



Bir Metro Hattında Yolcu Sayısına Bağlı Dinamiklerin Anahtarlamalı Sistem Olarak Modellenmesi ve Girişten Duruma Kararlılık Analizi

Berkin BİROL*^{ID}, Ali Fuat ERGENÇ^{ID}

*İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği
Bölümü, İstanbul, Türkiye*

*birolb@itu.edu.tr

(Alınış/Received: 14.11.2022, Kabul/Accepted: 23.12.2022, Yayınlanma/Published: 31.01.2023)

Öz: Bir ulaşım sisteminde bulunan istasyon ve araçlardaki yolcu sayıları ile sefer aralığı (ardışık iki araç arasındaki süre) arasında doğrusal bir ilişki bulunmaktadır. Sefer aralıklarını azaltmak yolcu konforunu arttırsa da, işletme maliyetlerini arttırmaktadır. Bu nedenle iyi ayarlanmış bir sefer aralığı hem işletmeci hem de yolcular açısından önem kazanmaktadır. Sefer aralığının sağlıklı şekilde ayarlanması için iyi kurgulanmış bir modele ihtiyaç duyulmaktadır. Bir ulaşım sistemindeki yolcu dinamikleri bir aracın bir durağa yanaşıp yanaşmamasına göre değişkenlik gösterdiği için, bu sistemler anahtarlamalı sistem gibi davranırlar. Buna ek olarak, sefer aralığının güncellenmesi tüm istasyonları anında etkilemez. Güncelleme ilk istasyon dışındaki istasyonları bir zaman gecikmesi ile etkiler. Bu çalışmada, bir metro hattındaki yolcu sayıları anahtarlamalı sistem olarak modellenmiştir ve gerçek veriler ile MATLAB Simulink® yazılımında benzetimi yapılmıştır. Sistemin keyfi anahtarlama altındaki kararlılık analizi ortak Lyapunov fonksiyonları ve girişten duruma kararlılık yöntemleri kullanılarak yapıлып, benzetim sonuçları ile de doğrulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Anahtarlamalı sistem, Girişten duruma kararlılık, Lyapunov kararlılığı, Metro, Sefer aralığı, Yolcu sayısı

Modelling a Metro Line as a Switched System and Performing Input-to-State Stability Analysis

Abstract: There is a linear relationship between the headway (the time distance between two consecutive vehicles) of the vehicles and the passenger quantities in stations in a public transportation system. Reducing the headway increases passenger satisfaction but increases operational costs. Therefore, an optimized headway is beneficial for both passengers and the operator. The passenger quantities in the line should be well-modelled to tune the headway efficiently. The passenger dynamics in a public transportation system behave like a switched system since the passenger dynamics differ if a vehicle is berthed to a station or not. Furthermore, updating the headway does not affect all stations instantaneously. The update in the headway affects stations other than the first station with a time delay. In this study, passenger quantities in a metro line have been modelled as a switched system and simulated in MATLAB Simulink®. The stability of the system under arbitrary switching has been analysed by using the common Lyapunov and input-to-state stability methods and verified by the simulation results.

Keywords: Switched system, Input-to-state stability, Lyapunov stability, Metro, Headway, Passenger quantity

1. Giriş

Metropoller nüfus artışları ve aldıkları göçler nedeniyle giderek daha kalabalık hale gelmektedir. Bu nedenle toplu taşıma sistemlerinin rolü; trafik sıkışıklıklarını azalttıkları, ulaşım konforu arttırdıkları ve hava kirliliğini azalttıkları için giderek artmaktadır [1]. Raylı ulaşım sistemleri güvenilirdir, trafik sıkışıklıklarından etkilenmezler ve diğer ulaşım alternatiflerine göre daha temiz enerji ile çalıştırılırlar [2]. Tüm bu avantajlarının bir sonucu olarak, raylı ulaşım sistemlerine, özellikle metrolara olan talep büyük şehirlerde artmaktadır [3].

Atıf için/Cite as: B. Birol, A.F. Ergenç, "Bir metro hattında yolcu sayısına bağlı dinamiklerin anahtarlamalı sistem olarak modellenmesi ve girişten duruma kararlılık analizi," *Demiryolu Mühendisliği*, no. 17, pp. 133-144, Jan 2023. doi: 10.47072/demiryolu.1203693

Raylı ulaşım sisteminin başarılı olması iyi ayarlanmış bir zaman çizelgesine bağlıdır. Newell vd. [4] zaman çizelgelerini inceleyip istasyondaki toplam bekleme sürelerini hesaplamak için sürekli akışkan modellerini kullanmışlardır. Osuna vd. [5] bir toplu taşıma sistemindeki yolcuların bekleme sürelerini azaltmak için optimal kontrolden faydalanmışlardır ve bir ya da iki araçtan oluşan örnekleri çözüp problemin karmaşıklığına dikkat çekmişlerdir. Hurdle [6], [7] ise minimum maliyetli zaman çizelgelerini oluşturmak üzerine çalışmıştır ve problemi sıvı akışkan modeli gibi ele alıp trenleri hat üzerinde akan koltuklar olarak kabul etmiştir ve bu model ile sıkışık ve sıkışık olmayan zamanlar için işletme ve depolama maliyetlerini en aza indirmek üzerine çalışmıştır. Etkin bir zaman çizelgesi için raylı ulaşım sistemindeki blok mesafelerinin doğru hesaplanması önemlidir. Yıldırım [8] yüksek hızlı tren hatlarındaki blok mesafelerinin ayarlanması üzerine çalışmıştır ve kurulum ile bakım maliyetlerini de hesaba katarak yüksek hızlı tren hatlarında 7500 ile 10000 metre arasındaki blok mesafesinin uygun olacağını belirtmiştir.

Zaman çizelgelerinin ayarlanması günümüzde de popüler araştırma konularından biridir. Sun vd. [9] bir önceki haftanın talep verilerini kullanarak zaman çizelgelerinin haftalık olarak güncellenmesi üzerine çalışmalar yapmışlardır ve Singapur'da koşturdukları benzetimler ile modeli doğrulamışlardır. Şahin [10] ise trenin gelecekteki dakiklik/geç kalma gibi durumlarını tahmin edebilmek için Markov zincirleri, trenin ilk ve anlık durumunu kullanarak istatistikten yararlanmışlardır. Xie vd. [11] stabil zaman çizelgesi ve enerji tasarrufu üzerine yoğunlaşmış ve zaman çizelgeleri ve duruş planlarını optimize etme üzerine bir model önermişlerdir. Önerdikleri modeli Şangay'daki yüksek hızlı tren hattında deneyip hem yolcu talebinin karşılandığı hem de enerji tüketiminin azaldığını doğrulamışlardır.

Hattaki aksamaların yönetilmesi de demiryolu zaman çizelgeleri için popüler bir çalışma konusudur. Aken vd. [12] tren zaman çizelgesi ayarlama problemi üzerine çalışmışlardır ve sorunun çözümü için karışık tamsayı programlama yöntemini kullanmışlardır. Demiryolu ağını bölüp ve kısa dönüş yapan trenler için dönüş aktivitelerini modelleyerek problemin boyutunu ve karmaşıklığını azaltmayı hedeflemişlerdir. Zhu ve Goverde [13], [14] trenlerin duruş davranışlarını esnek olarak değiştirmek ve her trenin kısa dönüş istasyonu aday sayılarını azaltmak için; iptal etme, yeniden sıralama ve yeniden zamanlama yöntemlerini birleştirerek karışık tam sayılı doğrusal programlama modeli kurmuşlardır. Nielsen vd. [15] probleme farklı bir bakış açısı ile yaklaşmış, trendeki elektronik tartı ekipmanını kullanarak trendeki yolcu adetlerini tahmin etmeye çalışmışlardır. Sonuçlarını el ve kızılötesi sistem ile yapılan sayımlarla karşılaştırıp, önerdikleri modelin daha doğru sonuç verdiğini işaret etmişlerdir. Li ve Zhu [16] ise, yolcu akışını modellemek için ayrık olay sistemi tekniğini kullanmış olup, yolcuların güzergâh seçimleri ve tren gecikmelerinin yolcu akış dağılımlarına olan etkilerini incelemişlerdir.

Anahtarlamalı sistemlerin tasarımı ve analizine yönelik son on yıllarda artan bir talep vardır [2]. Otomotiv endüstrisi, anahtarlamalı güç dönüştürücülerini, mekanik sistemlerin kontrolü ve biyolojik sistemler anahtarlamalı sistemlerin bazı uygulama noktalarındandır [17]–[19]. Anahtarlamalı sistemler, ayrık-zamanlı veya sürekli-zamanlı sistemlerin aralarındaki geçişin bir anahtarlama kuralı ile yönetildiği sistemler ailesidir [19], [20]. Chen vd. [21] anahtarlamalı sistem teorisini güç sistemlerinin özellikle hata durumlarındaki kararlılığını incelemek için kullanmıştır. Xu vd. [22] çalışmalarında anahtarlama maliyetlerini de hesaba katacak şekilde bir optimal anahtarlama işareti tasarımı üzerine çalışmışlardır. Ulaşım hatlarındaki yolcu değişimi bir araç – durak eşleşmesi olduğu ve olmadığı durumlarda farklı davranmaktadır. Modelin sabit kalmayıp belirli aralıklar ile değişiyor olması sistemin modellenmesi ve kontrolünde klasik kontrol yöntemlerinde sorunlar yaratmaktadır. Bu nedenle Birol ve Ergenç [2] bir metro ağındaki yolcu değişimini anahtarlamalı sistem olarak modellemişlerdir.

Günümüzde kullanılan son teknoloji otonom sürüş sistemleri sayesinde sabit zaman çizelgelerinin yerine esnek, talep ile güncellenebilen sefer aralıklarının uygulanması kolaylaşmıştır. Sefer aralığının en iyi şekilde belirlenmesi için yolcu sayılarının doğru bir modeline ihtiyaç vardır ve

model aynı zamanda beklenmedik bir bozucu etkiye neden olacak yüksek miktarda yolcu talepleri (ör. bir etkinlik sonrasında) nedeniyle sefer aralıklarının güncellenmesi için de kullanılabilir.

Bu çalışmada, bir metro hattındaki yolcu sayılarının modeli oluşturulmuştur. İki terminal ve yirmi altı ara istasyondan oluşan İstanbul'un M2 hattının benzetimi MATLAB Simulink®'te gerçekleştirilmiştir. Sistemin kararlılık analizi ortak Lyapunov fonksiyonu ve girişten-duruma-kararlılık yöntemleri kullanılarak yapılmıştır. Kararlılık analizinin doğrulanması için MATLAB Simulink®'te kurulan model ve Metro İstanbul'dan alınan veriler kullanılarak benzetimler oluşturulmuş ve analiz sonuçları ile doğrulanmıştır.

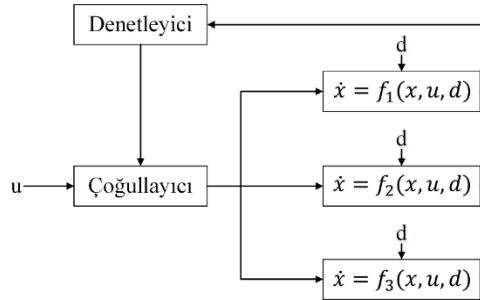
2. Metot

2.1. Anahtarlamalı sistemler

Anahtarlamalı sistemler; bir anahtarlama kuralı ile birbirleri arasındaki geçişin yönetildiği ve $x(t)$ 'nin durum, \dot{x} 'nin x 'in zamana bağlı türevi, $u(t)$ 'nin kontrol girişi, $y(t)$ 'nin çıkış, $v(t)$ ve $\omega(t)$ 'nin bozucu gibi harici işaretler ve σ 'nin anahtarlama işareti seti olarak ifade edildiği, Denklem 1. ve Denklem 2.'deki gibi gösterilen alt sistemler ailesidir [19], [20], [23].

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma}(x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

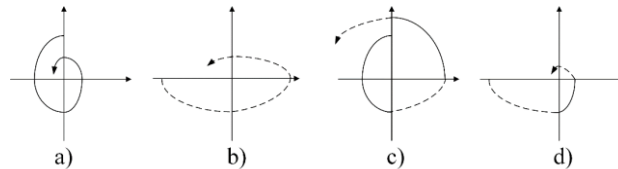
$$y(t) = g_{\sigma}(x(t), \omega(t)) \quad (2)$$



Şekil 1. Anahtarlamalı sistemin şematik görünümü ([18]'den uyarlanmıştır)

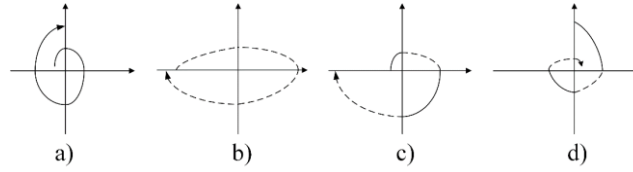
Alt sistemler arasındaki geçiş, denetleyici tarafından üretilen parçalı sürekli olan σ işareti ile gerçekleştirilmektedir (Şekil 1.). $\sigma(t) = k$ olduğu durumda, sadece k numaralı alt sistem $f_k(x, u, d)$ aktif olmaktadır. Anahtarlama işareti zamana, önceki değerlerine, durum/çıkış değişkenlerine ya da harici işaretlere bağlı olabilir.

2.2. Anahtarlamalı sistemlerin kararlılığı



Şekil 2. Alt sistemleri kararlı olan anahtarlamalı sistem ([20]'den uyarlanmıştır)

Bir anahtarlamalı sistem, tüm alt sistemlerinin kararlı olduğu durumda (Şekil 2. a, Şekil 2. b) uygun seçilmeyen anahtarlama işaretleri ile kararsız davranış da sergileyebilirken (Şekil 2. c) uygun anahtarlama işareti ile kararlı olabilir (Şekil 2. d). Benzer şekilde, bir anahtarlamalı sistem tüm alt sistemlerinin kararsız olduğu durumda (Şekil 3. a ve Şekil 3. b) uygun seçilmeyen anahtarlama işaretleri ile kararsız davranış sürdürmeye devam ederken (Şekil 3. c), uygun anahtarlama işareti ile kararlı olabilir (Şekil 3. d).



Şekil 3. Alt sistemleri kararsız olan anahtarlama sistemi ([20]'den uyarlanmıştır)

2.3. Ortak Lyapunov fonksiyonları

Sürekli türevlenebilir pozitif tanımlı bir $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonu pozitif tanımlı $W: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonu için Denklem 3.'te verilen eşitsizliği sağlıyorsa bu V fonksiyonu Denklem 1. ve Denklem 2.'de verilen sistem için ortak Lyapunov fonksiyonu olarak tanımlanır.

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) \leq W(x) \quad \forall x, \forall p \in P \quad (3)$$

Teorem: Bir anahtarlama sistemi tüm alt sistemleri için ortak bir Lyapunov fonksiyonu olması durumunda, Global Üniorm Asimptotik Kararlı olarak tanımlanır.

2.4. Girişten duruma kararlılık (input-to state stability)

Kararlılık analizini bozucu girişlerini kapsayacak şekilde genişletmek ilgi çekici bir çalışma alanıdır. Bir sistem için $\gamma \in \mathcal{K}_\infty, \beta \in \mathcal{KL}$ fonksiyon seti ve her ilk durum (0) için Denklem 4. eşitsizliği sağlanıyorsa bu sistem d girişi için girişten duruma kararlıdır [20], [24].

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0), t|) + \gamma(\|d\|_{[0,t]}) \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

Teorem: Denklem 5.'te verilen bir anahtarlama sistemi için eğer Denklem 6., Denklem 7. ve Denklem 8. eşitsizlikleri sağlanıyorsa sürekli türevlenebilir fonksiyonlar $V_p: \mathcal{R}^n \rightarrow [0, \infty), p \in P; \mathcal{K}_\infty$ fonksiyonlar $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ ve sabitler $\lambda_0 > 0, \mu \geq 1$ olmak üzere $\forall \xi \in \mathcal{R}^n, \eta \in \mathcal{R}^l$, ve $\forall p, q \in P$ için ortalama yavaşlama süresi $\tau_a > \ln(\mu/\lambda_0)$ koşulu ile girişten duruma kararlıdır [25].

$$\dot{x} = f_p(x, d) \quad (5)$$

$$\alpha_1(\|\xi\|) \leq V_p(\xi) \leq \alpha_2(\|\xi\|) \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x, u) \leq -\lambda_0 V_p(\xi) + \gamma(\|\xi\|) \quad (7)$$

$$V_p(\xi) \leq \mu V_q(\xi) \quad (8)$$

3. Bulgular

3.1. Matematiksel model

Metro sistemindeki yolcu sayısının takibi için duraklardaki ve trenlerdeki yolcu sayılarının değişimi modellenmiştir [2]. $d_i(t)$ i numaralı istasyondaki yolcu adedi fonksiyonu, $d_{i_g}(t)$ i numaralı istasyona turnikeler ile gelen yolcu adedi fonksiyonu, $p_j(t)$ j numaralı trendeki yolcu sayısı fonksiyonu, k_{i_g} i numaralı istasyonu trene binmeyerek terk eden yolcuların oranı, k_{i_b} i numaralı istasyonda trene binen yolcuların oranı, k_{i_i} i numaralı istasyona yavaşlayan trenden inen yolcuların oranı ve τ_t trenden inen yolcuların istasyonu terk etme süresi olmak üzere, bir i istasyonundaki yolcu değişimi Denklem 9.'daki gibi modellenmiştir.

$$\dot{d}_i(t) = d_{i_g}(t) - k_{i_g}d_i(t) - k_{i_b}d_i(t) + k_{i_i}p_j(t) - k_{i_i}p_j(t - \tau_t) \quad (9)$$

Denklem 9.'daki eşitlik " $-k_{i_b}d_i(t) + k_{i_i}p_j(t) - k_{i_i}p_j(t - \tau_{terk})$ " kısmı sadece bir tren istasyona yanaştığı süre boyunca anlamlı olacağı için her t koşulunda geçerli değildir. Bu nedenle, sistem Denklem 9.'daki gibi i numaralı istasyona bir tren yanaşmış ve Denklem 10.'daki gibi i numaralı istasyona bir tren yanaşmamış olarak tanımlanabilen iki alt sistemden oluşmaktadır.

$$\dot{d}_i(t) = d_{i_g}(t) - k_{i_g}d_i(t) \quad (10)$$

Trenlerdeki yolcu sayılarının değişimleri de benzer şekilde olmaktadır. Denklem 11.'deki gibi j numaralı tren bir istasyona yanaşmadığında yolcu değişimi olmaz iken, Denklem 12.'deki gibi trenin bir istasyona yanaşması ile yolcu değişimi gerçekleşir.

$$\dot{p}_j(t) = 0 \quad (11)$$

$$\dot{p}_j(t) = k_{i_b}d_i(t) - k_{i_i}p_j(t) \quad (12)$$

Aynı zamanda anahtarlama sinyali olan i numaralı istasyona j numaralı trenin yanaşma sinyali $\delta_{i,j}(t)$ Denklem 13.'teki gibi oluşturulmuştur. Trenin ilk istasyondan i numaralı istasyona ulaşma süresi τ_i , birinci istasyondan başlayacak olan herhangi bir sefer aralığı güncellemesinin i numaralı istasyona etki etmesi için gerekli zaman gecikmesidir. j numaralı trenin i numaralı istasyondan k 'inci kez ayrılma zamanı için $t_{j+m(k-1)}$ gösterimi kullanılmıştır.

$$\delta_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_{j+m(k-1)} - \tau_i) \quad (13)$$

i numaralı istasyona bir trenin yanaşmadığı durum için Denklem 10. ve Denklem 11. kullanılarak durum uzayı gösterimi $x_i(t)$ durum vektörü, $\omega(t)$ bozucu vektörü, A_1 ve E uygun boyutlu katsayı matrisleri olmak üzere Denklem 14.'te verildiği gibi yazılabilir.

$$\dot{x}_i(t) = A_1x_i(t) + E\omega(t) \quad (14)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -L_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} ; x_i(t) = \begin{bmatrix} d_i(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_m(t) \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} ; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} \quad (15)$$

$$\omega(t) = d_{i_g}(t) \quad (16)$$

i numaralı istasyona bir trenin yanaşmadığı durum için Denklem 9. ve Denklem 12. kullanılarak ve trenden inen yolcuların durağı anında terk ettikleri kabulü yapılarak durum uzayı gösterimi A_m uygun boyutlu katsayı matrisi olmak üzere Denklem 17.'de verildiği gibi yazılabilir.

$$\dot{x}_i(t) = A_mx_i(t) + E\omega(t) \quad (17)$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -k_{i_g} - k_{i_b} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_1 & -\Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \Psi_m & 0 & \dots & 0 & -\Lambda_m \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \quad (18)$$

$$\Psi_m = \begin{cases} k_{i_b} & \delta_{i,j} = 1 \\ 0 & \delta_{i,j} \neq 1 \end{cases}, \Lambda_m = \begin{cases} k_{i_i} & \delta_{i,j} = 1 \\ 0 & \delta_{i,j} \neq 1 \end{cases} \quad (19)$$

i numaralı istasyonu ifade edecek olan anahtarlamalı sistem Denklem 21.'deki anahtarlama işareti ile Denklem 20.'deki gibi yazılır.

$$\dot{x}_i(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + E\omega(t) \quad (20)$$

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \delta_{(i,1)} = \delta_{(i,2)} = \dots = \delta_{(i,m)} = 0 \\ 2 & \text{eğer } \delta_{(i,1)} = 1 \\ \vdots & \vdots \\ m+1 & \text{eğer } \delta_{(i,m)} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

3.2. Kararlılık analizi

Bölüm 3 ve bölüm 4'te, bölüm 3.1'de matematiksel modeli ve durum uzayı gösterimi verilen sistemin kararlılık analizi yapılmaktadır.

3.3. Bozucunun olmadığı durumda kararlılık analizi

Toplam i adet istasyon ve j adet trenden oluşan anahtarlamalı sistem iki alt sistemden oluşmaktadır: bir trenin bir istasyona yanaştığı alt sistem ve herhangi bir trenin istasyona yanaşmadığı alt sistem. Bir istasyona aynı anda sadece bir tren yanaşabilir, bu nedenle A_1 ve A_2 matrisleri Denklem 22.'deki gibi yazılabilirler.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_{i_g} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -k_{i_g} - k_{i_b} & 0 \\ k_{i_b} & k_{i_i} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Denklem 22.'de verilen sistem için ortak P matrisi adayı ve ortak Lyapunov fonksiyon adayını $V(x)$ Denklem 23.'teki gibi seçilmiştir.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad V(x) \triangleq x^T P x = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 \quad (23)$$

Hem trende hem de istasyonda yolcu bulunmaması sistemin denge noktası olarak seçilmiş olup, i numaralı istasyon için $x_i^* = 0$ olarak belirlenmiştir. Denklem 23.'te seçilmiş olan Lyapunov fonksiyonu denge noktası olan $x_i^* = 0$ koşulunda $V(0) = 0$ olmakta iken, Denklem 24.'te görüldüğü gibi $V(x)$ karesel bir fonksiyon olduğu için diğer tüm durumlarda pozitif olmaktadır.

$$V(x^*) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 = 0, \quad V(x) > 0 \forall x \neq x^* \quad (24)$$

Lyapunov kararlılığı için üçüncü koşul olan $\dot{V}(x) \leq 0$ tüm alt sistemler için sağlanmalıdır. İstasyonu terk eden yolcuların oranı pozitif olduğu için ($0 \leq k_{i_g} \leq 1$) Denklem 25. ilk alt sistem olan trenin yanaşmadığı durum için koşulu sağlamaktadır.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0,2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_{i_g} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k_{i_g}x_1^2 \leq 0 \quad (25)$$

İkinci alt sistem için inceleme yapıldığında görülmektedir ki, Denklem 30. koşulu geçerli olduğunda $\dot{V}(x) \leq 0$ sağlanmaktadır.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0,2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_{i_g} - k_{i_b} & 0 \\ k_{i_b} & -k_{i_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{V}(x) = -a^2 - bx_1^2 - cx_2^2 \quad (27)$$

$$a = k_{i_b}x_1 - 0,1x_2; \quad b = k_{i_g} + k_{i_b} - k_{i_b}^2 \quad (28)$$

$$c = 0,2k_{i_i} - 0,01; \quad k_{i_i} \geq 0,05 \Leftrightarrow cx^2 \geq 0 \quad (29)$$

$$V(x) \leq 0 \Leftrightarrow k_{i_i} \geq 0,05 \quad (30)$$

M2 hattı için sadece turnike giriş verileri bulunduğu için iniş oranları binme yoğunlukları üzerinden hesaplanmıştır ve en düşük inme oranına %9 ile sahip olan Darüşşafaka için Denklem 30. koşulu sağlandığı için sistem global asimptotik kararlıdır.

3.4. Bozucunun olduğu durumda kararlılık analizi

Bozucuların olduğu durumun kararlılığının incelenmesinde bölüm 2.4'te verilen Vu ve Chatterjee'nin [25] teoreminden faydalanılmıştır. Denklem 23.'teki gibi seçilen ortak Lyapunov fonksiyonu için alttan ve üstten sınırlayıcı fonksiyonlar olan $\alpha_1(\|\xi\|)$ ve $\alpha_2(\|\xi\|)$ fonksiyonları Denklem 33. ve Denklem 34.'teki gibi bulunur.

$$|x_2| \leq |x_1| \Rightarrow \frac{\|x\|^2}{4} \leq \frac{(x_1^2 + x_1^2)}{4} = \frac{1}{2}x_1^2 \leq V(x) \quad (31)$$

$$|x_1| \leq |x_2| \Rightarrow \frac{\|x\|^2}{20} \leq \frac{(x_2^2 + x_2^2)}{20} = \frac{1}{10}x_2^2 \leq V(x) \quad (32)$$

$$\alpha_1(\|\xi\|) = \min\left(\frac{\|\xi\|^2}{4}, \frac{\|\xi\|^2}{20}\right) = \frac{\|\xi\|^2}{20} \quad (33)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 \Rightarrow \alpha_2(\|\xi\|) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 \quad (34)$$

Girişten duruma kararlılığın ikinci koşulu iki alt sistem için de irdelenmelidir. İki sistem için de bozucu işaret olarak sisteme dışarıdan gelen yolcuları temsil edecek şekilde $d = \omega(t)$ alınmıştır. İlk olarak trenin bir istasyona yanaşmadığı durum incelenmiştir. $\dot{V}_1(x) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayacak $|x|$ koşulu Denklem 38.'de hesaplanmıştır.

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, u) = -k_{i_g}x_1^2 + x_1d \quad (35)$$

$$\dot{V}_1(x) = -(1 - \theta)k_{i_g}x_1^2 - \theta k_{i_g}x_1^2 + x_1d \leq 0, \quad 0 < \theta < 1 \quad (36)$$

$$\dot{V}_1(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\theta k_{i_g}x_1^2 + x_1d \leq 0 \quad (37)$$

$$-\theta k_{i_g}x_1^2 + x_1d \leq 0 \Rightarrow x_1d \leq \theta k_{i_g}x_1^2 \Leftrightarrow |x_1| \geq \frac{|d|}{k_{i_g}\theta} \quad (38)$$

Trenin yanaşmadığı durumda trenle istasyon arasında herhangi bir yolcu değişimi bulunmadığı için, trendeki yolcu sayısı, x_2 , sıfır olarak alınmış ve $\rho_1(r)$ Denklem 39.'daki gibi oluşturulmuştur.

$$\|x\| \geq \frac{|d|}{k_{i_g}\theta} \Rightarrow \rho_1(r) = \frac{|r|}{k_{i_g}\theta} \quad (39)$$

Denklem 34. kullanılarak $\|x\|^2 \geq 2V(x)$ yazılabilir ve $\dot{V}_1(x)$ 'in λ_1 ve $V(x)$ ile olan ilişkisi Denklem 41.'deki gibi verilir. Böylece trenin yanaşmadığı durum için λ_1 değeri bulunmuş olur.

$$\dot{V}_1(x) \leq -(1 - \theta)k_{i_g}x_1^2 \leq \underbrace{-2k_{i_g}(1 - \theta)}_{\lambda_1} V(x) \quad (40)$$

$$\dot{V}_1(x) \leq -\lambda_1 V(x); \quad \|x\| \geq \rho_1(d) \quad (41)$$

Trenin yanaştığı durum için olan λ_2 değeri de hesaplanmalıdır. a, b, c değerleri Denklem 28. ve Denklem 29.'daki gibi alınırsa $\dot{V}_2(x)$ Denklem 42.'deki gibi yazılır ve Denklem 43. elde edilir.

$$\dot{V}_2(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f_2(x, u) = -a^2 - bx_1^2 - cx_2^2 + x_1 d \leq 0 \quad (42)$$

$$\dot{V}_2(x) \leq -bx_1^2 - cx_2^2 + x_1 d \leq 0 \quad (43)$$

$\theta \in (0,1)$ için Denklem 44. ve Denklem 45. yazıldığında Denklem 45. koşulunun sağlanması için Denklem 46. veya Denklem 48. koşullarının sağlanması gerekmektedir.

$$\dot{V}_2(x) \leq -(1 - \theta)(bx_1^2 + cx_2^2) - \theta(bx_1^2 + cx_2^2) + x_1 d \leq 0 \quad (44)$$

$$\dot{V}_2(x) \leq -\theta(bx_1^2 + cx_2^2) + x_1 d \leq 0 \quad (45)$$

$$\theta bx_1^2 + x_1 d \leq 0 \Rightarrow x_1 d \leq \theta bx_1^2 \Leftrightarrow |x_1| \geq \frac{|d|}{b\theta} \quad (46)$$

$$|x_1| < \frac{|d|}{b\theta} \Rightarrow \theta cx_2^2 + x_1 d \leq 0 \Rightarrow \theta cx_2^2 + \frac{|d|^2}{b\theta} \leq 0 \quad (47)$$

$$|x_1| < \frac{|d|}{b\theta} \Leftrightarrow |x_2| \geq \frac{|d|}{\theta\sqrt{bc}} \quad (48)$$

Denklem 46. veya Denklem 48. koşulları ile $\rho_2(r)$ Denklem 51.'deki gibi tanımlanır.

$$\|x\| \geq \sqrt{\left(\frac{|d|}{b\theta}\right)^2 + \left(\frac{|d|}{\theta\sqrt{bc}}\right)^2} = \frac{|d|}{b\theta} \sqrt{\frac{b+c}{c}} \quad (49)$$

$$\dot{V}_2(x) \leq -(1 - \theta)(bx_1^2 + cx_2^2) \quad \forall \|x\| \geq \rho_2(d) \quad (50)$$

$$\rho_2(r) = \frac{r}{b\theta} \sqrt{\frac{b+c}{cb}} \quad (51)$$

$\Delta \triangleq (1 - \theta)(bx_1^2 + cx_2^2)$ dönüşümü kullanılarak analiz yapıldığında Denklem 52., Denklem 53. ve Denklem 54. yazılabilir.

$$|x_2| \leq |x_1| \Rightarrow \frac{b(1 - \theta)}{2} \|x\|^2 \leq b(1 - \theta)x_1^2 \leq \Delta \quad (52)$$

$$|x_1| \leq |x_2| \Rightarrow \frac{c(1 - \theta)}{2} \|x\|^2 \leq c(1 - \theta)x_2^2 \leq \Delta \quad (53)$$

$$\min(b, c) \frac{(1 - \theta)}{2} \|x\|^2 \leq \Delta \quad (54)$$

Denklem 54.'ü ve $V(x)$ için Denklem 34.'te verilen üstten sınırlamalı fonksiyonu kullandığımızda Denklem 50. ve Denklem 51.'de ifade edilen $\dot{V}_2(x)$, Denklem 55.'teki gibi yazılabilir ve λ_2 Denklem 56.'daki gibi bulunur.

$$\dot{V}_2(x) \leq -\Delta \leq -\underbrace{\min(b, c)}_k \frac{(1 - \theta)}{2} \|x\|^2 \leq -2kV(x); \quad \forall \|x\| \geq \rho_2(d) \quad (55)$$

$$\lambda_2 = (1 - \theta) \min\left(\left(k_{i_i} + k_{i_b} - k_{i_b}^2\right), (0, 2k_{i_i} - 0.01)\right) \quad (56)$$

$\dot{V}_p(x) \leq -\lambda V(x)$ için gerekli λ koşulu $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ olarak bulunur. $V(x)$, Denklem 20.'deki anahtarlamalı sistem için ortak bir Lyapunov fonksiyonu olduğu için $\mu = 1$ 'dir ve bu nedenle

Denklem 57.'de görüldüğü gibi anahtarlamalı sistem ortalama yanaşma süresi 0'dan büyük her sistem için karardır. Diğer bir deyişle, anahtarlamalı sistem Denklem 41. ve Denklem 50. koşulları sağlandığı sürece keyfi anahtarlama altında girişten duruma karardır.

$$\tau_a \geq \frac{\ln(\mu)}{\lambda} = 0 \quad (57)$$

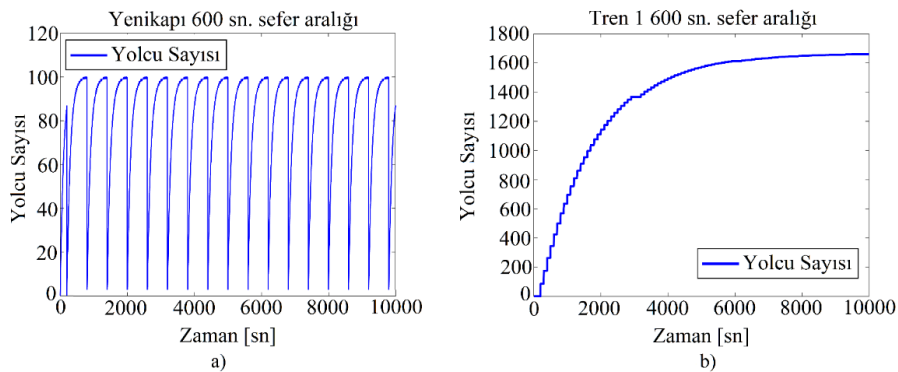
3.5. Benzetim sonuçları

Girişten duruma karardlık analizini doğrulamak için, Şekil 4.'te şematığı verilen on üç noktada yirmi altı ara istasyon ve iki adet terminal istasyondan oluşan İstanbul'daki M2 metro hattı seçilmiştir ve anahtarlamalı sistem MATLAB Simulink®'te modellenmiştir. Metro İstanbul'dan istasyonlara gelen saatlik yolcu sayıları edinilmiştir ve bu veri modele girdi olarak kullanılmıştır. İlk olarak sistemin karardlı olduğu koşullarda, sonrasında sınır koşullarında çeşitli benzetimler gerçekleştirilmiştir.



Şekil 4. İstanbul'da Yenikapı – Hacıosman arasında hizmet veren M2 hattının şematığı

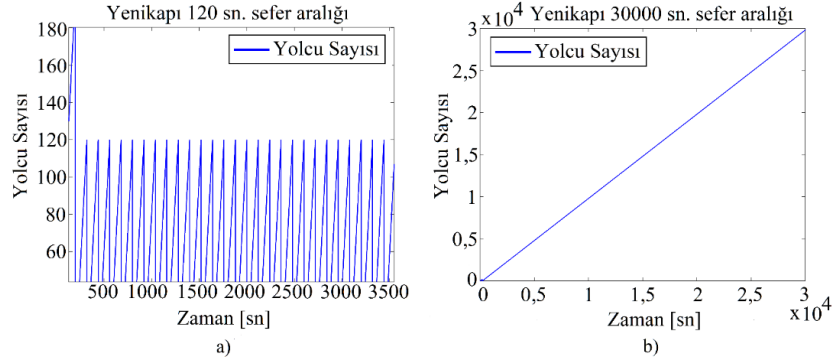
Yenikapı istasyonuna saniyede bir yolcu geldiği durumda sistem incelenmiştir. Şekil 5. a)'da $k_{ig} = 0,01$; $k_{ib} = 1$; $k_{ii} = 0,06$ koşulları altında 600 saniyelik sefer aralığında Yenikapı istasyonundaki yolcu sayıları, Şekil 5. b)'de ise 1 numaralı trendeki yolcu sayıları gösterilmektedir. Yenikapı istasyonundaki ve 1 numaralı trendeki yolcu sayılarının bu koşullar altında sınırlı kaldığı gözlenmektedir.



Şekil 5. $k_{ig} = 0,01$; $k_{ib} = 1$; $k_{ii} = 0,06$; 600 sn. sefer aralığı için a) Yenikapı istasyonundaki yolcu sayısı b) Tren 1'deki yolcu sayısı

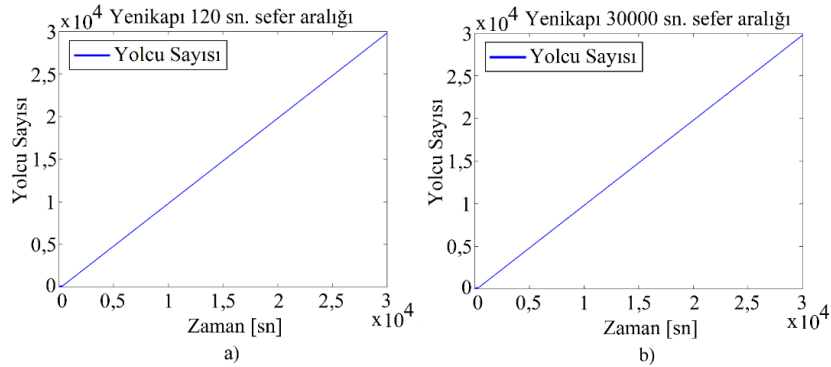
$k_{ig} = 0$ olduğunda Denklem 39.'un sağlanması için $\|x\| \rightarrow \infty$ olmalıdır. Şekil 6. a)'da $k_{ig} = 0$ iken saniyede bir yolcu geldiği durumda 120 sn. sefer aralığı için Yenikapı istasyonundaki yolcu sayıları görülmektedir. Şekil 6. b)'de ise sefer aralığının benzetim süresinin üzerine çıkartıldığı durumda Yenikapı istasyonundaki yolcu sayısının sınırsız şekilde arttığı gözlenmektedir. Sistem,

Denklem 39.'un sağlanmadığı $k_{i_g} = 0$ koşulunda 120 sn. sefer aralığında kararlıyken, sefer aralığı arttırılınca kararsızlığa doğru gitmektedir, dolayısıyla sistem keyfi anahtarlama altında girişten duruma kararlı değildir.



Şekil 6. $k_{i_g} = 0$ için Yenikapı istasyonu yolcu sayısı: a) 120 sn. sefer aralığı b) 30000 sn. sefer aralığı

$b = 0$ ($k_{i_g} = 0$ ve $k_{i_b} = 0$) yapılırsa Denklem 51.'in sağlanabilmesi için $\|x\| \rightarrow \infty$ olmalıdır. Şekil 7. a)'da bu koşullar altında 120 saniyelik sefer aralığında dahi duraktaki yolcu sayısının kararsızlığa gittiği görülmektedir. $b = 0$ olması için diğer bir koşul da $k_{i_g} = 0$ ve $k_{i_b} = 1$ olmasıdır. Bu koşullar altında da sistem anahtarlama süresi uzadıkça kararsızlığa gitmektedir (Şekil 7. b)).



Şekil 7. Yenikapı istasyonundaki yolcu sayısı a) 120 saniye sefer aralığı için $k_{i_g} = 0$ ve $k_{i_b} = 0$ koşulları b) 30000 saniye sefer aralığı için $k_{i_g} = 0$ ve $k_{i_b} = 1$ koşulları

MATLAB Simulink® benzetim sonuçları ile de doğrulandığı üzere, anahtarlama sistemi, Denklem 39. ve Denklem 51. koşulları sağlandığında 0'dan büyük herhangi bir anahtarlama sinyali için, yani keyfi bir anahtarlama için girişten duruma kararlıdır.

4. Sonuç

Bu çalışmada, bir metro hattında trenlerde ve istasyonlarda bulunan yolcu sayıları anahtarlama sistemi olarak modellenmiştir. Model; yolcu sayıları, tren hareket süreleri ve yanaşma süreleri gibi gerçek zamanlı dinamik veriler ile çalışma yeteneğine sahiptir. Bu nedenle, sistemdeki bozucuların benzetimlerini koşturma yönünden avantajlar sunmaktadır. Önerilen model sayesinde, herhangi bir anda sisteme dâhil olabilecek yüksek sayıdaki yolcular benzeri bozucuların neden olacağı talep dalgalanmalarını giderecek bir kontrolör tasarlanması mümkün olacaktır. Oluşturulan modelin kararlılık analizi hem ortak Lyapunov fonksiyonu hem de girişten duruma kararlılık yöntemleri ile sorgulanmıştır. Elde edilen kararlılık analiz sonuçları, MATLAB Simulink®'te oluşturulan modelin çeşitli benzetimleri ile doğrulanmıştır. Bu çalışmanın en

önemli katkısı, istasyonlar ve trenler arasındaki yolcu sayılarının değişiminin literatürdeki istatistikî veya yinelemeli yaklaşımlar yerine, matematiksel olarak modellenmesi ve oluşturulan matematiksel modelin kararlılık analizinin yapılmasıdır. Kararlık analizi için hem ortak Lyapunov fonksiyonları hem de girişten duruma kararlılık analizi yöntemleri seçilmiştir ve benzetim sonuçları ile kararlılık analizi çıktıları doğrulanmıştır. Gelecekte yapılması planlanan çalışmalarda modelin başarımını doğrulamak için turnike verilerine ek olarak tren ve duraktan anlık yolcu bilgisi alınması ve oluşturulan modelin çıktıları ile karşılaştırılması hedeflenmektedir. Çalışmanın ortaya çıkış amacı olan sefer aralığını dinamik olarak sürekli ayarlayacak bir kontrolör tasarlanması ileride yapılması planlanan çalışmaların ana odağı olacaktır.

Kaynakça

- [1] S. I. J. Chien, "Optimization of headway, vehicle size and route choice for minimum cost feeder service," *Transp. Plan. Technol.*, 2005, doi: 10.1080/03081060500322565.
- [2] B. Birol and A. F. Ergenç, "A modelling and simulation study of a metro line as a time-delayed switched system," *J. Rail Transp. Plan. Manag.*, vol. 22, p. 100318, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jrtpm.2022.100318>.
- [3] J. Fang, T. Fujiyama, and H. Wong, "Modelling passenger distribution on metro platforms based on passengers' choices for boarding cars," *Transp. Plan. Technol.*, 2019, doi: 10.1080/03081060.2019.1609218.
- [4] G. F. Newell, "Dispatching policies for a transportation route," *Transp. Sci.*, vol. 5, no. 1, pp. 91–105, Mar. 1971, [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/25767595>.
- [5] E. E. Osuna, and G. F. Newell, "Control strategies for an idealized public transportation system," *Transp. Sci.*, vol. 6, no. 1, pp. 52–72, Mar. 1972, [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/25767635>.
- [6] V. F. Hurdle, "Minimum cost schedules for a public transportation route: II. examples," *Transp. Sci.*, vol. 7, no. 2, pp. 138–157, Mar. 1973, [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/25767694>.
- [7] V. F. Hurdle, "Minimum cost schedules for a public transportation route: I. theory," *Transp. Sci.*, vol. 7, no. 2, pp. 109–137, Mar. 1973, [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/25767693>.
- [8] S. Yıldırım, "Yüksek Hızlı Tren Hatlarında Sinyalizasyon Blok Mesafelerinin Hesaplanması" *Demiryolu Mühendisliği*, Sayı 14, Sayfa 14-25, Temmuz 2021.
- [9] L. Sun, J. G. Jin, D. H. Lee, K. W. Axhausen, and A. Erath, "Demand-driven timetable design for metro services," *Transp. Res. Part C Emerg. Technol.*, 2014, doi: 10.1016/j.trc.2014.06.003.
- [10] I. Sahin, "Markov chain model for delay distribution in train schedules: Assessing the effectiveness of time allowances," *J. Rail Transp. Plan. Manag.*, vol. 7, Sep. 2017, doi: 10.1016/j.jrtpm.2017.08.006.
- [11] J. Xie, J. Zhang, K. Sun, S. Ni, and D. Chen, "Passenger and energy-saving oriented train timetable and stop plan synchronization optimization model," *Transp. Res. Part D Transp. Environ.*, vol. 98, p. 102975, Sep. 2021, doi: 10.1016/j.trd.2021.102975.
- [12] S. Van Aken, N. Bešinović, and R. Goverde, "Solving large-scale train timetable adjustment problems under infrastructure maintenance possessions," *J. Rail Transp. Plan. Manag.*, vol. 7, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.jrtpm.2017.06.003.
- [13] Y. Zhu and R. Goverde, "Railway timetable rescheduling with flexible stopping and flexible short-turning during disruptions," *Transp. Res. Part B Methodol.*, vol. 123, pp. 149–181, Apr. 2019, doi: 10.1016/j.trb.2019.02.015.
- [14] Y. Zhu and R. Goverde, "Dynamic and robust timetable rescheduling for uncertain railway disruptions," *J. Rail Transp. Plan. Manag.*, Apr. 2020, doi: 10.1016/j.jrtpm.2020.100196.
- [15] B. F. Nielsen, L. Frølich, O. Nielsen, and D. Filges, "Estimating passenger numbers in trains using existing weighing capabilities," *Transp. A Transp. Sci.*, vol. 10, Jul. 2014, doi: 10.1080/23249935.2013.795199.
- [16] W. Li and W. Zhu, "A dynamic simulation model of passenger flow distribution on schedule-based rail transit networks with train delays," *J. Traffic Transp. Eng. (English Ed.)*, vol. 3, no. 4, pp. 364–373, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2015.09.009>.
- [17] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 19, no. 5, pp. 59–70, 1999, doi: 10.1109/37.793443.
- [18] A. S. Morse, *Control using logic-based switching*. Springer, London, 1997.
- [19] M. Mahmoud, *Switched time-delay systems: Stability and control*. Springer, New York, 2010.
- [20] D. Liberzon, *Switching in system and control*. Boston, Birkhäuser, 2003.

- [21] S. Chen, L. Jiang, W. Yao and Q. H. Wu, "Application of switched system theory in power system stability," 2014 49th International Universities Power Engineering Conference (UPEC), 2014, pp. 1-6, doi: 10.1109/UPEC.2014.6934651.
- [22] W. Xu, L. Yu, G. Lin and Z. G. Feng, "Optimal switching signal design with a cost on switching action", *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 16, no. 5, pp. 2531-2549, 2020, doi: <https://doi.org/10.3934/jimo.2019068>
- [23] Z. Sun and S. Ge, *Switched linear systems: Control and design*. London, Springer, 2005.
- [24] E. Sontag, "Smooth stabilization implies coprime factorization," *Autom. Control. IEEE Trans.*, vol. 34, pp. 435-443, May 1989, doi: 10.1109/9.28018.
- [25] L. Vu, D. Chatterjee, and D. Liberzon, "Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control," *Automatica*, vol. 43, no. 4, pp. 639-646, 2007, doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.10.007>.

Özgeçmiş



Berkin BİROL

Lisans eğitimini İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol Mühendisliği'nde 2007 yılında, yüksek lisans eğitimini İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği'nde 2010 yılında tamamlamış olup, aynı bölümde doktora eğitimine devam etmektedir. Raylı Ulaşım Sistemleri Enstitüsü'nde Kıdemli Başuzman Araştırmacı olarak çalıştığı TÜBİTAK'ta 2009 yılından itibaren demiryolu sinyalizasyon sistemleri geliştirilmesi, sertifikasyonu ve yaygınlaştırılması projelerinde görev almaktadır. Demiryolu sinyalizasyonu, emniyet kritik sistemler, ölü zamanlı sistemler, anahtarlamalı sistemler ve Petri ağları konularında araştırmalarını sürdürmektedir.

E-Posta: birolb@itu.edu.tr

Ali Fuat ERGENÇ

Lisans ve yüksek lisans eğitimini İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği'nde sırasıyla 1999 ve 2001 yıllarında; doktora eğitimini University of Connecticut Makine Mühendisliği'nde 2007 yılında tamamlamıştır. 2009 yılından beri İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği'nde tam zamanlı öğretim üyesidir. Sabancı Üniversitesi ve İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa'da yarı zamanlı öğretim üyesi olarak ders vermektedir. IEEE, TOK ve SIAM üyesidir. Biyomekatronik, kontrol teorisi ve uygulamaları, sensörler, otomasyon ve nesnelerin interneti alanlarında çalışmaktadır.

E-Posta: ali.ergenc@itu.edu.tr

Beyanlar:

Bu makalede bilimsel araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Yazarların katkıları: Berkin BİROL: Kavramsallaştırma, Metodoloji, Görselleştirme, Yazılım, Kaynaklar, Yazma. Ali Fuat ERGENÇ: İnceleme, Kontrol, Doğrulama.