturmadığını ifade etmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

> *A: Önermeyi kanıtlar mısın? (SF)*
>
> *E: Doğrulama ile ilgili pek çok yöntem biliyorum. Ama kanıt olur mu? Kendime yakın olanı yapacağım. Şimdi bu dik üçgen, bu üçgenin dik kenarlarından kare çiziyorum, b ise b uzunluğunda. Ama bu da sanki doğrulama olacak. Buraya da aynı şekilde çiziyorum. Bunun alanı ne olur? Kare çizdiğim için a^2, bu taraf b^2. Buraya da bir kare çiziyorum, c olacak şekilde. Alanı c^2 olur. Bu benim en çok kullandığım yöntem. Ama benimki bir doğrulama oluyor. Şimdi bunları taşıyıp eşit olduğunu görüyoruz. Ama şu an matematiksel olarak bunu yapamam. Bu şekilde ispata varamayacağım.*

Eylül'ün ifadelerine ait cevabına Şekil 2'de bir numaralı kısımda yer verilmiştir:

Eylül, soruya ait ilk cevaplarında a, b ve c birim uzunluğunda bir üçgen çizerek önermeyi doğrulamaya çalışmıştır. Buradan deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait ifadelerle doğrulamaya başladığı fakat yaptıklarının kanıt olmadığını belirterek trigonometrik oranlarla kanıtını yapılandırmaya çalıştığı görülmüştür. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

> *E: Açılardan yola çıksam. Bunun kanıtı büyük ihtimal sinüs tanjant kullanacağım. Çünkü matematiksel olarak kanıtını böyle yapabilirim ama hiç kullanmadığım için hatırlamıyorum. Ama tanjant diyelim, büyük ihtimal buradan (çizdiği ABC üçgeninin trigonometrik oranlarını yazar) $\alpha + \beta = 90$ ise tan α.tanβ = -1 e eşitti şöyle bir şey vardı. Getiremeyeceğim şu an. Aklıma da bir şey gelmiyor.*
>
> *A: Düşünebilirsin süre sınırımız yok.*



Şekil 2: Eylül'ün çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna ait cevabı.

Tablo 3: Öğretmenlerin Deneysel Kanıt Şemaları Göstergelerine Ait Dağılımları

Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergeleri	Öğretmen	Soru No
Deneysel Kanıt Şeması	Algısal Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma	Eylül	3, 7
			Fulya	3
	Temel Örnekler Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma	Rana	1, 2, 3*, 5, 6
			Fulya	6
			Eylül	3*

*** Bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması.*

*E: sin($\alpha + \beta$)**'dan gelir bence. Kesin gelir ama hatırlamıyorum.***

Eylül'ün *sin*($\alpha + \beta$) ya da *cos*($\alpha + \beta$) trigonometrik ifadelerini kullanarak kanıtı yapılandırabileceğine dair kuvvetli bir sezgisi olduğu görülmüştür. Bu ifadelerinden nasıl emin olduğu sorulduğunda ise, bu trigonometrik açılımların var olduğunu; kendisinin de bu açılımları doğru matematiksel işlemler yaparak, sonuca ulaşabileceğini belirtmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl eminsin?

*E: Çünkü bu doğru, doğruluğuna eminim bunun. Kullanıyoruz zaten bunu. Bu kanıtlanmış bir şey. Ama şu an nasıl kanıtlayacağım? Benim aklıma gelmiyor. Buradan matematiksel işlemleri yaparak gelir. Buraya a/b, b/c falan yazacağız. E doğru olan bir şey **illaki çıkar, gerekli işlemleri yaparsan.** Yollar değişir ama **bu doğru kesin çıkar.** Onu sağlamak için tüm formüller önümde olsaydı yapabilirdim. Şu an formülleri hatırlamadığım için ilerleyemiyorum. Mesela* $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$ ***böyle bir şey vardı ama emin değilim.*** *Bundan **emin olsam geleceğini düşünüyorum.** Evet, bak gelecek (oranları yazar). Eğer bu teoremi doğru hatırlıyorsam kanıtladım.*

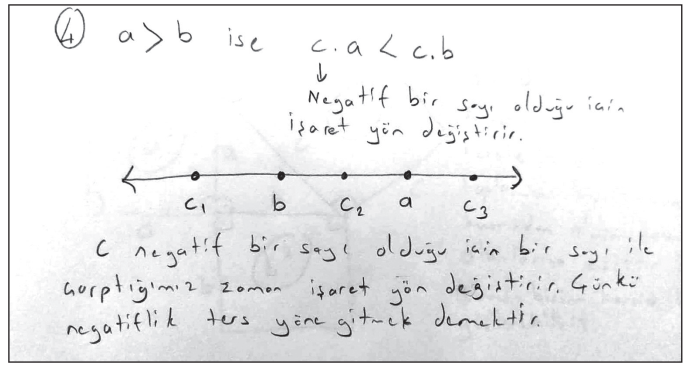
Eylül'ün "*Kanıtı büyük ihtimal sinüs tanjant kullanacağım*", "*Kullanıyoruz zaten bunu*" biçimindeki ifadelerinden dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına ait izler taşıdığı görülmüştür. Fakat doğrulamasında son ifadelerinin dikkate alındığı düşünüldüğünde Eylül $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$ formülünden emin olamadığını belirtmiştir. Eylül'ün "*gerekli işlemleri yaparsan illaki çıkar, emin olsam gelecek"* gibi ifadelerinden dolayı kanıtlamasında sezgileriyle hareket ettiği söylenebilir. Buradan Eylül'ün deneysel temel örnekler kanıt şeması ile kanıta başladığı ardından kanıtının kurgusunda dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması izlerinin olduğu fakat ağırlıklı olarak deneysel algısal kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Temel örnekler kanıt şemasına ait bulgular

Fulya, çalışma kâğıdının altıncı sorusunda ("*a*, *b* $\in$ *IR* ve *c* $\in$ IR^- olmak üzere, eğer *a>b* ise *c.a* < *c.b* dir." önermesini kanıtlayınız.) deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuştur. Bu ifadeler "*önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden izah etme"* şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Fulya, soruya ait cevaplarında kanıtını yapılandırırken öncelikle; sayıların negatif bir sayı ile çarpıldığında işaretlerinin değişeceğini belirtmiştir. Fulya'nın bu ifadelerine ait cevabına Şekil 3'te yer verilmiştir.

Ardından a, b ve c için belirli sayı değerleri seçerek önermenin doğruluğunu göstermiştir. Fulya'ya bu yöntemini her zaman kullanıp kullanmayacağı sorulduğunda ise her zaman kullandığını belirtmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

F: Kullanırım. Biz zaten kullanıyoruz. 8. sınıflara gidiyorum yine, 8. sınıflarda eşitsizlik konusunda bunu çok fazla kullanıyoruz. Biz çocuklara da direkt onu söylüyoruz. İstikamet



Şekil 3: Fulya'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.

derken de şunu ifade ediyorum. Örneğin (+2)'yi, (-1) ile çarpsam ne olur? (-2) olur. Çünkü negatiflik demek ters yön demek olacağı için orada artılar eksi, eksiler artı olacak. O yüzden işaretimiz yön değiştirir. Şundan emin değilim. c'yi nereye koyacağımı da kestiremedim. Çünkü b de burada negatif olabilir. c için 2 farklı seçenek var aslında.

A: Peki o durumda ne yapacağız?

F: Hatta 3 farklı seçenek var c için.

A: Nedir bu seçenekler?

F: c için a'dan da büyük olabilir. a ve b negatif sayılardır. İkisi de negatif sayı olabilir. c için 3 farklı seçenek var burada kullanabileceğim. Ama yani durumların hiçbirinde değişmiyor, aynı yola çıkıyoruz.

A: Nasıl emin oluyorsun peki? (SF)

*F: Şöyle emin oluyorum. Şimdi, a sayısını düşünelim. **a sayısı pozitif bir sayı olsun. Örneğin; 3 olsun. Negatif bir sayı ile çarptığında a her zaman ne olacak negatif olacak. Örneğin (-1) ile çarpıyorum (-3) olur. b, a'dan küçük olacağı için 3'ten küçük bir değer vermem gerekiyor. Negatif bir değer olsun, (-4) olsun. c ile çarptığında c'ye (-1) demiştim. Bu durumda b sayım (-1) ile (-4)'ü çarparsak (+4) olur. a > b'den; c.b > c.a'dan oldu. Baktığımız zaman (-3), (+4) olacağı için büyük oldu.** Yani birinci ispatım doğrulandı.*

A: Tüm durumlar için dener misin?

F: Tabii ki.

Fulya'nın ifadeleri ve Şekil 3'te verilen cevabı incelendiğinde bilinmeyen ifadeler yerine belirlediği değerleri yazarak bulduğu sonuçların, önermenin doğruluğunu göstermesinde yeterli gördüğü söylenebilir. Ayrıca Fulya'nın önermeyi kontrol etmek veya anlamlandırmak için örneklerden yararlandığı belirlenmiştir. Buradan Fulya'nın deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

3. Analitik Kanıt Şemalarına Ait Bulgular

Bu bölümde öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde analitik kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde analitik kanıt şemalarının alt kategorileri olan dönüşümsel kanıt şemasına ve aksiyomatik kanıt

Cilt/*Volume* 13, **Sayı**/*Number* 2, **Ağustos**/*August* 2023; **Sayfa**/*Pages* 245-262

şemasına ait özellikleri sergiledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin analitik kanıt şemalarının göstergelerine ait dağılımları Tablo 4'te sunulmuştur:

Dönüşümsel kanıt şemasına ait bulgular

Öğretmenler çalışma kâğıdının birinci, ikinci, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu sorularında analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler *"ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar oluşturma"* şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bununla beraber çalışma kâğıdının bazı sorularında, bir öğretmenin cevaplarının analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait özellikler taşıdığı görülmüş olmasına rağmen cevaplarına ait savunmasında dışsal alışkanlık kanıt şeması özelliklerine ait izler taşıdığı belirlenmiştir. Öğretmenlerin belirtilen göstergeye ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Fulya, çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ("İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler." önermesini kanıtlayınız.) ait doğrulamasında öncelikle bir üçgen çizmiş, üçgenin tepe noktasından karşısındaki kenara bir dikme indirmiş ve oluşan iki üçgenin eş üçgenler olduğunu belirtmiştir. Ardından eşlik kavramından yola çıkarak önermenin doğruluğunu göstermiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

> ***İkizkenar üçgen demek, taban açıları birbirine eşit olan üçgen demektir. Dikme olduğu için 90 olacak. İki açı eşitse, üçüncü açı da eşit olmak zorundadır. Yani tepe açılarını iki eş parçaya ayırmak zorunda. Bu durumda biz burada iki tane eş üçgen elde ettik. İki eş üçgen oldukları için aynı açının karşısındaki kenarlarda birbirine eşittir. O yüzden tepe açısının gördüğü tabandaki iki kenar birbirine eşit olmak zorunda derim.***

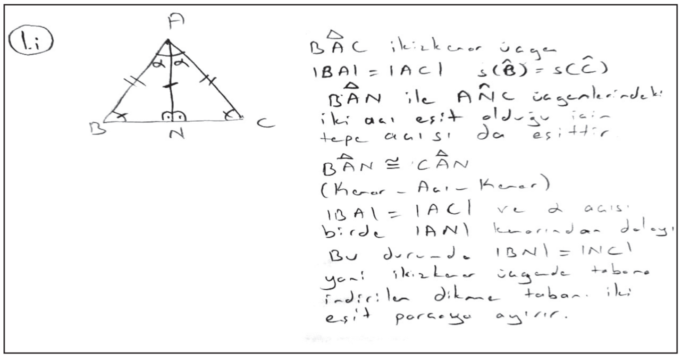
Fulya'nın soruya ait cevabına Şekil 4'te yer verilmiştir.

Fulya'nın ifadeleri ve Şekil 4'te verilen cevabı incelendiğinde önermenin doğruluğuna ulaşabilmek için mantıksal çıkarımlarla kanıtlamasını doğru biçimde yapılandırdığı görülmüştür. Dolayısıyla ana meseleyi belirlediği ve buna uygun tutarlı basamaklar oluşturarak kanıtını yapılandırdığı söylenebilir. Buradan Fulya'nın analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül çalışma kâğıdının sekizinci sorusunda ("Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir." önermesini kanıtlayınız.) çizdiği koordinat sisteminde birbirine paralel iki doğru alarak kanıtını yapılandırmaya çalışmıştır. Çizdiği doğrularla eksenler arasında kalan üçgenlerin eşlik durumunu belirlemiş ve orantı kurarak kanıtını tamamlamıştır. Bu ifadelere ait cevabı Şekil 5'te verilmiştir.

Yukarıdaki cevabı incelendiğinde Eylül'ün kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları mantıksal çıkarımlarla oluşturduğu görülmüştür. Bu ifadelerine ait açıklamaları aşağıda sunulmuştur:

> *E: Öncelikle koordinat sistemi çizmek istiyorum. Eğimden bahsedeceğim için diklik olması lazım. Bu da benim referans noktam gibi olacak, x-y düzlemi burada. Birbirine paralel doğrular çizeceğim. Eğimin tanımı, dikeydeki değişikliğin; yataydaki değişikliğe oranıydı. Burada iki farklı doğrum var. Bu açıya diyelim, doğrular birbirine paralel. Paralel doğrular arasında bazı açı eşitliği vardı. Yöndeş, iç ters gibi. Bundan faydalanacağım [oluşturduğu iki üçgendeki eş açıları belirledi]. Daha sonra eğimini hesaplamaya çalışalım [d_1 ve d_2 doğrusunun eğimini yazıyor]. Şimdi ben bunların birbirine eşit olduğunu ispat edersem, ispat edebilirim diye düşünüyorum. Burada aklıma benzerlik yapabiliriz diye geldi. Çünkü 3 açı eşit. Benzerlik neydi? Karşıdaki açıların oranları, birbirine eşitti [benzerlik oranlarını yazdı]. Mesela, şimdi ispat yaptığımı düşünüyorum. Burada işlemler yaparak bunu buldum [Eğimlerinin eşit olduğunu kurmuş olduğu*

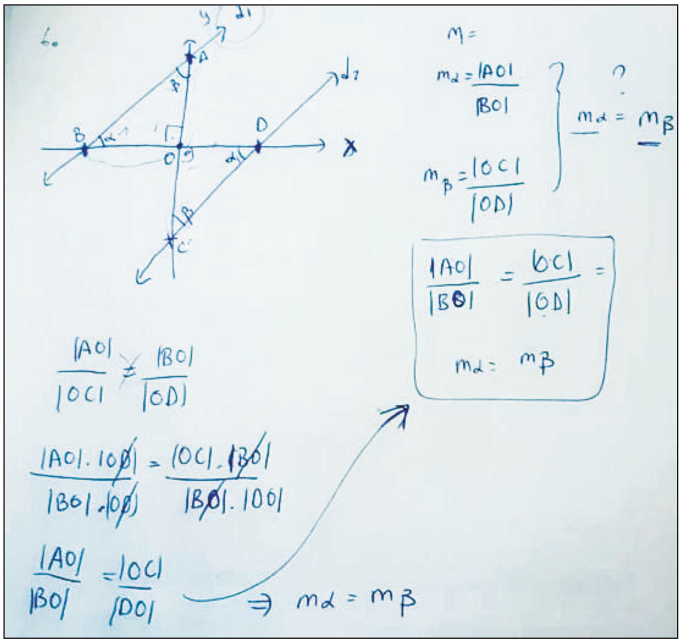


Şekil 4: Fulya'nın çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.

Tablo 4: Öğretmenlerin Analitik Kanıt Şemaları Göstergelerine Ait Dağılımları

Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergeleri	Öğretmen	Soru No
Analitik Kanıt Şeması	Dönüşümsel Kanıt Şeması	Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklarla yapılandırma	Eylül	1, 2,4, 5, 7*, 8
			Fulya	1, 2, 4, 5, 8, 9
			Selin	1, 2, 4, 5*, 9
	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanarak akıl yürütmelerle yapılandırma	Rana	7
			Fulya	7
			Selin	7,8
			Eylül	8*

***** *Bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması.*



Şekil 5: Eylül'ün çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ait cevabı.

orantılar sonucu elde etmesini kastediyor]. O zaman böyleyse $m_\alpha = m_\beta$ diye yazabilirim. Bence ispatladım.

A: Şu an aklına ilk bu yöntemin gelme sebebi nedir? (SF)

E: Eğim olduğu için koordinat sistemi çalışacaktık. Diklik lazımdı bana.

A: Eğim deyince koordinat her zaman olmalı mı?

E: Hayır, olmamalı ama benim bir şeyler yazabilmem için burada gerçi bunu yapmasak da olabilirdi. Ama dikliği burada kabul edilmiş bir şey. Doğruluğu bilinen bir şeydir. Bunun üzerinde çalışmak işimi kolaylaştırdı. Sonrası için emin değildim ama sonradan çıktığı için hani olur mu diye düşündüm.

A: Doğrulamandan nasıl emin olursun? (SF)

E: Ben kurduğum doğru bir sistem üzerinde şunu ispatlamış oldum. Bu sistem her zaman geçerli, bu sistem üzerine yanlış olmayan şeyler yazdım ve bu doğru olan şeyler de bu eşitliği buldum. Bu da zaten bana her zaman doğru olduğunu gösterir. Yani bunu alıp kullanmadım. Ben bunu yaptığım işlemler sonucunda buldum, $m_\alpha = m_\beta$.

Eylül'ün ifadelerinden ve Şekil 5'teki cevabından görüldüğü üzere mantıksal çıkarımlarda bulunduğu, Eylül'ün ifadelerinden ve Şekil 5'teki cevabından görüldüğü üzere mantıksal çıkarımlarda bulunduğu, oluşturduğu tutarlı basamaklar ile kanıtını yapılandırdığı söylenebilir. Ayrıca Eylül'ün eğimin tanımı ile eşlik arasında bağlantı kurduğu görülmüştür. Bu sebepten dolayı Eylül'ün analitik aksiyomatik kanıt şemasına ait izler de sergilediği fakat ağırlıklı olarak analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Aksiyomatik kanıt şemasına ait bulgular

Öğretmenler, çalışma kâğıdının yedinci ve sekizinci sorularında analitik aksiyomatik kanıt şemasına dair ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler "*tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanma"* şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin bu göstergelere ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Rana çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ("A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \varnothing$ ise $A \neq \varnothing$ dir." önermesini kanıtlayınız.) A kümesinin boş kümeden farklı olduğunu varsayarak başlamıştır. Bu takdirde A kümesinin bir elemanının olacağını dolayısıyla boş küme olmayacağını belirtmiştir. Fakat A kümesinin, boş kümenin alt kümesi olması için elemanının olmaması gerektiğini ve varsayımının, $A \subset \varnothing$ ile çeliştiğini ifade etmiştir. Rana'nın ilgili açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

R: Boş kümenin alt kümesi ise zaten boş kümedir. Nasıl kanıtlarız? Güzel soru. ***Şimdi boş küme hiç elemanı olmayan küme demek, yani hiç elemanı yoksa A da bunun alt kümesi ise bu da boştur*** *yani.*

A: Nasıl ikna edersin beni? (SF)

R: ***Tersine düşünüyorum. Diyelim ki mesela boş kümenin elemanı olmasın. Yani alt kümesi olmasa, sonuçta A'nın bir elemanı olacak. A'nın elemanı olursa o zaman boş küme olmaz. E, A da boş küme olduğunu söylüyor. O zaman A demek ki boş küme değil****. Bilmiyorum cümle ile anlatsam dedim ama aklıma gelmedi.*

A: Şimdi A'nın elemanı olsun, boş küme olmasın dedin. Kabul ettik.

R: Evet A'nın eleman sayısı, boş kümeden farklı olsun dedim. O zaman dur bakalım nasıl yapıyorduk? Üniversitede yapıyorduk bunu. ***Elemanın farklı olsun. O zaman boş kümeden farklıysa bir elemanı olacak. Bir elemanı varsa, zaten şeydir boş küme değildir. Ama ben boş kümenin alt kümesiysem ilk baştaki önerme ile çakışıyor. Yani bu gösterdiğim o zaman diyorum ki, demek ki ben yanlış yapıyorum. Demek ki A her zaman boş küme olmak zorunda diyorum.***

A: Bu ifadenle verilen önerme doğrulanmış oluyor mu?

R: Şimdi boş küme demek, hiçbir elemanım olmayacak demek. Bunun elemanı yoksa bunun alt kümelerinin hiçbir şekilde elemanı yok.

A: Dayanak noktan nedir peki buradaki? (SF)

R: Boş kümenin tanımı aslında. Boş küme nedir? Hiçbir şekilde elemanı olmayan küme demektir. Elemanı olsaydı zaten boş küme olmazdı. O zaman elemanım yoksa benim bütün alt kümelerim de boştur.

Yukarıdaki ifadeler incelendiğinde, Rana'nın soruyu doğrulamak için üniversitedeki bilgilerini hatırlamaya çalıştığı görülmüştür. Dolayısıyla dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği belirlenmiştir. Ancak $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğunu göstermek için $p \wedge q$ önermesini kullandığı yani çelişki yöntemi ile kanıtını yapılandırdığı görülmüştür. Dolayısıyla Rana'nın çelişki yöntemi ile kanıtın tanımından yola çıkarak neden sonuç ilişkilerini doğru biçimde kurguladığı söylenebilir. Buradan Rana'nın dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına ait izler taşıdığı fakat son ifadeleri dikkate alındığında ağırlıklı olarak analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Yapılan bu çalışma kapsamında dört ilköğretim matematik öğretmenine ait bulguları kanıt şemaları kavramsal çerçevesi altında incelenmiştir. Öğretmenlerin kanıtlarını yapılandırırken üç temel kategorideki dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait özelliklere sahip oldukları belirlenmiştir. Bu çalışma bu yönüyle alanyazındaki öğretmen adayları ile yürütülen çalışmalarla (Haverhals, 2011; İskenderoğlu, 2010, 2016; Stylianou et al., 2006; Şen & Güler, 2015; Şengül & Güner, 2013; Cihan, 2019) paralellik göstermiştir. Öğretmenlerin sahip oldukları ana kanıt şemaları incelendiğinde analitik ispat şemalarının en fazla (22 defa) kullanılan şema, dışsal kanıt şemalarının ise en az (5 defa) kullanılan şema olduğu görülmektedir. Ulusal alanyazında yapılan çalışmaların bulgularına bakıldığında sınıf kademesi arttıkça kanıt şemalarından en üst düzey olarak görülen analitik kanıt şemalarında artış olduğu belirlenmiştir (İskenderoğlu & Baki, 2011). Knuth, Choppin ve Bieda (2009) sınıf kademesi arttıkça, kanıt şemalarının dışsal kanıt düzeyinden analitik kanıt düzeyine geçiş yaptığını veya doğruluğunu gösterme şekillerinin dışsal ve deneysel çıkarımlar yerine analitik çıkarımlara doğru değiştiğini göstermiştir. Bu çalışmanın eğitim öğretim basamaklarını tamamlayan öğretmenlerle gerçekleştirildiği düşünüldüğünde, öğretmenlerin analitik kanıt şemaları özelliklerini ağırlıklı sergilemesi; belirtilen çalışmalarla paralellik göstermesinin doğal bir sonucu olarak karşımıza çıkmıştır.

Öğretmenler yapmış olduğu doğrulamalarda 10 defa deneysel kanıt şeması kullanmışlardır. Cihan (2019) ve Stylianou ve diğerleri (2006) tarafından öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda en az kullanılan şema analitik kanıt şeması iken Çontay (2017) tarafından yapılan çalışmada ise öğretmen adaylarının en sık kullandıkları şemanın dışsal kanıt şeması olduğu görülmüştür. Diğer taraftan çalışma kâğıdında bulunan sorulardan üçüncü soru iki öğretmen, dördüncü soru bir öğretmen, altıncı soru iki öğretmen, sekizinci soru bir öğretmen ve dokuzuncu soru iki öğretmen tarafından hatalı yapıldı veya boş bırakıldı. Öğretmenlerin çalışma kâğıdındaki sorulara vermiş oldukları cevaplar sonucunda tespit edilen alt kanıt şemaları Tablo 5'te detaylı bir şekilde verilmiştir.

Tablo 5'te de görüldüğü gibi öğretmenlerin yapmış oldukları kanıtlamalarda dışsal otoriter ve dışsal sembolik kanıt şeması özelliklerine ait doğrulamalarına bu çalışmada rastlanılmamıştır. Elde edilen bulgulara göre Rana Öğretmenin yapmış olduğu doğrulamalarda temel örnekler, alışkanlık edinilmiş ve aksiyomatik kanıt şemaları görülürken, Eylül Öğretmeninin yapmış olduğu doğrulamalarda dönüşümsel, algısal, alışkanlık edinilmiş, temel örnekler ve dönüşümsel, alışkanlık edinilmiş ve aksiyomatik kanıt şemaları görülmüştür. Selin Öğretmenin yapmış olduğu doğrulamalarda dönüşümsel, alışkanlık edinilmiş ve aksiyomatik kanıt şemaları görülürken, Fulya Öğretmenin yapmış olduğu doğrulamalarda dönüşümsel, temel ve aksiyomatik kanıt şemalarına rastlanılmıştır. Bu sonuçlar öğretmenlerin uygulama süreci boyunca farklı kanıt şemaları sahip olduklarını göstermektedir. Alanyazındaki araştırmalar bireylerin aynı zamanda farklı içeriklerde farklı kanıt şemaları kullanabilmekte olduğunu göstermektedir (Harel & Sowder, 1998, 2007; Raman, 2003; Weber, 2001).

Öğretmenlere yöneltilen sorulara yapılan cevaplarda en fazla dönüşümsel kanıt şeması (3 öğretmen – 17 defa) özelliklerine uygun doğrulamalar belirlenmiştir. Yani öğretmenlerin doğrulamalarında mantıksal çıkarımlarını gerçekleştirdikleri aynı zamanda işlemsel süreçler ile bunları destekledikleri ve genellemeye vardıkları söylenebilir. Mevcut bu durum Pektaş ve Bilgici (2019) 'nin öğretmen adaylarıyla yapmış olduğu araştırma ile birebir örtüşürken, lisans öğrencileri ile yapılan bazı araştırmalardaki sonuçlarla uyumlu olmadığı görülmektedir (Cihan, 2019; Çontay, 2017; Stylianou et al., 2006).

Dönüşümsel kanıt şemasının ardından en fazla kullanılan kanıt şeması temel örnekler kanıt şeması (3 öğretmen – 7 defa) olmuştur. Rana Öğretmen, çalışma kâğıdında verilen dokuz sorudan altısını cevaplamış; bu cevapların beş tanesinde deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine ait doğrulamalarda bulunurken Fulya ve Eylül Öğretmen yapmış oldukları doğrulamalarda bir defa temel örnekler kanıt şeması kullanmışlardır. Deneysel kanıt şemaları özellikleri sergileyen öğretmenler genellikle seçmiş oldukları örneklerle önermenin doğruluğunu göstererek, temel örnekler kanıt şemasını kullanmışlardır. Öğrencilerin öğretmen adaylarının verilen ifadenin doğruluğunu gösterebilmek amacıyla belirli sayısal

Tablo 5: Öğretmenlerin Alt Kanıt Şemalarının Sorulara Göre Dağılım

Sorular Öğretmenler	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rana	TÖKŞ	TÖKŞ	AEKŞ/TÖKŞ*		TÖKŞ	TÖKŞ	AkKŞ/AEKŞ*		
Eylül	DKŞ	DKŞ	AKŞ/AEKŞ*/ TÖKŞ*	DKŞ	DKŞ		AKŞ/DKŞ*	DKŞ/AkKŞ*	
Selin	DKŞ	DKŞ		DKŞ	AEKŞ/DKŞ*		AkKŞ	AkKŞ	DKŞ
Fulya	DKŞ	DKŞ	AKŞ/AEKŞ*	DKŞ	DKŞ	TÖKŞ	AkKŞ	DKŞ	DKŞ

** Bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması.* ***AEKŞ:*** *Alışkanlık edinilmiş kanıt şeması,* ***AKŞ:*** *Algısal kanıt şeması,* ***TÖKŞ:*** *Temel örnekler kanıt şeması,* ***DKŞ:*** *Dönüşümsel kanıt şeması,* ***AkKŞ:*** *Aksiyomatik kanıt şeması.*

değerler verdikleri ve böylece bunu gösterdiklerine ikna oldukları görülmüştür (Alcock & Weber, 2005; Özer & Arıkan, 2002; Sowder & Harel, 1998; Stavrou, 2014). Nitekim Harel (2008) öğrenciler arasında sıklıkla kullanılan ispat şemasının deneysel ispat şeması olduğunu belirtmiştir. Ancak araştırmaya katılan öğretmenlerden sadece bir tanesinin doğrulamalarında sıklıkla temel örnekler kanıt şemasına başvurduğu tespit edilmiştir. Bu durum kanıtlaması yapılacak ifadenin zorluğu ya da örnek verilerek yapılan doğrulamanın daha inandırıcı ve anlaşılır olmasıyla açıklanabilir. Çünkü Knuth (2002) öğretmenlerin ve Pesen (2018) ise öğrencilerin kanıt oluştururken çoğunlukla deneysel kanıt şemasını kullandıklarını ve bu kanıtların inandırıcı olarak değerlendirdiklerine vurgu yapmışlardır.

Öğretmenlerin deneysel temel örnekler kanıt şemasının ardından en fazla (4 öğretmen – 5 defa) kullandığı alt şeması aksiyomatik kanıt şeması olduğu belirlenmiştir. Bu çalışmada öğretmenlerin kanıtlamalarını ifade etme konusunda zorluklar yaşadığı görülmüş olsa da kanıtlamalarında tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullandıkları görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmenlerinin ortaokul seviyesinde kanıtı çok fazla kullanmamaları ve lisans eğitimlerinin üzerinden zaman geçmiş olması bu zorluğu yaşamalarının sebebi olarak görülmüş olsa da öğretmenler eski öğrenmelerini hatırladıkça kanıtlarında aksiyomatik kanıt şeması özelliklerini göstermişlerdir. Araştırmada 4 öğretmenin yedinci önermeye (A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \varnothing$ ise $A \neq \varnothing$ dir) ait doğrulamayı yaparken aksiyomatik kanıt şeması kullandıkları görülürken, sadece bir öğretmenin sekizinci önermeye ait doğrulamada aksiyomatik kanıt şeması kullandığı görülmüştür. Öğretmenlerin kümelerle ilgili bu soruda analitik aksiyomatik kanıt şemasını kullanmalarındaki en önemli sebeplerden biri bu konuya ait bilgi birikimleri ya da tecrübeleri olabilir. Ayrıca bu konu ile ilgili soruda ağırlıklı olarak analitik aksiyomatik kanıt şemasının kullanılması, öğretmenlerin bu konuya ait tanımlara hâkim olması ve bu tanımları kullanarak zihinlerinde kendilerine ait oluşturdukları tutarlı basamaklarla düşünme sürecine girdiklerinin bir göstergesi olabilir. Matematikte farklı alanlarda yapılan çalışmalar öğrencilere analitik ispat şemaları kullanmalarına uygun bağlamlar sağlamaktadır (Plaxco, 2012; Sears, 2019; Erickson & Lockwood, 2021).

Araştırmaya katılan öğretmenler yapmış oldukları doğrulamalarda toplamda 5 defa alışkanlık edinilmiş ispat şeması, 3 defa algısal kanıt şeması kullanmışlarıdır. Öğretmenlerin hepsinin yaptığı doğrulamalarda alışkanlık edinilmiş ispat şeması bulunurken, bu öğretmenlerden sadece ikisinin yapmış olduğu doğrulamalarda algısal kanıt şeması kullanılmıştır. Bu iki alt kanıt şemasının kullanıldığı doğrulamalarda öğretmenlerin birden fazla kanıt şemasına ait özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Bu çalışmada birden fazla kanıt şemasının kullanıldığı yedi doğrulama süreci vardır. Alışkanlık edinilmiş ispat şemasına bir kere temel örnekler kanıt şeması eşlik ederken, bir kere de dönüşümsel kanıt şeması eşlik etmiştir. Algısal kanıt şemasına iki kere alışkanlık edinilmiş kanıt şeması eşlik ederken, bir kere dönüşümsel kanıt şeması eşlik etmiştir. Aksiyomatik kanıt şemasına bir kere alışkanlık edinilmiş kanıt şeması eşlik ederken, dönüşümsel kanıt şemasına bir kere aksiyomatik kanıt şeması eşlik etmiştir. Bir matematiksel ifadenin doğrulanması sürecinde öğretmen adaylarında birden fazla ispat şeması kullanımını alanyazında baskın bir şekilde ifade edilmektedir. Bu çalışmada esas kanıt şemaları ile bu şemalara aynı doğrulama sürecinde eşlik eden kanıt şemalarındaki değişim alanyazın ile farklılık göstermektedir. Örneğin Çontay ve Paksu'nun (2019) çalışmasında alışkanlık edinilmiş kanıt şeması doğrulama sürecine eşlik eden ikinci kanıt şeması iken Sarı ve diğerlerinin (2007) ve Sears'ın (2019) çalışmalarında matematiksel ifadelerin doğrulama süreçlerine eşlik eden ikinci kanıt şemasının temel örnekler kanıt şeması olduğu görülmüştür.

Araştırmada öğretmenlerin yaptığı doğrulamalarda dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait özelliklerin kullanılmasının yanında bazı sorular boş bırakılmıştır. Öğretmenler bu sorularda eski öğrenmelerini hatırlamaya çalışmışlar, sözel olarak ifade etmeye çalışsalar da yarım bırakmışlar ve kanıtlarını yapılandıramamışlardır. Polat ve Akgün (2016) ispat sürecinde yaşanılan zorlukları birey kaynaklı ve kişi kaynaklı olabileceğine vurgu yapmaktadır. Benzer şekilde hazırbulunuşluktan kaynaklanan kavramsal yetersizlikler ispata dair farklı güçlük olarak literatürde yer almıştır (Azrou, 2013; Bayazit, 2009; Knapp, 2006; Dreyfus, 1999; Weber 2006). Bunun yanında öğretmenlerin bazı soruların doğrulamalarında yöntemsel hatalara rastlanmıştır. Örneğin $p \Rightarrow q$ şeklinde bir önermenin hükmünden yola çıkarak kanıtlarını yapılandırmaya çalışmışlar bunun doğruluğunu savunmuşlardır. $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğrulanmasının istendiği durumlarda öğrencilerin $q \Rightarrow p$ işe koşarak doğrulama yaptıkları (Genç & Akıncı, 2020; Laudien, 1999) veya $p' \Rightarrow q'$ işe koşarak doğrulama yaptıkları (Antonini & Mariotti, 2007; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2004) görülmüştür.

Sonuç olarak ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel ifadeleri doğrulama sürecinde eksikliklerinin ve yeterliklerinin kanıt şemaları çerçevesinde ele alındığı bu çalışmada; araştırmaya katılan öğretmenlerin yapmış olduğu doğrulamalarda en istendik kavram şeması olan analitik kavram şemasının en sık kullanılan şema, en istenmedik kanıt şeması olan dışsal ispat şemalarının en az kullanılan şema olması öğretmenlerin kanıtlamaya yönelik etkinlikleri yapabilme potansiyellerinin yüksek olduğunu göstermektedir (Cihan, 2019). Öğretmenlerin gerçekleştirmiş oldukları kanıtlar incelendiğinde özgün kanıtlamalar yaptığı görülmektedir. O halde öğretmenlerdeki bu potansiyeli kullanmak adına, akıl yürütmenin ve kavramsal öğrenmenin yoğun olarak yaşandığı ispatlama süreçlerine yönelik duyarlılıkların ve uygulamaların ortaokul öğretim programına, ders kitaplarına ve sınıf ortamlarına taşınması öğrencilerin doğrulama süreçleriyle daha erken yaşta tanışmaları için önerilebilir. Doğrulama süreçlerinde yer yer öğretmenlerin deneysel kanıt şemaları kullandığı gözlemlenmiştir. Oysaki öğretmenlerin doğrulama süreçlerinde öğrencilerin muhakeme ve kanıtlama becerilerinin gelişmesi için rol model olması beklenmektedir. Çünkü öğrencilerin kanıta ilişkin deneyimlerinin kaynağı olan öğretmenler olacaklardır (Healy & Hoyles, 2000; Jones, 2000). Bu durumda öğretmenlerin kanıtlama sürecine başlamadan önce süreçte etkin rol alacak tanımlara, teorem ve aksiyomlara ve yönteme sahip olmalıdırlar. Aksi durumda yapılan kanıtlama informal kanıtlamanın ötesine geçemez (Pala, 2020). Öğretmenlerin bazı durumlarda kanıta ait eski öğrenmelerini unuttukları veya yanlış kanıt yöntemi kullandıkları bundan dolayı kanıt yapamadıkları veya yanlış kanıt yaptıkları görülmüştür. Oysa belirtildiği üzere öğretmenler kanıtlamada en son basamak olarak görülen analitik kanıt şemalarını ağırlıklı olarak kullandıkları tespit edilmiştir. Dolayısıyla öğretmenlerin kanıt yapabildikleri ancak kendilerine olan özgüvenlerinde ve kanıta ait bilgilerinde eksikler olduğu görülmüştür. Bu sebeple kanıta ait bakış açılarını olumlu yönde geliştirecek ortamların yaratılması ve ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik hizmet içi eğitim programları yürütülebilir.

KAYNAKLAR

Alcock, L. and Weber, K. (2005). Referential and syntactic approaches to proof: case studies from a transition course, In Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 33-40. Melbourne.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(6), 869-890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488.

Antonini, S. & Mariotti, M. A. (2007). Indirect proof: An interpreting model. In D. PittaPantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 541–550). Cyprus: Larnaca.

Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156).

Aydoğdu, T., Olkun, S., & Toluk, Z. (2003). İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri kanıtlama süreçleri. *Eğitim Araştırmaları*, *4*(12), 64-74.

Azrou, N. (2013), Proof in Algebra at the University Level: Analysis of Students Difficulties. In Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya: Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 76-85.

Baki, A., (1999). Öğretmen Eğitimi Üzerine Düşünceler. *Türk Yurdu*, 19(138), 4-9.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi: matematik felsefesi, matematik tarihi, özel öğretim yöntemleri, ölçme ve değerlendirme*. Harf Yayınları.

Balcı, A. (2005). *Sosyal bilimlerde araştırma, yöntem, teknik ve ilkeler*. Pegem A Yayıncılık, 5. Baskı, Ankara.

Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi.

Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof* [Unpublished doctoral dissertation]. Florida State University.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical. *Educational studies in mathematics*, 23-40.

CadwalladerOlsker, T. (2007). *Proof schemes and proof writing* [Unpublished doctoral dissertation] Claremont Graduate University.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, *24*(4), 359-387.

Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Marmara Üniversitesi.

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerileri arasındaki ilişki* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Creswell, J., W. (2009). Mapping the field of mixed methods research. *Journal of mixed methods research, 3*(2), 95-108.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Çontay, E., G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Pamukkale Üniversitesi.

Çontay, E. G., & Paksu, A. D. (2018). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *10*(1), 59-100.

Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71.

Dogan, M. F. (2019). The nature of middle school in-service teachers' engagements in proving-related activities. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, *48*(1).

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1), 85- 109.

Ellis, A., B. (2007). Connections between generalizing and justifiying; Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229

Ercan, N. Ö. (2020). *Ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin a-didaktik bir ortamda geometri konularında kullandıkları kanıt şemaları* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Kastamonu Üniversitesi.

Erdoğan, A., & Erdoğan, E. (2013). Didaktik durumlar teorisi ışığında ilköğretim öğrencilerine matematiksel süreçlerin yaşatılması. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(1),17-34.

Erickson, S. A., & Lockwood, E. (2021). Investigating undergraduate students' proof schemes and perspectives about combinatorial proof. *Journal of Mathematical Behavior, 62,* 100868.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics, 8*(5), 269-279.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School science and mathematics*, *106*(3), 124-132.

Genç, M. & Akıncı, M. (2020) Errors in using convergence tests in infinite series. *Acta Didactica Napocensia, 13*(2), 113-127.

Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning, 2*(3), 209-219.

Grigoriadou, O. (2012). *Reasoning in geometry. How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof* [Unpublished master's thesis]. University of Amsterdam.

Güner, P. (2012*). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Marmara Üniversitesi.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, *30*(316), 35-45.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1).

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*(2).

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In *Theorems in school* (pp. 65-78). Brill Sense.

Harel, G., & Rabin, J., M. (2010). Brief Report: Teaching Practices Associated With the Authoritative Proof Scheme. *Journal for research in mathematics education, 41*(1), 14-19.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM-International Journal of Mathematics Education, 40*(3), 487-500.

Haverhals, N. J. (2011). *Students' development in proof: A longitudinal study.* University of Montana.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). A Study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31(4)*, 396-428.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(2), 139-158.

Houssart, J., & Evens, H. (2011). Conducting task-based interviews with pairs of children: consensus, conflict, knowledge construction and turn taking. *International Journal of Research & Method in Education, 34*(1), 63-79.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Boğaziçi Üniversitesi.

İskenderoğlu Aydoğdu, T. (2003). *Farklı Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Abant İzzet Baysal Üniversitesi.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Şemaları* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.

İskenderoğlu Aydoğdu T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. *Matematik eğitiminde teoriler*, 65-84.

İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *9*, 531-536.

İskenderoğlu Aydoğdu, T., & Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *11*(4), 2275-2290.

Johnson, B., & Christensen, L. (2004). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (2nd ed.). Needham Heights, MA: Allyn ve Bacon.

Jones, K. (1997). Student-teachers' conceptions of mathematical proof. Mathematics Education Review, 9, 16-24.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(1), 53-60.

Keçeli-Bozdağ, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press on Demand.

Knapp, J. L., 2006. *Students'* Appropriation of Proving Practices in Advanced Calculus [Unpublished doctoral dissertation]. Arizona State University.

Knapp, J., & Zandieh, M. (2004). Examples as tools for understanding proof ın geometry. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education October 2004 Toronto, Ontario, Canada*, 675.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. N. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 206-211.

Koichu, B. (2009). What can pre-service teachers learn from interviewing high school students on proof and proving?. In *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-15). The Weizmann Institute of Science.

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers*. Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 349-365.

Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. In F. Hitt & and M Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225-231). Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science Mathematics, and Environmental Education.

Lee, W. I. (1999). *The relationship between students' proof-writing ability and van Hiele levels of geometric thought in a college geometry course*. University of Northern Colorado.

Maher, C. A., & Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 821-824.

McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *4*(2), 223-242.

Mcmillan, J., H. (2000). *Educational Research: Fundamentals fort he consumer.* New York: Longman.

Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM*, *40*(3), 341-344.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124.

Martin, W., G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, *20*(1), 41-51.

Mejia-Ramos, J., P., & Tall, D. (2005). Personal and public aspects of formal proof: A theory and a single-case study.

Mingus, T. T., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, *99*(8), 438-444.

Moralı, S., Uğurel, İ., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147-160.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VI: National Council of Teachers of Mathematics.

Norby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* [Unpublished doctoral dissertation]. Montana State University.

Ören, D. (2007*) Onuncu sınıf öğrencilerinin geometrideki ispat şemalarının bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre incelenmesine yönelik bir çalışma* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Orta Doğu Teknik Üniversitesi.

Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, *2*, 1083-10989.

Pala, O., (2020) *İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi* [Yayınlanmamış Doktora Tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.

Pala, O., & Narlı, S. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(3), 449-475.

Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Marmara Üniversitesi.

Pektaş, O., & Bilgici, G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusunda kullandıkları kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *27*(3), 1347-1358.

Pesen, M. (2018). *An examination of the proof and argumentation skills of eighth-grade students* [Unpublished Master Thesis]. Boğaziçi University.

Plaxco, D., B. (2011). *Relationship between students' proof schemes and definitions* [Unpublished doctoral dissertation]. Virginia Tech.

Plaxco, D. (2012). Relationships between mathematical proof and definition. In L. R. Van Zoest, J.-J. Lo, & J. L. Ktratky (Eds.), *Proceedings of 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167–173). Kalamazoo, MI: Western Michigan University

Polat, K., & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *43*, 423-438.

Raman, M.(2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. Educational Studies in Mathematics, 52, 319–325

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics, 48*(1), 83-99.

Riley, K. J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations.* Montana State University, Montana.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate Students' Mathematical Proof Processes in a Calculus Course: A Case Study. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40*(2), 295-319.

Sears, R. (2019). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning, 11*(4), 258–274.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, *34*(1), 4-36.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 373-393.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675.

Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 3*(2), 251-267.

Soto, O. D. (2010). *Teacher change in the context of a proof-centered Professional development*. University of California, San Diego and San Diego State University.

Stavrou, S.G. (2014). Common errors and misconceptions in mathematical proving by education undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*(1), 1-8.

Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students proof schemes: a closer look at what characterizes students proof conceptions. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 54-60).

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 133-162.

Şen, C., & Güler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research*, *3*(9), 617-631.

Şengül, S., & Güner, P. (2013). DNR tabanlı eğitime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(2).

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some. In *Conference of the University of Chicago School Mathematics Project*.

Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. In *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 223-235). Springer, Dordrecht.

Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, *36*, 31-35.

Uygan, C., Tanışlı D. & Köse N. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education,5(2),* 137-157.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101-119.

Weber, K. (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F. Hitt, G. Harel & S. Hauk (Eds.), *Research in college mathematics education,* VI (pp. 197- 232). RI: American Mathematical Society.

Yeşildere, S., & Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40*(1), 181-213.

Yin, R., K. (2009). Designing case studies. *Qualitative research methods*, *5*(14), 359-386.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2018). *Nitel Araştırma Yöntemleri.* (11. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Kastamonu Üniversitesi.

EKLER

Ek 1: Çalışma Kâğıdı (Pilot Uygulama Öncesi)

1. İkizkenar üçgenin taban açılarının eşit olduğunu gösteriniz.
2. İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikmenin tabanı iki eş parçaya böldüğünü gösteriniz.
3. *a* ve *b* pozitif reel sayılar olmak üzere $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$ olduğunu gösteriniz.
4. Sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu gösteriniz.
5. $\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu gösteriniz.
6. Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu gösteriniz.
7. *x* tamsayı olmak üzere, eğer 5*x* - 11 çift tamsayı ise *x* tek tamsayıdır.
8. *x* tamsayı olmak üzere, eğer 5*x* - 7 tek ise o zaman 9*x* + 2 çift tamsayıdır.
9. *n* kenarlı düzgün çokgenin köşegen sayısının $\frac{n.(n+3)}{2}$ olduğunu gösteriniz.
10. *n* kenarlı bir düzgün çokgenin dış açılar toplamının 360° olduğunu gösteriniz.
11. *n* kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılar toplamının (n - 2).180° olduğunu gösteriniz.
12. *a, b* $\in$ *IR* ve *c* $\in$ IR^- olmak üzere, eğer a > b ise *c.a* < *c.b* olduğunu gösteriniz.
13. *A* evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer A $\subset \varnothing$ ise A = $\varnothing$ olduğunu gösteriniz.
14. Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimlerinin eşit olduğunu gösteriniz.
15. Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı -1 olduğunu gösteriniz.

Ek 2: Çalışma Kâğıdı (Pilot ve Asıl Uygulama)

1. "İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir." Önermesini kanıtlayınız.
2. "İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler." Önermesini kanıtlayınız.
3. "Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir." Önermesini kanıtlayınız.
4. "*x* tamsayı olmak üzere, 5*x* - 11 çift tamsayı ise *x* tek tamsayıdır." Önermesini kanıtlayınız.
5. "*x* tamsayı olmak üzere, 5*x* - 7 tek tamsayı ise 9*x* + 2 çift tamsayıdır." Önermesini kanıtlayınız.
6. "*a, b* $\in$ *IR ve c* $\in$ IR^- olmak üzere, eğer *a* > *b* ise *c.a* < *c.b* dir." Önermesini kanıtlayınız.
7. "A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer A $\subset \varnothing$ ise A = $\varnothing$ dir." Önermesini kanıtlayınız.
8. "Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir." Önermesini kanıtlayınız.
9. "Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı −1'dir." Önermesini kanıtlayınız.

Ek 3: Kanıt Süreçlerine Ait Soru Formu (Pilot ve Asıl Uygulama)

1. Önermeyi kanıtlar mısın?
2. Önermenin doğruluğunu nasıl gösterirsin?
3. Önermenin doğruluğunu nasıl kanıtlarsın?
4. Önermenin doğruluğuna beni nasıl ikna edersin?
5. Göstermiş olduğun kanıtlamayı her durumda kullanır mısın?
6. Aklına gelen ilk doğrulama bu muydu?
7. Aklına ilk bu yöntemin gelme sebebi nedir?
8. Gerçekleştirdiğin doğrulamadaki yöntemi neden kullandın?
9. Kanıtlamanın doğru olduğundan nasıl emin olursun?
10. Başka yöntemle de kanıtlayabilir misin?