

Matematik Öğretmenlerinin İspat Kavramına İlişkin Görüşleri

Kenan KONUR¹

Betül KESKİN²

Gönderim Tarihi: 08.11.2022 Yayın Tarihi: 31.12.2022 Makale Türü: Araştırma Makalesi

Öz

İspat kavramı matematik eğitiminde önemli bir yere sahiptir. Matematik dersi öğretim programları; öğretmen ve öğrencilere ispatın doğası ve rolü ile ilgili zengin fırsat ve deneyimler sunsa da öğretmenlerin öğrencilerine bu kapsamda cevap vermeleri büyük ölçüde öğretmenlerin ispat kavramına ilişkin sahip oldukları bilgilerine bağlıdır. Bu çalışmada okullarda görev yapan 24 ilköğretim ve 11 ortaöğretim matematik olmak üzere toplam 35 öğretmenin ispat kavramına yönelik görüşleri incelenmiştir. Çalışma, nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması esas alınarak yürütülmüştür. Çalışmanın verileri araştırmacı tarafından geliştirilen yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığıyla toplanmıştır. Toplanan veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre öğretmenler, ispatın amacını en çok "Kalıcılık" kategorisi ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir. Öğretmenlerin birçoğu öğretim sürecinde ispatın kullanılmasının, öğrencilerin bilgileri ezber yapmadan öğrenmelerine olanak sağladığını ve bu sayede öğrenilen bilgilerin öğrencilerin zihinlerinde kalıcı olduğunu vurgulamışlardır. Ayrıca araştırma sonuçları genel olarak öğretmenlerin ispat kavramına yönelik sınırlı görüşlere sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışma sınırlı sayıda öğretmenle gerçekleştirilmiştir. Katılımcı sayısının artırılarak benzer çalışmalar yürütülebilir. Öğretmenlerin ispat yapma düzeylerine, ispat yapma sürecinde kullandıkları yaklaşımlara, yöntemlere veya stratejilere ilişkin çalışmalar yapılabilir. İspat kullanımına yönelik uygulama ortamlarında gözlem yapılarak öğretmenlerin sınıfta ispat kullanım sıklıkları daha açık şekilde belirlenebilir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İspat, Matematik Öğretmenleri, İspata Yönelik Görüş

Views on Mathematics Teachers on the Concept of Proof

Abstract

The concept of proof has an important place in mathematics education. Mathematics lesson curricula although it provides teachers and students with rich opportunities and experiences about the nature and role of proof, teachers' response to their students in this context largely depends on teachers' knowledge of the concept of proof. In this study, the opinions of 35 teachers, 24 primary and 11 secondary mathematics teachers, working in schools, on the concept of proof were examined. The study was conducted based on case study, which is one of the qualitative research designs. The data of the study were collected through a semi-structured interview form developed by the researcher. The collected data were analyzed by content analysis method. According to the results of the research, it was determined that the teachers mostly associated the purpose of proof with the category of "Persistence". Many of the teachers emphasized that the use of proof in the teaching process allows students to learn the information without memorizing, and thus the learned information is permanent in the minds of the students. In addition, the results of the research showed that teachers generally have limited views on the concept of proof. This study was carried out with a limited number of teachers. Similar studies can be carried out by increasing the number of participants. Studies can be conducted on teachers' levels of proof, the approaches, methods, or strategies they use in the process of proving. By making observations in practice environments for the use of proof, the frequency of

¹ Sorumlu Yazar: Kenan Konur, Arş. Gör., Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Türkiye, kkonur@cumhuriyet.edu.tr, ORCID ID: 0000-0001-8708-9009

² Betül Keskin, Yüksek Lisans Öğrenci, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Türkiye, 20199423006@cumhuriyet.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-3341-2656

teachers' use of proof in the classroom can be determined more clearly.

Key Words: Mathematical Proof, Mathematics Teachers, Views on Proof

Giriş

Pozitif bilimlerin ortak amacı elde edilen bilgileri doğrulamaktır. Bu doğrulama, fen bilimlerinde deney ve gözlemler ile sağlanabilirken matematiksel bilgilerin doğrulanmasında bu yöntemler yeterli olmayabilir. Matematiğin aksiyomatik bir sistem olduğu göz önüne alındığında aksiyomlardan yola çıkarak teoremlerin inşa edilmesinde ve bu teoremlerin doğrulanmasında ispat kavramı devreye girecektir (Dede ve Karakuş, 2014).

İspat kabaca yeterli delil göstererek bir yargı, sav ya da üretilen bir fikrin doğruluğunu ya da yanlışlığına ikna etme veya kabul ettirmedi (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014). Türk Dil Kurumu (TDK) sözlüğünde ise ispat, “Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt” olarak tanımlanmaktadır (TDK, 2020).

Bir dilde kurulan cümleleri, hüküm bildirenler ve hüküm bildirmeyenler olarak iki sınıfa ayırarak kategorize edilebiliriz. Hüküm bildiren cümlelere önerme, şart veya şartlara bağlı önermelere koşullu önerme denilmektedir (Argün vd., 2014). Matematikçiler ve matematik eğitimcileri belirtilen bu önermelerin doğrulanmasını matematiksel ispat ile gerçekleştirmektedirler. Mevcut matematiksel ispat geleneğinin kökenleri yaklaşık M.Ö. 300 yıllarında Yunan matematikçi Öklid tarafından yayımlanan Öklit’ in Elementleri isimli esere dayanmaktadır (Almeida, 2003). 18. ve 19. yüzyılların başlarında, esasen Hint ve Çin kanıt geleneklerine benzeyen Avrupa matematiği sezgisel bir ispat geleneği izlemiştir (Kline, 1982). Bu kapsamda ispat geleneklerinin, sırasıyla, “inandırıcı gösteriler” veya “ikna etmeye ve aydınlatmaya hizmet eden açıklayıcı notlar” olarak tanımlanabileceği söylenebilir. 1799 yılında ise önde gelen matematikçi Gauss ispat yaparken inandırıcılık fikrini kullanmıştır (Almeida, 2003). Sadece 19. yüzyılda Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange ve Weierstrass gibi önde gelen matematikçilerin eleştirel düşünmesi, matematikte mevcut tümdengelimsel geleneğin temellerini atmıştır (Kline, 1982). Öklid’in “Elementler” isimli kitabı 20. Yüzyılın sonuna kadar Batı’da eğitim görmüş bütün insanlar için bilinen bir eser olmuş ve geometri derslerinde okutulmuştur. Bu kitap Pisagor Teoremi gibi geometrinin bilinen teoremlerinin yanı sıra asal sayıların sonsuz olduğunu ve $\sqrt{2}$ ’nin irrasyonel olduğunu gösteren ispatları da içermektedir (Wikipedia, 2020).

Matematikte ispatın rolüne ilişkin bilinçli bir görüş; ispatın, matematiğin kendisini yansıttığını iddia eden herhangi bir matematik müfredatının parçası olması gerektiğini ve ayrıca matematiğin kendi kilit işlevlerinde biri olan anlamayı teşvik etmeyi sınıfta yansıttığını savunmaktadır (Hanna, 1995). Matematiksel ispatın işlevleri arasında (i) doğrulama, (ii) sistematizasyon (çeşitli sonuçların aksiyomlar, ana kavramlar ve teoremler halinde düzenlenmesi), (iii) keşif, (iv) iletişim (matematiksel bilginin aktarılması), (v) ampirik bir teorinin oluşturulması, (vi) bir tanımın anlamının veya varsayımının sonuçlarının araştırılması ve (vii) iyi bilinen bir gerçeğin yeni bir çerçeveye dahil edilmesi yer almaktadır (Hanna, 2002). Yine Almeida (2003) benzer olarak matematiksel ispatın (i) bir sonucu doğrulamak; (ii) iletişim kurmak ve diğerlerini ikna etmek; (iii) bir sonuç keşfetmek ve (iv) sonuçları bir tümdengelim sistemine sistematize etmek için kullanıldığını belirtmektedir.

İspatlar matematiksel nesnelere hakkında bazı iddialarda bulunur. Bu tür iddiaları anlamak için eğitim gerekir ve matematik ne kadar ileri olursa gerekli eğitim de o kadar uzun sürer (Ernest,

1994). İleri matematikte eğitime başlayan öğrenciler, matematiksel kültürün çalışmalarına aşına olmadan önce ispat konusunda büyük zorluklarla karşılaşır. Bu doğrultuda ispat öğretimi ve öğrenimi ile ilgili makalelerde son zamanlarda bir artış olduğu görülmektedir. Matematik eğitiminin önde gelen dergileri bu konuda yüzlerce araştırma makalesi yayınlamıştır. Bu durum ispatın matematik eğitiminde öne çıkan bir konu olduğunun göstergesidir (Hanna, 2000).

Martin ve Harel (1989) yapmış oldukları çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarından bilindik veya bilindik olmayan bir ifadenin tümevarım ve tümdengelim doğrulamalarının matematiksel doğruluğunu yargılamalarını istemişlerdir. Çalışma sonuçlarına göre her bir ifade için öğrencilerin yarıdan fazlası tümevarımsal bir kanıtı, %60'tan fazlası ise doğru bir tümdengelim kanıtını geçerli bir matematiksel kanıt olarak kabul etmişlerdir. Ayrıca bilindik ve bilindik olmayan ifadeler için sırasıyla %38 ve %52 oranında yanlış bir tümdengelim kanıtını matematiksel olarak doğru kabul ederlerken öğrencilerin üçte birinden fazlası aynı anda bir tümevarım ve doğru bir tümdengelim kanıtını matematiksel olarak kabul etmişlerdir. Healy ve Hoyles (2000) cebirde ispat konusunda başarılı 14-15 yaş grubundaki öğrencilerle yapmış oldukları çalışmalarında ise seçmiş oldukları öğrencilerin iki farklı ispat kavramına sahip olduklarını belirlemişlerdir. Çalışmada ayrıca öğrencilerin vermiş olduğu yanıtların onların matematiksel yeterliliklerinden, ispata yönelik görüşlerinden, cinsiyetlerinden ve müfredat faktörlerinden etkilendiğini vurgulamışlardır. Knuth (2002a) ise yapmış olduğu çalışmasında 16 ortaokul matematik öğretmenin ispat kavramlarını incelemiştir. Çalışma sonuçları, öğretmenlerin ispatın matematikte oynadığı çeşitli rolleri fark ettiklerini gösterdiğini fakat öğretmenlerin çoğunun ispatın doğası hakkında sınırlı görüşe sahip olduğunu, ispatın ne olduğu konusunda yetersiz anlayış sergilediklerini göstermiştir. Yine bir başka çalışmasında 17 deneyimli matematik öğretmenin ortaokul matematiği bağlamında kendi bakış açılarından incelemiştir (Knuth, 2002b). Çalışma sonuçları, "herkes için kanıt" uygulamasının öğretmenler için zor olduğu, öğretmenlerin ispatı öğrencilerin azınlık bir kısmının matematik eğitimi için uygun olduğunu belirttiklerini ve ayrıca öğretmenlerin ispatı pedagojik olarak sınırlı bir şekilde, yani matematiği iletme ve çalışmak için bir araçtan ziyade bir çalışma konusu olarak görme eğiliminde olduklarını göstermiştir. Yine benzer olarak lise matematik öğretmenlerinin okul matematiğinde ispatın amaçlarına bakış açılarını inceleyen (Dickerson ve Doerr, 2014), daha az deneyime sahip matematik öğretmenlerinin lisedeki ispatların katı dil ve muhakeme standartlarına uyması gerektiğine inanma eğiliminde olduklarını, daha fazla deneyime sahip öğretmenlerin ise somut veya görsel özelliklere dayalı ispatların lise matematiği için daha uygun olduğuna inanma eğiliminde olduklarını belirtmişlerdir.

Yapılan reform çalışmalarında, öğretmen ve öğrencilere matematik müfredatları aracılığıyla ispatın doğası ve rolünü yansıtarak zengin fırsatlar ve deneyimlerin sunulduğunu ancak öğretmenlerin bu çağrıya cevap vermelerindeki başarılarının büyük ölçüde kendi ispat kavramlarına ilişkin bilgilerine bağlı olduğu belirtilmektedir (Knuth, 2002a). Öğretmenin, ilk aşamalarda varsayımların gerçekliği veya sahteliği hakkında yorum yapmaması önemlidir. Böylece öğrenciler gerçekten akranlarını ikna etme görevi ile karşı karşıya kalırlar. Öte yandan, matematik eğitimcilerinin temel görevlerinden biri, sınıfta kullanımını artırabilmek için öğretimde ispatın rolünü anlamaktır (Hanna, 2002).

Bu kapsamda yapılan bu çalışmada matematik öğretmenlerinin ispat kavramlarına ilişkin bilgileri, kullanmalarındaki amaç ve kullanma sıklıkları sorgulanmıştır. Bu sebeple bu çalışmanın ilerleyen zamanlarda yapılacak benzer araştırmalara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Yapılan bu araştırmada, öğretmenlerin ispatla ilgili görüşlerini bir bütün olarak ortaya koymak amaçlandığından nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması (örnek olay) esas alınarak yürütülmüştür. Durum çalışması, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam & Tisdell, 2015). Yin (1984), durum çalışmasını, araştırmacının olaylar üzerinde kontrolünün olmadığı veya çok az olduğu, araştırmada nasıl ve niçin sorularına odaklanılan ve son olarak olay ya da olgu kendi doğal yaşam çerçevesinde çalışıldığında gerçek yaşam ile olay ya da olgunun arasındaki ilişkinin yeterince net olmadığı durumlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlamaktadır.

Çalışma Grubu

Katılımcılar, araştırmanın yapılacağı birey ya da grupların araştırma sürecine kolay bir şekilde dâhil edilebilmesini (Ekiz, 2017) ve bu sayede zamandan, paradan ve çabadan tasarruf edilmesini (Creswell, 2009) sağlayan kolay ulaşılabilir durum örnekleme yöntemi kullanılarak belirlenmiştir. Çalışmaya, 2022-2023 eğitim öğretim yılı birinci döneminde farklı illerde görev yapan 24 ilköğretim matematik öğretmeni ve 11 ortaöğretim matematik öğretmeni olmak üzere toplam 35 matematik öğretmeni dahil edilmiştir. Katılımcılara araştırmanın amacı açıklanmış ve araştırmaya katılımın gönüllülük esasına dayandığı belirtilmiştir. Ayrıca katılımcıların isimleri gizlilik esasına dayalı olarak Ö₁, Ö₂,...,Ö₃₅ şeklinde kodlanmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenlerin demografik özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Çalışma Grubuna İlişkin Demografik Özellikler

	f	
	İlköğretim matematik öğretmenliği	24
Mezun olduğu bölüm	Ortaöğretim matematik öğretmenliği	3
	Matematik bölümü	8
Görev yaptığı okul	Ortaokul	25
	Lise	10
Bağlı olduğu kurum	MEB	25
	Özel	10
Deneyim	1 yıldan az	14
	1-5 yıl arası	12
	6-10 yıl arası	2
	11-15 yıl arası	2
	16 yıl ve üstü	5

Veri Toplama Aracı ve Verilerin Toplanması

Öğretmenlerin matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla araştırmacı tarafından hazırlanan açık uçlu sorulardan oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Görüşme formu araştırmacı tarafından literatürden faydalanılarak hazırlanmıştır. Kapsam geçerliliğini sağlamak amacıyla görüşme formu ispat kavramına yönelik çalışması bulunan bir matematik eğitimcisine gönderilmiştir. Matematik eğitimcisi tarafından verilen dönütler doğrultusunda sorular yeniden düzenlenmiş ve görüşme formuna son hali verilmiştir. Görüşme formunda yer alan sorular aracılığıyla ispat kavramının öğretmenler için ne anlama geldiği, amacı, önemi ve ne sıklıkla kullanıldığının sorgulanması amaçlanmıştır. Son hali verilen görüşme soruları şu şekildedir:

1. Matematiksel ispat kavramını nasıl tanımlarsınız?
2. Matematiksel ispat yapmaktaki amacınız nedir?
3. Matematiksel ispat yapmak sizce önemli midir? Sebepleriyle açıklar mısınız?
4. Matematiksel ispatı meslek hayatınızda ne sıklıkla kullanıyorsunuz?

Verilerin Analizi

Araştırmanın verileri nitel veri analiz yöntemlerinden biri olan içerik analizi yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Straus ve Corbin (1990) daha önceden belirlenmiş kavramlara göre yapılan kodlama, verilerden çıkarılan kavramlara göre yapılan kodlama ve genel bir çerçeve içinde yapılan kodlama olmak üzere üç tür kodlama biçiminden söz etmektedirler (Akt: Yıldırım ve Şimşek, 2008). Yapılan bu çalışmada verilerden çıkarılan kavramlara göre yapılan kodlama türü kullanılmıştır. Toplanan verilerin analizi sonucunda kodlar ve kategoriler belirlenmiştir. Ardından belirlenen kod ve kategorilere yönelik uzman görüşü alınmıştır. Gerekli düzeltmeler yapıldıktan sonra kod ve kategorilere son hali verilmiştir.

Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Geçerlik çalışması kapsamında; kodlama, tema oluşturma ve içerik analizinde esas alınan soruların belirlenmesinde iki farklı matematik eğitimcisinden uzman görüşü alınmıştır. Kodlamaların güvenilirliğinin sağlanması amacıyla toplanan veriler içerisinden rastgele seçilen iki görüşme formu ise farklı üç matematik eğitimcisi tarafından kodlanmıştır. Kodlamalardan elde edilen frekansların uyum oranı Miles ve Huberman (1984) tarafından geliştirilen formül aracılığıyla hesaplanmıştır:

$$\text{Güvenirlik} = \frac{\text{Uzlaşma Sayısı}}{\text{Uzlaşma Sayısı} + \text{Uzlaşmama Sayısı}}$$

Güvenirlik katsayısının değerinin 0.70 veya üzerinde olması, araştırma için güvenilir kabul edilmektedir (Miles ve Huberman, 1984). Araştırmanın Miles ve Huberman güvenilirlik katsayısı 0.84 olarak bulunmuştur. Bu değer güvenilirlik açısından yeterli olduğu söylenebilir.

Bulgular

Öğretmenlerin Matematiksel İspatın Anlamına Yönelik Görüşleri

Öğretmenlerin matematiksel ispat kavramına ilişkin görüşlerini almak için öğretmenlere “matematiksel ispat kavramını nasıl tanımlarsınız? İspat kavramı sizin için ne ifade ediyor?” soruları yöneltilmiştir. Öğretmenlerin soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiştir ve Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2. Matematiksel İspat Kavramına İlişkin Öğretmen Görüşlerinin Dağılımı

Kategori	Kod	Öğretmenler
Doğruluk	Doğruluğun kanıtlanması	Ö ₁ , Ö ₃ , Ö ₇ , Ö ₈ , Ö ₉ , Ö ₁₄ , Ö ₁₅ , Ö ₁₆ , Ö ₁₇ , Ö ₁₉ , Ö ₂₀ , Ö ₂₁ , Ö ₂₂ , Ö ₂₃ , Ö ₂₅ , Ö ₂₇ , Ö ₃₀ , Ö ₃₁ , Ö ₃₂ , Ö ₃₄ , Ö ₃₅
	Teoremin geçerliliği	Ö ₂₄
	Aksiyomlarla ispat	Ö ₄
Kesinlik	Formüllerin kesinliği	Ö ₁₀
	Kuralların nereden geldiği	Ö ₂ , Ö ₁₈ , Ö ₂₉ , Ö ₃₃
Öğrenme	Formülün nedenleri	Ö ₁₂ , Ö ₂₆
	Teorem ispatı anlamlandırmak	Ö ₅
	Matematiğin anlaşılabilirliği	Ö ₁₅
İkna	İkna etme	Ö ₃₁
	Konu bütünlüğü	Ö ₁₃
Keşfetme	Yeni bilgi	Ö ₂₀
	Kurallar arası ilişki	Ö ₆
	Tahmin	Ö ₁₄

Tablo 2’den anlaşılacağı gibi öğretmenlerin büyük bir bölümü matematiksel ispatı doğruluğun kanıtlanması olarak tanımlamışlardır. Bununla ilgili örnek ifadeler şu şekildedir:

Ö₃. “Matematiksel ispat bir hipotezin aksiyomlar yardımıyla doğruluğunun kanıtlanmasıdır.”

Ö₈. “Bir önermenin doğruluğunu göstermektir.”

Öğretmenlerin Matematiksel İspatın Amacına Yönelik Görüşleri

Öğretmenlerin matematiksel ispat kavramının amacına ilişkin görüşlerini almak için öğretmenlere “matematiksel ispat yapmaktaki amacınız nedir?” sorusu yöneltilmiştir. Öğretmenlerin soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiştir ve Tablo 3’te sunulmuştur.

Tablo 3. Matematiksel İspat Kavramının Amacına İlişkin Öğretmen Görüşlerinin Dağılımı

Kategori	Kod	Öğretmenler
Doğruluk	Doğruluğun kesinliği	Ö ₁ , Ö ₁₅ , Ö ₁₉ , Ö ₂₄ , Ö ₃₅
Kalıcılık	Ezber yapmadan	Ö ₃ , Ö ₄ , Ö ₅ , Ö ₁₃ , Ö ₁₅ , Ö ₁₆ , Ö ₁₇ , Ö ₁₈ , Ö ₂₁ , Ö ₂₇ , Ö ₃₁
	Kalıcı	Ö ₆ , Ö ₇ , Ö ₈ , Ö ₁₀ , Ö ₁₄ , Ö ₂₉ , Ö ₃₀ , Ö ₃₂
	Bilgiyi anlamlandırma	Ö ₉ , Ö ₂₀
Anlamlandırma	Transfer etme	Ö ₉
	Somutlaştırma	Ö ₂₅
	Açıklama	Ö ₂₃
Öğrenme	Formülün nereden geldiği	Ö ₂₂ , Ö ₂₈ , Ö ₃₂ , Ö ₃₃ , Ö ₃₄
	Mantıklı cevap	Ö ₂
	Daha iyi öğrenme	Ö ₂₆
Keşfetme	Keşfetme	Ö ₂₃ , Ö ₃₁
	Merak giderme	Ö ₅ , Ö ₁₂ , Ö ₁₉
Duyuşsal özellik	İlgi çekme	Ö ₁₁

Tablo 3'ten anlaşılacağı gibi öğretmenlerin büyük bir bölümü matematiksel ispatın amacını kalıcılıkla ilişkilendirmiş ve öğrenilecek bilgilerin bu sayede ezber yapmadan edinilebileceği yönünde görüş bildirmişlerdir. Bununla ilgili örnek ifadeler şu şekildedir:

Ö₁. "... doğrunun kesinliğini sağlamak amacıyla matematiksel ispat yapılır."

Ö₁₆. "... ezberleyerek değil de mantığa dayalı şekilde neyin nereden geldiğini göstererek..."

Ö₁₄. "... soyut kavramları insanların zihinlerinde daha kalıcı etikler bırakarak öğretme ihtiyacıdır."

Ö₉. "Matematiksel ispat öğrencinin bilgiyi anlamlandırmasına ve transfer edebilmesine yardımcı olur..."

Ö₃₂. "Formülün nereden geldiğini bilen öğrenci bunu unutmaz, kalıcılığı artırmaya yarar."

Ö₅. "Matematiksel ispat yapmak öğrencilerin bu nereden geliyor sorusunu, merakını cevaplıyor."

Ö₁₁. "...bilginin nerden geldiğini anlayarak ilgi çekici bilginin tarihi süreciyle beraber mantıksal ispatını yaptığımda öğrenciler daha rahat anlıyor."

Öğretmenlerin Matematiksel İspatın Öneme Yönelik Görüşleri

Öğretmenlerin matematiksel ispat kavramının önemine ilişkin görüşlerini almak için öğretmenlere "matematiksel ispat yapmak sizce önemli midir? Sebepleriyle açıklar mısınız?" sorusu yöneltilmiştir. Öğretmenlerin soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiştir ve Tablo 4' te sunulmuştur.

Tablo 4. Matematiksel İspat Kavramının Önemine İlişkin Öğretmen Görüşlerinin Dağılımı

Kategori	Kod	Öğretmenler
Doğru bilgiye ulaşma	Dayandırma	Ö1,Ö18,Ö21, Ö24
	Doğru bilgi	Ö1
Tatmin, ikna	İkna	Ö1,Ö6,Ö12, Ö35
	Kavram kargaşası giderme	Ö8
Kalıcılık	Kalıcılık	Ö11,Ö28,Ö31, Ö32
	Ezbersiz	Ö9,Ö15,Ö32
Fayda sağlama, öğretme	Kendini geliştirme	Ö3
	Kolay kavrama	Ö3
Keşif	Yol gösterici	Ö5
	Keşfettirici	Ö5,Ö16,Ö20, Ö29
Anlamlandırma	Dersin anlamlı olması	Ö10,Ö23,Ö32
	Anlamlandırmak	Ö22
	Somutlaştırma	Ö4,Ö34
	Nedenini anlamak	Ö27,Ö29
Matematiksel beceri ve öğretim teknikleri	Sistemli	Ö25
	Beyin fırtınası	Ö3,Ö13
	Akıl yürütme	Ö14
Önemsiz	Matematiksel düşünme	Ö5,Ö14,Ö15, Ö17,Ö30
	Öğrenci için gereksiz	Ö26

Tablo 4'e göre öğretmenlerin büyük bir bölümü matematiksel ispatın önemini anlamlandırma ve kalıcılıkla ilişkilendirmiştir. Bir öğretmen ise ispat kavramının önemsiz olduğu belirtmiştir. Bununla ilgili örnek ifadeler şu şekildedir:

Ö32. “Konunun anlamlı bir şekilde öğrenilmesine katkı sağlar.”

Ö28. “Kalıcılığı sağlamak için en önemli adımdır.”

Ö26. “Öğrenciler bunu pek istemezler. Lisede o kadar önemli değildir.”

Öğretmenlerin Matematiksel İspatın Kullanımına Yönelik Görüşleri

Öğretmenlerin matematiksel ispat kavramının önemine ilişkin görüşlerini almak için öğretmenlere “matematiksel ispatı meslek hayatınızda ne sıklıkla kullanıyorsunuz?” sorusu yöneltilmiştir. Öğretmenlerin soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiştir ve Tablo 5' de sunulmuştur.

Tablo 5. Matematiksel İspatın Kullanımına İlişkin Öğretmen Görüşlerinin Dağılımı

Kategori	Kod	Öğretmenler
Kullanıyorum	Her konuda	Ö ₅ ,Ö ₇ ,Ö ₁₁ , Ö ₁₃
	Genelde	Ö ₂₅ ,Ö ₂₆ ,Ö ₂₉ , Ö ₃₄
	Evet	Ö ₂ ,Ö ₁₆ ,Ö ₂₁
	Bazen	Ö ₃ ,Ö ₁₀ ,Ö ₁₈ , Ö ₂₃ , Ö ₂₇ ,Ö ₃₃
	Belli konularda	Ö ₂₈ ,Ö ₃₂
	Çok az	Ö ₁₉ ,Ö ₃₀ ,Ö ₃₁ , Ö ₃₅
Kullanmıyorum	Hiç kullanmıyorum	Ö ₁ ,Ö ₄ ,Ö ₁₄
	Düzeyleri yetersiz	Ö ₁₂ ,Ö ₂₄
	Zorlanıyorum	Ö ₂₂

Tablo 5'ten anlaşılacağı gibi öğretmenlerin büyük bir bölümünün matematiksel ispat kullandıklarını belirttikleri anlaşılmaktadır. Kullanım sıklığını belirten öğretmenler büyük oranda bazen kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu durum matematiksel ispat kullanımının orta düzeyde olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Sonuç

Bu çalışmada ilköğretim matematik ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel ispat kavramına ilişkin görüşleri araştırılmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğretmenlerden ilk olarak matematiksel ispat kavramını tanımlamaları istenmiştir. Alınan yanıtlar doğrultusunda “Doğruluk, Kesinlik, Öğrenme, İkna ve Keşfetme” şeklinde kategorilere ulaşılmıştır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmenlerin büyük çoğunluğu matematiksel ispatı “Doğruluk” kategorisi ile ilişkilendirerek açıklamışlardır. İspat kavramının anlamına ve tanımına yönelik yapılan benzer çalışmalarda (Güler ve Dikici, 2012; Özdemir ve Kaplan, 2014; Selden ve Selden, 2003) da, yapılan bu çalışmaya paralel olarak; ispat, doğruluk-doğrulama kavramı ile ilişkilendirilmiştir. Jones (1997) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramına yönelik algılarını, öğretmen adaylarının her birinin oluşturdukları kavram haritaları üzerinden incelemiştir. Matematik öğretmen adaylarının ispat kavramını farklı farklı algıladıklarını belirlemiştir. Ulaşılan bu sonuçlar çalışmanın sonuçlarını destekler niteliktedir.

Çalışmaya katılan öğretmenlerden ikinci olarak matematiksel ispat yapmalarındaki amaçlarının ne olduğunu açıklamaları istenmiştir. Öğretmenlerin verdikleri yanıtlar analiz edildiğinde “Doğruluk, Kalıcılık, Anlamlandırma, Öğrenme, Keşfetme ve Duyuşsal Özellik” şeklinde kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategoriler arasında öğretmenler ispatın amacını en çok “Kalıcılık” kategorisi ile ilişkilendirdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenler, ispat yapmalarındaki amaçlarının çoğunlukla bilgilerin öğrencilerin zihinlerinde kalıcı olmasının ve öğrencilere bilgilerin ezber yapılmadan öğretilmesinin olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanında öğretmenler yaptıkları ispatlar sayesinde öğrencilerin matematiksel bilgilerin ne anlama geldiğini öğrendiklerini ifade etmişlerdir. Benzer olarak, İmamoğlu ve Yontar-Toğrol (2015) çalışmasında matematikçilerin ispatlar aracılığıyla matematiksel bilgilerin ne anlama geldiklerini

öğrendiklerini belirtmektedir. Bu durum ulaşılan iki sonucun paralellik gösterdiği şeklinde yorumlanabilir.

Üçüncü olarak öğretmenlerden matematiksel ispat yapmanın önemli olup olmadığını sebepleriyle açıklamaları istenmiştir. Öğretmenlerin verdikleri yanıtlar analiz edildiğinde “Doğru bilgiye ulaşma, Tatmin-İkna, Kalıcılık, Fayda Sağlama-Öğretme, Keşif, Anlamlandırma” şeklinde kategoriler oluşturulmuştur. Oluşturulan kategoriler arasında öğretmenler matematiksel ispatın önemini daha çok “Doğru bilgiye ulaşma” ve “Anlamlandırma” kategorileri ile ilişkilendirerek açıklamışlardır. Moralı vd. (2006) çalışmalarında matematiksel ispat etkinlikler aracılığıyla matematiksel bilgilerin ortaya çıkacağını ve öğrencilerin matematiğin tadına varacaklarını belirtmektedirler. Ulaşılan bu sonuç doğru bilgiye ulaşma ve bilgilerin anlamlandırılmasıyla ilişkilendirilebilir.

Son olarak öğretmenlerin meslek hayatlarında matematiksel ispatı kullanıp kullanmadıkları sorgulanmıştır. Öğretmenlerin ispata yönelik anlayışlarının, öğrencilerin ispata yönelik anlamalarını etkilediği (Healy ve Hoyles, 2000) ve inanç ve anlayışların davranışların güçlü belirleyicileri oldukları (Nespor, 1987) göz önüne alındığında öğretmenlerin sahip oldukları inanç ve anlayışların meslek hayatlarındaki davranışlarını etkileyeceği açıktır. Bu durum matematiksel ispat kavramına yönelik inanç ve anlayışları yüksek olan öğretmenlerin meslek hayatlarında matematiksel ispatları daha çok kullanacakları şeklinde yorumlanabilir. Öğretmenlerden alınan yanıtlar bu yönüyle incelendiğinde öğretmenlerin genelinin matematiksel ispatı meslek hayatlarında kullandıkları sonucu ile karşılaşmıştır. Bu durum ise çalışmaya katılan öğretmenlerin matematiksel ispata yönelik yüksek düzeyde inanç ve anlayışa sahip olduklarının göstergesidir.

Literatür incelendiğinde yapılan çalışmaların az sayıda olduğu ve daha çok öğretmen adayları ile (Moralı vd., 2006; Doruk ve Kaplan, 2013; Turğut vd., 2013; Doruk ve Güler, 2014; Özdemir ve Kaplan, 2014, Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019, Altıntaş ve İlgün, 2020) gerçekleştirildiği görülmektedir. Okullarda hem öğretim programının uygulayıcıları hem de nelerin öğrenileceği konusunda karar verici konumda öğretmenlerin olduğu (Ernest, 1989) düşünüldüğünde, hizmet içi öğretmenler ile yapılacak çalışmaların arttırılması, literatüre bu yönüyle katkı sağlayacağı söylenebilir. Yapılan bu çalışma sınırlı sayıda öğretmenle gerçekleştirilmiştir. Katılımcı sayısının arttırılarak benzer çalışmalar yürütülebilir. Öğretmenlerin ispat yapma düzeylerine, ispat yapma sürecinde kullandıkları yaklaşımlara, yöntemlere veya stratejilere ilişkin çalışmalar yapılabilir. İspat kullanımına yönelik uygulama ortamlarında gözlem yapılarak öğretmenlerin sınıfta ispat kullanım sıklıkları daha açık şekilde belirlenebilir. Son olarak bu çalışmanın sonuçlarına paralel olarak, ispata yönelik inanç ve anlayışların ispatın kullanım sıklığını olumlu etkilediği (Fruinghetti ve Morselli, 2009) göz önüne alındığında konuya ilişkin derinlemesine bilgi elde etmek için farklı çalışma gruplarıyla ispat kavramı ve ispat kavramına yönelik inançlara ilişkin yeni çalışmaların yapılması önerilebilir.

Kaynakça

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıntaş, E., & İlgün, Ş. (2020). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşlerinin Belirlenmesi: Kars Örneklemi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 28(3), 1573-1582.
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramlarının Künyesi*, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Creswell, W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches (3rd Ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Çontay, E. G., & Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşleri. *The Journal of Limitless Education and Research*, 4(1), 64-89.
- Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). Matematiksel İspat Kavramına Pedagojik Bir Bakış Kuramsal Bir Çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47-71.
- Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.
- Doruk, M., & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2014(3), 71-93.
- Doruk, M. & Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2013(2)1, 241-252.
- Ekiz, D. (2017). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri (5. Baskı)*. Ankara: Anı Yayınları.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (eds.), *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp.249-254). London: Falmer Press.
- Ernest, P. (1994). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, Falmer Press, London.
- Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Leading beliefs in the teaching of proof. *In Beliefs and attitudes in mathematics education* (pp. 59-74). Brill.
- Güler, G. & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics* 44, 5-23
- Hanna, G. (2002). *Mathematical proof. In: Tall D. (ed.) Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, Kluwer, Dordrecht.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- İmamoğlu, Y. & Yontar-Toğrol, A. (2015). Proof construction and evaluation practices of prospective mathematics educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(2), 130-144.
- Jones, K. (1997). Student-teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.
- Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.
- Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, 5(1), 61-88.

- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 20(1), 41-51.
- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1984). *Qualitative Data Analysis: A Sourcebook of New Methods*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies*, 19, 317-328.
- Özdemir, F. & Kaplan, A. (2014). Öğretmen Adaylarının Öğrenme Stillere Göre Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşlerinin İncelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 3(2), 410-429.
- Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- TDK. (2020). İspat tanımı. <http://tdk.gov.tr> adresinden 05.06.2022 tarihinde erişildi.
- Wikipedia. (2020). Matematik Tarihi. https://tr.wikipedia.org/wiki/Matematik_tarihi adresinden 06.06.2022 tarihinde erişildi.
- Turğut, M., Yenilmez, K., & Uygan, C. (2013). Ortaokul ve Lise Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, (13), 227-252.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. (1984). *Case study research: design and methods (3rd Ed.)*. London: Sage Publications.