

## ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

**Zihni ZERİN\***, **Zeki KARACA**

*İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, Türkiye*

*Geliş / Received: 08.05.2016*

*Düzeltilmelerin gelişi / Received in revised form: 20.06.2016*

*Kabul / Accepted: 20.06.2016*

### ÖZ

Bu çalışmada elastisite modülleri kalınlık koordinatına bağlı olarak parçalı sürekli değişen ortotrop elastik malzemeden oluşturulan üç tabakalı silindirik kabukların, zamana göre kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen yanal dış basınç yükü etkisi altında doğrusal dinamik stabilitesi araştırılmıştır. Önce temel bağıntı, doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri çıkarılmıştır. Bu denklemlere Ritz tipi yöntem uygulanarak, kritik yükler ve dinamiklik katsayısı için genel formüller elde edilmiştir. Homojen ortotrop ve izotrop tek tabakalı silindirik kabuklar için uygun ifadeler, bu formüllerden özel olarak elde edilmiştir. Daha sonra sayısal hesaplar yapılarak elastisite modülleri değişiminin, yükleme hızının, tabaka sayısı ve dizilişinin kritik parametrelere etkileri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Üç tabakalı silindirik kabuk, ortotrop elastik malzeme, homojen olmama, doğrusal dinamik stabilite, yanal dış basınç yükü, kritik yük ve dinamiklik katsayısı

## THE LINEAR DYNAMIC STABILITY OF THREE LAYERED NON-HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS

### ABSTRACT

In this study, the linear dynamic stability of three layered orthotropic cylindrical shells in which elasticity moduli is varying piecewise continuously in the thickness direction, under external pressure which vary as a power function of time, was investigated. Firstly, fundamental relations, linear dynamic stability and deformation compatibility equations were derived. By applying modified Ritz type method general formulas were obtained for critical loads and dynamic factor. Proper expressions for homogeneous orthotropic and isotropic single-layer cylindrical shells were obtained as special cases. Then, effects of variation of elasticity moduli, loading speeds, number and ordering of layers on the critical parameters were examined.

**Keywords:** Three layered cylindrical shell, orthotropic elastic material, non-homogeneity, linear dynamic stability, external pressure load, critical load and dynamic factor

### 1. GİRİŞ

Günümüzde elektronik, uzay araçları, modern füze ve havacılık endüstrisinde, denizaltı yapıları ve nükleer reaktörlerinde, inşaat ve makinelerde, homojen ve homojen olmayan özelliklere sahip malzemelerden oluşan çok tabakalı silindirik kabuk elemanları kullanılmaktadır. Çok tabakalı kabuk elemanlarının yaygınlaşmasındaki en önemli etkenlerden biri de sürekli olarak yeni kompozit malzemelerin oluşumu ve kullanımınıdır. Çok tabakalı

\*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 362 312 19 19/1055; e-mail/e-posta: zihniz@omu.edu.tr

kabuklar teorisinin oluşturulması için Bolotin [1] tarafından yapılan girişimlerden sonra, çok tabakalı homojen kabukların stabilite ve titreşimi ile ilgili literatürde pek çok sayıda makale yayınlanmıştır [2-8].

Stabilite ve titreşim problemlerinin çözümünde homojen olmamanın göz önüne alınmaması, beklenen değerlerden sapmalara sebep olur. Homojen olmayan cisim deformasyona uğradığında, kırılmaya kadar yapısını korur. Bu önemli özellik, homojen olmayan malzemelerden oluşan yapı elemanlarının stabilite hesabında, deformasyona maruz cisimler mekaniğinin temel bağıntı ve denklemlerinin kullanılabilmesini sağlar. Malzemenin homojen olmaması, doğal olabileceği gibi değişik etkiler sonucu homojen malzemenin elastik özelliklerinin değişimi ile de meydana gelebilir. Örneğin; uçak ve roketlerdeki bazı kısımlar yüksek sıcaklık etkisi altında işlev gördüğü için o kısımlardaki homojen malzeme homojen olmayan malzemeye dönüşür ve elastik özellikleri koordinatların fonksiyonu olur. Bunun yanı sıra, üretim tekniği, radyasyon etkisi, termik ve yüzeysel cilalamalar vs. ise malzemenin homojenliğini bozan faktörlerdir. Bu durumda malzemenin mekanik özellikleri noktadan noktaya sürekli olarak değişir ve nokta koordinatlarının sürekli fonksiyonu olur [9-11].

Günümüzde imalat yöntemlerindeki hızlı gelişmelere bağlı olarak homojen olmayan malzemelerin oluşumu ve değişik yapı elemanlarında uygulanabilme olasılığı daha da artmıştır. Homojen olmayan malzemelerden oluşan yapı elemanları daha az ağırlık, yüksek mukavemet vs. gibi avantajlara sahip olduğu için onların titreşimi ile ilgili hesap ve yöntemlerin yenilenmesi ve geliştirilmesi bir zorunluluk olarak araştırmacıların önüne çıkmaktadır. Kaynaklarda homojen olmayan malzemelerin davranışlarını sunan çok az sayıda model bulunmaktadır [12-15]. Bu modeller kullanılarak homojen olmayan ortotrop kabukların statik stabilite ve titreşimi ile ilgili son yıllarda yapılan bazı önemli çalışmalar mevcuttur [16-19].

Füze ve uçak sanayisinde yoğun kullanımlarından dolayı, çok tabakalı homojen ve homojen olmayan kompozit silindirik kabukların dinamik yükler etkisi altında stabilite problemlerinin çözümü ile ilgili çalışmalar tüm dönemlerde araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Dinamik basınç yükü etkisi altında silindirik kabukların stabilite problemlerinin deneysel ve teorik incelenmesi ile ilgili ilk çalışmalar 1960 larda başlamıştır [20, 21]. Volmir [22] tarafından sunulan monografide, değişik dinamik yükler etkisi altındaki silindirik kabukların lineer ve lineer olmayan stabilite problemlerinin çözüm yöntemleri sunulmuş ve yayın tarihine kadar olan önemli teorik ve deneysel çalışmaların listesi sunulmuştur. Bu çalışmaların ardından homojen ortotrop malzemeden oluşan kabukların zamana bağlı periyodik olmayan yükler etkisi altında dinamik stabilite probleminin değişik yöntem ve yaklaşımlarla çözümü ile ilgili dikkat çeken birçok çalışma ortaya konulmuştur [23-26]. Homojen olmayan ortotrop kabukların zamana bağlı periyodik olmayarak değişen basınç yükleri etkisi altındaki dinamik burkulma problemlerinin çözümü, sayısal analizler esnasında çıkan zorluklardan dolayı az sayıdadır [27-32]. Üç tabakalı kabukların statik ve dinamik stabilite problemleri ile ilgili çalışmaların tamamı fonksiyonel değişimli izotrop kabuklarla ilgilidir [33-35].

Zamana bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen yanal dış basınç yükleri etkisi altında homojen olmayan ortotrop üç tabakalı silindirik kabukların stabilite problemleri henüz incelenmemiştir. Bu çalışmada söz konusu problemin çözümü hedeflenmektedir. Çalışmada tabakaları oluşturan malzemelerin Poisson oranları ve yoğunlukları sabit kabul edilmektedir.

## 2. MATERYAL VE METOT

### 2.1. Temel Bağıntı ve Denklemler

#### 2.1.1. Üç Tabakalı Homojen Olmayan Ortotrop Silindirik Kabukların Temel Bağıntıları

Çalışmada göz önüne alınan orta uzunluklu üç tabakalı silindirik kabuğun kalınlığı  $2h$ , yarıçapı  $R$  ve uzunluğu  $L$ 'dir. Koordinat sistemi referans yüzeyde olup  $Oz$  eksenini orta tabakanın referans yüzeyinin normali doğrultusunda,  $Ox$  ve  $Oy$  eksenleri ise eksen ve çevre doğrultuları ile çakışıktır (Şekil 1).

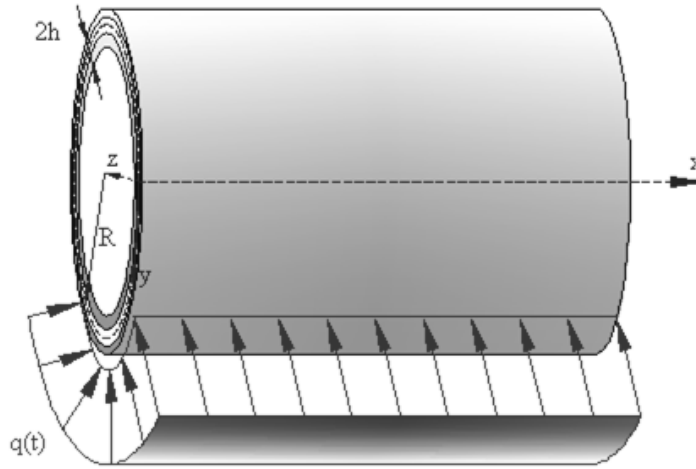
Homojen olmayan ortotrop elastik malzemelerden oluşturulmuş silindirik kabuk, eşit kalınlıkta üç tabakadan oluşturulmuştur. Tabakalar arasındaki değme koşulu rijit bağlanma koşuludur. Bu koşul tüm kabuk için yerdeğiştirmelerin ve deformasyonların aynı olmasını sağlar. Deformasyon anında tabakalar arasında ayrılma ve kayma olmadığı varsayılır. Tabakalar deformasyondan sonra da elastikliğini korur. Kirchhoff hipotezi tüm kabuk için geçerlidir. Bunun sonucu olarak tabakaların birinin diğerine basıncı ihmal edilebilir [1-3, 7].

Üç tabakalı silindirik kabuk silindirik ortotropiye sahip malzemelerden yapılmıştır. Malzemeler homojen olmayıp, elastisite modülleri tabakaların kalınlıkları doğrultusunda değişim göstermektedir [9,11]:

ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

$$\begin{aligned}
 E_1^{(r+1)}(\bar{z}) &= E_{01}^{(r+1)}\varphi^{(r+1)}(\bar{z}) , \quad E_2^{(r+1)}(\bar{z}) = E_{02}^{(r+1)}\varphi^{(r+1)}(\bar{z}) , \\
 G^{(r+1)}(\bar{z}) &= G_0^{(r+1)}\varphi^{(r+1)}(\bar{z}) , \quad (r = 0, 1, 2) , \\
 -h + r\delta &\leq z \leq h + (r+1)\delta , \quad \bar{z} = z/h , \quad \delta = 2h/3
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Burada, tabakaları oluşturan homojen ortotrop malzemelerin,  $E_{0i}^{(r+1)}$  aksenal,  $E_{02}^{(r+1)}$  çevresel doğrultudaki elastisite modüllerini,  $G_0^{(r+1)}$  kayma modüllerini ve  $\delta = 2h/3$  her bir tabakanın kalınlığını göstermektedir.  $\varphi^{(r+1)}(\bar{z}) = 1 + \mu\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z})$  olup  $\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z})$  elastisite modülleri değişimine karşı gelen sürekli fonksiyondur ve  $|\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z})| \leq 1$  koşulunu sağlar,  $\mu$  elastisite modüllerinin kabuk kalınlığı doğrultusunda değişimini gösteren bir parametre olup  $0 \leq \mu < 1$  aralığında değişmektedir.  $\mu = 0$  olması halleri homojen ortotrop malzeme hallerine karşı gelmektedir.



Şekil 1. Üç tabakalı silindirik kabukta koordinat sistemi

Tabakaları oluşturan malzemelerin yoğunlukları sabit olup  $\rho^{(r+1)}$ ,  $(r = 0, 1, 2)$  ile gösterilecek olursa, tabakalı silindirik kabuğun temel denklemlerine girecek olan  $\tilde{\rho}$  için şu tanım geçerli olmaktadır:

$$\tilde{\rho} = \frac{2h}{r+1} \sum_{k=0}^{r+1} \rho^{(k+1)}
 \tag{2}$$

2 numaralı denklemden bir, iki ve üç tabakalı silindirik kabuklarda;

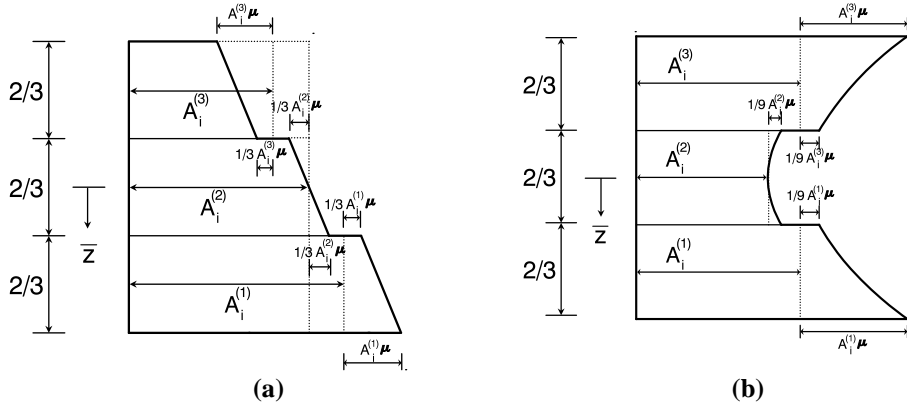
$$\tilde{\rho} = 2h\rho^{(1)}, \quad \tilde{\rho} = h[\rho^{(1)} + \rho^{(2)}], \quad \tilde{\rho} = \frac{2h}{3}[\rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \rho^{(3)}]
 \tag{3}$$

olduğu görülmektedir.

$A_i^{(r+1)}$ ,  $(r = 0, 1, 2)$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  değerleri sırasıyla,  $A_1^{(r+1)} = E_{01}^{(r+1)}$ ,  $A_2^{(r+1)} = E_{02}^{(r+1)}$  ve  $A_3^{(r+1)} = G_0^{(r+1)}$  tabakaları oluşturan malzemelerin elastisite modüllerini göstermek üzere, kabukta elastisite modüllerinin kalınlık koordinatına bağlı olarak değişimi aşağıdaki şekillerde sunulmaktadır [14].

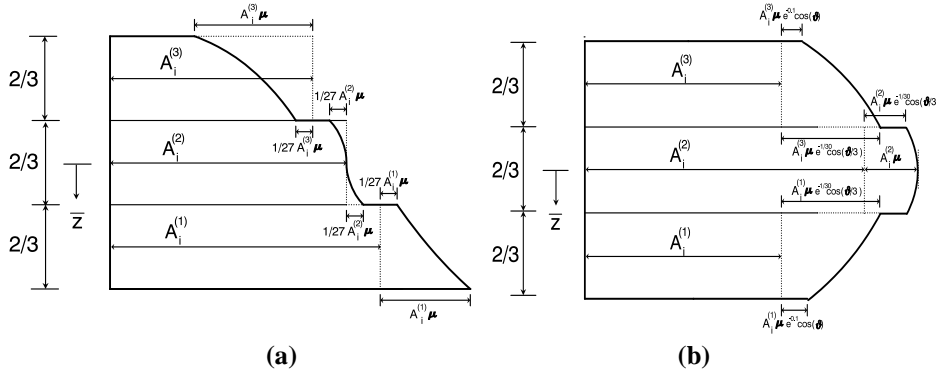
a)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}$  ve  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^2$ ,  $(r = 0, 1, 2)$  olduğunda elastisite modüllerinin değişimi aşağıdaki gibidir (Şekil 2).

Z. ZERİN, Z. KARACA



**Şekil 2.** Üç tabakalı kabukta elastisite modüllerinin (a)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}$  ve (b)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^2$  fonksiyonları şeklinde değişimi

b)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^3$  ve  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(\vartheta\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ) olduğunda elastisite modüllerinin değişimi aşağıdaki gibidir. Burada  $\vartheta$  reel bir sayıdır (Şekil 3):



**Şekil 3.** Üç tabakalı kabukta elastisite modülünün (a)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^3$  ve (b)  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(\vartheta\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ) fonksiyonları şeklinde değişimi

Kirchhoff-Love hipotezine göre referans yüzeyinden  $z$  uzaklığındaki tabakanın deformasyonu,

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + z \chi_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $e_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) orta yüzeydeki deformasyonlar olup,

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

tanımları geçerli olup  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  referans yüzeyde  $x$  ve  $y$  eksenleri doğrultusunda deformasyonlar,  $e_{12}$  kayma deformasyonu,  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{22}$  deformasyona maruz kabuğun  $x$  ve  $y$  eksenleri doğrultusunda eğrilik değişimleri,  $\chi_{12}$  referans yüzeyin burulması,  $W$  radyal yer değiştirme olup, eğrilik merkezine doğru yönü pozitif kabul edilmektedir [7, 22].

Kabuğun ince olduğu ve lineer teoremin geçerli olduğu kabul edilmektedir. Bu çalışmada göz önüne alınan silindirik kabuğun  $W$  radyal yer değiştirmeleri, Kirchhoff-Love kabuk teorisindeki  $W$  yer değiştirmelerine

ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

oranla çok daha küçük olup ( $W \ll 2h$ ), bu özellik ileride temel denklemlerin çıkarılmasında kullanılmaktadır [22]. Buna göre yukarıda tanımlanan kabuk için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi olur:

$$\sigma_{11}^{(r+1)} = \frac{E_{01}^{(r+1)} \varphi^{(r+1)}(\bar{z})}{1 - \nu_{21}^{(r+1)} \nu_{12}^{(r+1)}} (\varepsilon_{11} + \nu_{12}^{(r+1)} \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12}^{(r+1)} = 2 G_0^{(r+1)} \varphi^{(r+1)}(\bar{z}) \varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{22}^{(r+1)} = \frac{E_{02}^{(r+1)} \varphi^{(r+1)}(\bar{z})}{1 - \nu_{21}^{(r+1)} \nu_{12}^{(r+1)}} (\varepsilon_{22} + \nu_{21}^{(r+1)} \varepsilon_{11}), \quad (r = 0, 1, 2)$$
(6)

Burada,  $\nu_{21}^{(r+1)}$  ve  $\nu_{12}^{(r+1)}$  tabakaları oluşturan malzemelerin sabit Poisson oranları olup  $\nu_{21}^{(r+1)} E_{01}^{(r+1)} = \nu_{12}^{(r+1)} E_{02}^{(r+1)}$  bağıntısı geçerlidir.

Birim boyutlu kabuk elemanı kesitine etkileyen kuvvet ve moment bileşenleri şu şekilde ifade edilir [22]:

$$T_{ij} = \int_{-h}^{-1/3h} \sigma_{ij}^{(1)} dz + \int_{-1/3h}^{1/3h} \sigma_{ij}^{(2)} dz + \int_{1/3h}^h \sigma_{ij}^{(3)} dz$$
(7)

$$M_{ij} = \int_{-h}^{-1/3h} \sigma_{ij}^{(1)} z dz + \int_{-1/3h}^{1/3h} \sigma_{ij}^{(2)} z dz + \int_{1/3h}^h \sigma_{ij}^{(3)} z dz, \quad (i, j = 1, 2)$$
(8)

4 numaralı denklem ile tanımlanan deformasyon ifadeleri 6 bağıntılarında göz önüne alınıp, elde edilen ifadeler 7 bağıntılarında yerine yazıldığında kuvvet bileşenleri için,

$$T_{11} = A_{11}^0 e_{11} + A_{12}^0 e_{22} + A_{11}^1 \chi_{11} + A_{12}^1 \chi_{22}, \quad T_{12} = A_{33}^0 e_{12} + A_{33}^1 \chi_{12}$$

$$T_{22} = A_{21}^0 e_{11} + A_{22}^0 e_{22} + A_{21}^1 \chi_{11} + A_{22}^1 \chi_{22}$$
(9)

ifadeleri elde edilir. Aynı şekilde, 4 ifadeleri 6 bağıntılarında göz önüne alınıp, elde edilen ifadeler 8 bağıntısında yerine yazıldığında moment bileşenleri için,

$$M_{11} = A_{11}^1 e_{11} + A_{12}^1 e_{22} + A_{11}^2 \chi_{11} + A_{12}^2 \chi_{22}, \quad M_{12} = A_{33}^1 e_{12} + A_{33}^2 \chi_{12}$$

$$M_{22} = A_{21}^1 e_{11} + A_{22}^1 e_{22} + A_{21}^2 \chi_{11} + A_{22}^2 \chi_{22}$$
(10)

ifadeleri elde edilir. Burada,  $A_{ij}^{k_i}$ , ( $k_i = 0, 1, 2$ ), ( $i, j = 1, 2, 3$ ) katsayıları için aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$A_{11}^{k_i} = h^{k_i+1} \left[ \frac{E_{01}^{(1)}}{1 - \nu_{21}^{(1)} \nu_{12}^{(1)}} \int_{-1}^{-1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{E_{01}^{(2)}}{1 - \nu_{21}^{(2)} \nu_{12}^{(2)}} \int_{-1/3}^{1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(2)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{E_{01}^{(3)}}{1 - \nu_{21}^{(3)} \nu_{12}^{(3)}} \int_{1/3}^1 \bar{z}^{k_i} \varphi^{(3)}(\bar{z}) d\bar{z} \right]$$

$$A_{12}^{k_i} = A_{21}^{k_i} = h^{k_i+1} \left[ \frac{\nu_{12}^{(1)} E_{01}^{(1)}}{1 - \nu_{21}^{(1)} \nu_{12}^{(1)}} \int_{-1}^{-1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{\nu_{12}^{(2)} E_{01}^{(2)}}{1 - \nu_{21}^{(2)} \nu_{12}^{(2)}} \int_{-1/3}^{1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(2)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{\nu_{12}^{(3)} E_{01}^{(3)}}{1 - \nu_{21}^{(3)} \nu_{12}^{(3)}} \int_{1/3}^1 \bar{z}^{k_i} \varphi^{(3)}(\bar{z}) d\bar{z} \right]$$

$$A_{22}^{k_i} = h^{k_i+1} \left[ \frac{E_{02}^{(1)}}{1 - \nu_{21}^{(1)} \nu_{12}^{(1)}} \int_{-1}^{-1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{E_{02}^{(2)}}{1 - \nu_{21}^{(2)} \nu_{12}^{(2)}} \int_{-1/3}^{1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(2)}(\bar{z}) d\bar{z} + \frac{E_{02}^{(3)}}{1 - \nu_{21}^{(3)} \nu_{12}^{(3)}} \int_{1/3}^1 \bar{z}^{k_i} \varphi^{(3)}(\bar{z}) d\bar{z} \right]$$

$$A_{33}^{k_i} = h^{k_i+1} \left[ G_0^{(1)} \int_{-1}^{-1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} + G_0^{(2)} \int_{-1/3}^{1/3} \bar{z}^{k_i} \varphi^{(2)}(\bar{z}) d\bar{z} + G_0^{(3)} \int_{1/3}^1 \bar{z}^{k_i} \varphi^{(3)}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (k_i = 0, 1, 2) \right]$$
(11)

Z. ZERİN, Z. KARACA

### 2.1.2. Üç Tabakalı Homojen Olmayan Ortotrop Silindirik Kabukların Doğrusal Dinamik Stabilite ve Deformasyon Uygunluk Denklemlerinin Çıkarılması

Doğrusal kabuk teorisine göre silindirik kabukların doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [22]:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \frac{T_{22}^0}{R} + T_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2T_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (13)$$

$T_{ij}^0$ , ( $i, j = 1, 2$ ) membran kuvvetleri göstermekte olup;  $T_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) kuvvet bileşenleri ile  $\bar{\Phi} = \Phi / h$  gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir [22]:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad T_{12} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

14 bağıntısı göz önüne alınarak 9 ifadelerinden referans yüzeydeki  $e_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) deformasyon bileşenleri aşağıdaki şekle dönüştürülür:

$$e_{11} = B_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - B_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_{14} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (15)$$

$$e_{22} = B_{21} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - B_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_{24} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad e_{12} = -B_{31} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2B_{32} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Burada, aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$B_{11} = A_{22}^0 Q^{-1}, \quad B_{12} = -A_{12}^0 Q^{-1}, \quad B_{13} = [A_{12}^0 A_{21}^1 - A_{11}^1 A_{22}^0] Q^{-1},$$

$$B_{14} = [A_{12}^0 A_{22}^1 - A_{12}^1 A_{22}^0] Q^{-1}, \quad B_{21} = -A_{21}^0 Q^{-1}, \quad B_{22} = A_{11}^0 Q^{-1},$$

$$B_{23} = [A_{21}^0 A_{11}^1 - A_{11}^0 A_{21}^1] Q^{-1}, \quad B_{24} = [A_{21}^0 A_{12}^1 - A_{11}^0 A_{22}^1] Q^{-1},$$

$$B_{31} = 1 / A_{33}^0, \quad B_{32} = -A_{33}^1 / A_{33}^0, \quad Q = A_{11}^0 A_{22}^0 - A_{21}^0 A_{12}^0 \quad (16)$$

14 bağıntısı 11 ifadelerinde yerine yazıldığında üç tabakalı silindirik kabuk için,

$$M_{11} = C_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + C_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - C_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C_{14} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad M_{12} = -C_{31} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2C_{32} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

$$M_{22} = C_{21} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + C_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - C_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C_{24} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

ifadeleri elde edilir. Burada, şu tanımlar geçerlidir:

$$C_{11} = A_{11}^1 B_{11} + A_{12}^1 B_{21}, \quad C_{12} = A_{11}^1 B_{12} + A_{12}^1 B_{22},$$

$$C_{13} = A_{11}^1 B_{13} + A_{12}^1 B_{23} + A_{11}^2, \quad C_{14} = A_{11}^1 B_{14} + A_{12}^1 B_{24} + A_{12}^2, \quad C_{31} = A_{33}^1 B_{31},$$

$$C_{32} = A_{33}^1 B_{32} + A_{33}^2, \quad C_{21} = A_{21}^1 B_{11} + A_{22}^1 B_{21}, \quad C_{22} = A_{21}^1 B_{12} + A_{22}^1 B_{22},$$

$$C_{23} = A_{21}^1 B_{13} + A_{22}^1 B_{23} + A_{21}^2, \quad C_{24} = A_{21}^1 B_{14} + A_{22}^1 B_{24} + A_{22}^2 \quad (18)$$

ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

Kabul edelim ki, homojen olmayan ortotrop elastik üç tabakalı malzemeden oluşturulan silindirik kabuk zamana göre kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen üniform yanal dış basınç yükü etkisi altında olsun:

$$T_{11}^0 = 0, T_{22}^0 = q(t) = -R(P_1 + P_0 t^\alpha), T_{12}^0 = 0 \quad (19)$$

Burada,  $P_0$  yükleme hızı,  $P_1$  statik yanal basınç yükü ve  $\alpha$  dış basıncın zamana göre değişim katsayısı olup pozitif bir sayıdır.

14, 15, 17 ve 19 ifadeleri 12 ve 13 doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemlerinde yerine yazıldığında, homojen olmayan ortotrop elastik üç tabakalı silindirik bir kabuğun doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri şu şekilde olur:

$$C_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (C_{11} - 2C_{31} + C_{22}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{21} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - C_{13} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - C_{24} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - (C_{14} + 4C_{32} + C_{23}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - R(P_1 + P_0 t^\alpha) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (20)$$

$$B_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (B_{12} + 2B_{31} + B_{21}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - B_{23} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - (B_{13} - 4B_{32} + B_{24}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{14} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (21)$$

20 ve 21 homojen olmayan ortotrop elastik üç tabakalı silindirik bir kabuğun doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleridir.

**2.2. Doğrusal Dinamik Stabilite ve Deformasyon Uygunluk Denklemlerinin Çözümü**

Kabul edelim ki, üç tabakalı silindirik kabuk kenarlarından kayıcı mafsallı olarak mesnetlenmiş olsun. Bu durumda sınır koşulları aşağıdaki gibi olacaktır [22, 23]:

$$x = 0 \text{ ve } x = L \text{ de } W = 0, M_{11} = 0, T_{11} = 0 \text{ ve } T_{12} = 0 \quad (22)$$

Silindirik kabuk kenarlarından mafsallı olduğundan, 20 ve 21 diferansiyel denklemlerinin çözümü genel halde iki katlı trigonometrik seri şeklinde aranır [22, 23]:

$$W = \sum_i \sum_j \xi_{ij}(t) \sin \frac{i_j x}{R} \sin \frac{jy}{R}, \Phi = \sum_i \sum_j \phi_{ij}(t) \sin \frac{i_j x}{R} \sin \frac{jy}{R} \quad (23)$$

23 ifadeleri 20 ve 21 denklemlerinde yerine koyulur ve  $\sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}$  ile çarpımları  $0 < x < L$ ,  $0 < y < 2\pi R$  aralığında integrale edilerek, yani Galerkin Yöntemi uygulanarak, bazı matematiksel işlemlerden sonra elde edilen denklemlerden  $\phi(t)$  yok edildiğinde (her terimin diğerlerinden bağımsız olarak çözülebileceği dikkate alınır),

$$\frac{d^2 \xi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{t_{kr}^2}{\tilde{\rho} R^4} [\lambda - R^3 (P_1 + P_0 t_{kr}^\alpha \tau^\alpha) n^2] \xi(\tau) = 0 \quad (24)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada  $m_1 = \frac{m \pi R}{L}$  ve m eksen doğrultusunda yarım dalga sayısı, n çevre doğrultusunda dalga sayısı  $\phi(t)$  ve  $\xi(t)$  zamana bağlı genliklerdir;  $t_{kr}$  değeri artan yükün etkisiyle  $\xi(t)$ ' nin sonsuza gittiği t zaman değeridir. Bu  $t_{kr}$  zamanı kullanılarak,  $t = t_{kr} \tau$  değişken dönüşümü yapılmış olup,  $\tau$

Z. ZERİN, Z. KARACA

boyutsuz zaman parametresi  $0 \leq \tau \leq 1$  aralığında tanımlanır. Burada adı geçen  $\lambda$  ifadesi için şu tanım geçerlidir:

$$\lambda = [C_{13} m_1^4 + (C_{14} + 4C_{32} + C_{23}) m_1^2 n^2 + C_{24} n^4] + [(B_{13} - 4B_{32} + B_{24}) m_1^2 n^2 + b_{23} m_1^4 + B_{14} n^4 + m_1^2 R] \times \frac{[m_1^2 R - C_{12} m_1^4 - (C_{11} - 2C_{31} + C_{22}) m_1^2 n^2 - C_{21} n^4]}{B_{22} m_1^4 + (B_{12} + 2B_{31} + B_{21}) m_1^2 n^2 + B_{11} n^4} \quad (25)$$

Kabukların yerel stabilite teorisinde açıklandığı gibi, orta uzunluklu kabuklar için,  $m = 1$  olduğunda, dalga parametrelerinin  $n^4 \gg m_1^4$  eşitsizliğini sağladığı düşünülürse, 24 numaralı denklem şu şekle dönüşür [14, 23, 27]:

$$\frac{d^2 \xi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{\tilde{\rho} R^4} \left[ \left( \frac{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}}{B_{11}} \right) n^4 + \frac{m_1^4 R^2}{b_{11} n^4} - R^3 (P_1 + P_0 t_{kr}^\alpha \tau^\alpha) n^2 \right] t_{kr}^2 \xi(\tau) = 0 \quad (26)$$

26 denkleminde Ritz tipi varyasyon yöntemi uygulandığında, yani bu denklem önce  $\frac{d\xi}{d\tau}$  ile çarpılıp,  $\tau$  ya göre, sırasıyla 0'dan  $\tau$  ya ve 0'dan 1'e integrallendiğinde,

$$P_0 t_{kr}^\alpha = B_0(\alpha) \left[ \left( \frac{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}}{B_{11} R^3} \right) n^2 + \frac{1}{B_{11} R} \frac{m_1^4}{n^6} - P_1 \right] + \frac{B_1(\alpha) \tilde{\rho} R}{t_{kr}^2 n^2} \quad (27)$$

karakteristik denklemleri elde edilmektedir. Burada  $B_0(\alpha)$  ve  $B_1(\alpha)$  aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$B_0(\alpha) = \frac{\int_0^1 [\xi(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^1 \int_0^\tau \eta^\alpha \xi'(\eta) \xi(\eta) d\eta d\tau}, \quad B_1(\alpha) = \frac{\int_0^1 [\xi'(\tau)]^2 d\tau}{2 \int_0^1 \int_0^\tau \eta^\alpha \xi'(\eta) \xi(\eta) d\eta d\tau} \quad (28)$$

Basıncın zamana göre değişim katsayısı  $\alpha$  'nın değişik değerlerinde  $\xi(\tau)$  yaklaşım fonksiyonu seçimine göre  $B_0(\alpha)$  ve  $B_1(\alpha)$  değerleri Çizelge 1'de gösterilmektedir.

**Çizelge 1.** Değişik  $\alpha$  değerleri için  $\xi(\tau)$ 'ya bağlı  $B_0(\alpha)$  ve  $B_1(\alpha)$  'nın dağılımı

$\xi(\tau) = A e^{50\tau} \tau \left( \frac{52}{51} - \tau \right), \quad \xi(0) = \frac{d\xi(1)}{d\tau} = 0$					
$\alpha$	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000
$B_0(\alpha)$	1,037	1,055	1,074	1,093	1,112
$B_1(\alpha)$	539,947	549,464	559,464	569,402	579,462

$\xi(\tau)$  yaklaşım fonksiyonu içinde geçen A, yerdeğiştirme genliği olup, statik duruma geçiş koşulundan bulunur [16, 27, 33].

27 ifadesindeki  $P_0 t_{kr}^\alpha$  fonksiyonu  $n^2$  'ye göre minimize edilerek,

$$\frac{B_1(\alpha) \tilde{\rho} R}{t_{kr}^2 n^2} = B_0(\alpha) \left( \frac{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}}{B_{11} R^3} \right) n^2 - \frac{3 B_0(\alpha) m_1^4}{B_{11} R n^6} \quad (29)$$



ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

elde edilir. 29 ifadesi 27 denkleminde yerine konursa kritik yanal dış basınç yükünün bulunması için,

$$P_0 t_{kr}^\alpha = 2 B_0 (\alpha) \left[ \left( \frac{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}}{B_{11} R^3} \right) n^2 - \frac{I}{R B_{11}} \frac{m_1^4}{n^6} - \frac{P_1}{2} \right] \quad (30)$$

denklemini elde edilir. 27 ve 30 numaralı denklemlerden  $t_{kr}$  yok edildiğinde,

$$(1 - 3\Omega)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} (1 - \Omega - \frac{I}{2} \overline{P_1} \Omega^{1/4})^{\frac{4}{1+\alpha}} = \Lambda^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \Omega \quad (31)$$

cebirsel denklemini bulunur. Burada ise,

$$\Omega = \frac{R^2}{(C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14})} \frac{m_1^4}{n^8}, \quad \overline{P_1} = \frac{P_1 R^{5/2} B_{11}}{(C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14})^{3/4} m_1}, \quad (32)$$

$$\Lambda = \frac{B_1(\alpha) P_0^\alpha R^\alpha b_{11}^\alpha \tilde{\rho}}{2^\alpha (B_0(\alpha))^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} m_1^\alpha (C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14})^{\frac{3+\alpha}{2\alpha}}}$$

tanımları geçerlidir.  $P_1 = 0$  olduğunda 31 numaralı denklem,

$$(1 - 3\Omega)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} (1 - \Omega)^{\frac{4}{1+\alpha}} = \Lambda^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \Omega \quad (33)$$

şekline dönüşür.  $\Omega < 1$  ve denklemin sağ ve sol tarafındaki sayılar pozitif olduğundan çözümü;

$$\Omega = \Lambda^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \quad (34)$$

şeklinde elde edilir. 34 ifadesi, 26 ifadesinde göz önüne alındığında yanal dış basınç yüklemesinde dinamik kritik yük karşı gelen dalga sayısı için,

$$n_d^2 = \left( \frac{R^2 m_1^4}{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}} \right)^{1/4} \Lambda^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \quad (35)$$

elde edilir.  $P_1 = 0$  olduğunda  $n_d^2$  ifadesi 30 denkleminde yerine konursa, dış basınç yüklemesinde dinamik kritik yük için,

$$P_{kr}^d = P_0 t_{kr}^\alpha = \frac{2 B_0(\alpha) m_1}{B_{11} R^{5/2}} (C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14})^{3/4} \Lambda^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \quad (36)$$

ifadesi elde edilir. Statik durumda ( $t_{kr} \rightarrow \infty, P_0 \rightarrow 0$ ), 29 numaralı denkleminde statik kritik yanal dış basınç yüküne karşı gelen dalga sayısı için,

$$n_{st}^2 = \left( \frac{3 m_1^4 R^2}{C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14}} \right)^{1/4} \quad (37)$$

ifadesi elde edilir.  $n_{st}^2$  ifadesi 30 numaralı denkleminde yerine yazıldığında, statik kritik yanal dış basınç yükü ve dinamiklik katsayısı için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

Z. ZERİN, Z. KARACA

$$P_{kr}^{st} = \frac{4 B_0(\alpha) m_1}{3^{3/4} B_{11} R^{5/2}} (C_{24} B_{11} - C_{21} B_{14})^{3/4} \quad (38)$$

$$K_d = \frac{P_{kr}^d}{P_{kr}^{st}} = \frac{3^{3/4}}{2} \Lambda^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \quad (39)$$

$\mu = 0$ ,  $\alpha = 1$  ve  $N = 1$  olduğunda, zamana bağlı lineer değişen yanal dış basınç yükü etkisi altında homojen ortotrop malzemeden oluşan bir tabakalı silindirik kabuğun kritik parametreleri için ifadeler elde edilir. Bu ifadelerden homojen izotrop malzemeden oluşan silindirik kabuk için kritik parametrelerin uygun ifadeleri özel olarak elde edilebilir.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

#### 3.1. Sayısal Hesaplar ve Analiz

##### 3.1.1. Karşılaştırmalar

Yapılan çalışmanın doğruluğunu kanıtlamak için homojen ( $\mu = 0$ ), tek tabakalı silindirik kabuk dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayılarının değişik  $P_0$  yükleme hızlarındaki değerleri, teorik [23] ve deneysel [21] çalışmalarındaki sonuçlarla karşılaştırılmakta ve Çizelge 2’de sunulmaktadır. Hesaplarda  $E_0^{(r+1)} = 7,75 \times 10^4$  MPa ,  $\nu^{(r+1)} = 0,3$  ,  $\rho^{(r+1)} = 3100$  kg / m<sup>3</sup> , ( $r = 0$ ) malzeme özellikleri kullanılmıştır [23]. Çizelge 2’den bizim sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir.

**Çizelge 2.** Kritik parametre değerlerinin teorik ve deney sonuçlarıyla karşılaştırılması

$P_0$ (MPa / sn)	[23] Teorik		[21] Deney		Bizim Çalışma $\mu = 0$	
	$P_{kr}^d$ (MPa)	$K_d$	$P_{kr}^d$ (MPa)	$K_d$	$P_{kr}^d$ (MPa)	$K_d$
200	0,590	2,560	0,562	2,273	0,670	2,600
470	0,880	3,310	0,861	3,485	0,890	3,240
650	1,040	4,110	1,013	4,098	1,060	4,000

Çizelge 3’de homojen ve homojen olmayan ( $\varphi_1^{(0)}(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|} \cos(0,2\bar{z})$ ) ortotrop silindirik kabuğun kritik dinamik yük ve dinamiklik katsayısı değerleri Sofiyev ve Aksogan [14] değerleri ile karşılaştırılmakta ve sonuçların uyum içinde olduğu görülmektedir.

**Çizelge 3.** Kritik parametre değerlerinin Sofiyev ve Aksogan [14] sonuçlarıyla karşılaştırılması

$\mu$	Sofiyev ve Aksogan [14]		Bizim Çalışma	
	$P_{kr}^d$ (MPa)	$K_d$	$P_{kr}^d$ (MPa)	$K_d$
0,0	0,241	6,218	0,241	6,218
0,3	0,274	5,479	0,274	5,479
0,6	0,303	4,953	0,303	4,952
0,9	0,330	4,554	0,329	4,554

### 3.1.2. Üç Tabakalı Homojen Olmayan Silindirik Kabukların Doğrusal Dinamik Stabilité Analizi

Bu bölümde silindirik kabuklar bir, iki ve üç tabakalı olduğunda tabakaları oluşturan ortotrop elastik malzeme sabitlerine,  $\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}; \bar{z}^2; \bar{z}^3$  ve  $e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(\nu\bar{z})$  ( $r = 0, 1, 2$ ) homojen olmama fonksiyonlarına ve kabuğun karakteristiklerine bağlı olarak elde edilen sayısal hesaplar yapılmaktadır. Tüm hesaplarda kabuk ölçülerine ait parametreler  $R/h = 225$ ,  $L/R = 2,22$ , yükleme hızı  $P_0 = 200$  MPa/s ve basıncın zamana göre değişimini gösteren  $\alpha$  katsayısı için 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0 değerleri kullanılmaktadır [14, 23, 27].

Kabuğun tabakalarında kullanılan grafit-epoksi malzeme sabitleri [7];  $E_{01}^{(r+1)} = 1,724 \times 10^5$  MPa,  $E_{02}^{(r+1)} = 7,79 \times 10^3$  MPa,  $\nu_{21}^{(r+1)} = 0,35$ ,  $\nu_{12}^{(r+1)} = 0,016$ ,  $\rho^{(r+1)} = 1530$  kg/m<sup>3</sup> şeklinde olup, tabakanın 1 doğrultusu, silindir eksenine paralel yerleştirilmiş ise buna (0°) dizilişi, silindirin çevresel doğrultusunda yerleştirilmiş ise buna (90°) dizilişi adı verilmektedir. Buna göre her tabakanın farklı yerleştirileceği düşünülürse, tek tabakalı kabuk için (0°) ve (90°), iki tabakalı kabuk için (0°/90°) ve (90°/0°), üç tabakalı kabuk için (0°/90°/0°) ve (90°/0°/90°) tabaka dizilişleri olabilmektedir. Ardışık iki tabaka aynı yönde yerleştirilmemekte ve (0°) ve (90°) dizilişleri dışındaki açılar kullanılmamaktadır.

Elastisite modülleri değişim fonksiyonu  $\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}; \bar{z}^2; \bar{z}^3$  ve  $e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(1,2\bar{z})$  ( $r = 0, 1, 2$ ) fonksiyonlar şeklinde değiştiği durumlarda tabaka sayısı ve dizilişine bağlı olarak kritik parametrelerin değişimi Çizelge 4'te sunulmaktadır ( $P = P_0 t^\alpha$ ,  $\alpha = 1$ ).

**Çizelge 4.** Elastisite modüllerinin kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiği durumlarda tabaka dizilişine bağlı olarak kritik parametrelerin değişimi ( $P = P_0 t$ )

$\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}, (r = 0, 1, 2)$						
Tabaka Dizilişi	$P_{kr}^d (MPa), (n_d)$		$P_{kr}^{st} (MPa), (n_s)$		$K_d$	
	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$
(0°)	1,458(39)	1,348(44)	0,050(8)	0,040(9)	28,929	33,859
(90°)	3,163(12)	2,924(13)	0,237(4)	0,187(4)	13,338	15,611
(0°/90°)	2,103(22)	2,138(22)	0,129(6)	0,118(6)	16,339	18,059
(90°/0°)	2,103(22)	1,917(25)	0,129(6)	0,106(7)	16,339	18,046
(0°/90°/0°)	1,685(31)	1,659(32)	0,071(7)	0,068(7)	23,818	24,564
(90°/0°/90°)	3,135(12)	2,779(14)	0,389(5)	0,271(5)	8,055	10,246
$\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^2, (r = 0, 1, 2)$						
(0°)	1,458(39)	1,625(33)	0,050(8)	0,074(8)	28,929	21,832
(90°)	3,163(12)	3,524(10)	0,237(4)	0,350(4)	13,338	10,066
(0°/90°)	2,103(22)	2,292(19)	0,129(6)	0,178(6)	16,339	12,883
(90°/0°)	2,103(22)	2,292(19)	0,129(6)	0,178(6)	16,339	12,883
(0°/90°/0°)	1,685(31)	1,809(28)	0,071(7)	0,096(7)	23,818	18,910
(90°/0°/90°)	3,135(12)	3,502(10)	0,389(5)	0,551(5)	8,055	6,351
$\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}^3, (r = 0, 1, 2)$						
(0°)	1,458(39)	1,422(40)	0,050(8)	0,047(9)	28,929	30,447
(90°)	3,163(12)	3,083(12)	0,237(4)	0,220(4)	13,338	14,037
(0°/90°)	2,103(22)	2,142(22)	0,129(6)	0,128(6)	16,339	16,693
(90°/0°)	2,103(22)	1,990(24)	0,129(6)	0,114(7)	16,339	17,422
(0°/90°/0°)	1,685(31)	1,682(31)	0,071(7)	0,070(7)	23,818	23,914
(90°/0°/90°)	3,135(12)	3,013(13)	0,389(5)	0,346(5)	8,055	8,719
$\varphi_i^{(r+1)}(\bar{z}) = e^{-0.1 \bar{z} } \cos(1,2\bar{z}), (r = 0, 1, 2)$						
(0°)	1,458(39)	1,616(33)	0,050(8)	0,078(9)	28,929	20,732
(90°)	3,163(12)	3,505(10)	0,237(4)	0,367(4)	13,338	9,558
(0°/90°)	2,103(22)	2,355(19)	0,129(6)	0,205(6)	16,339	11,468
(90°/0°)	2,103(22)	2,355(19)	0,129(6)	0,205(6)	16,339	11,468
(0°/90°/0°)	1,685(31)	1,910(26)	0,071(7)	0,116(7)	23,818	16,531
(90°/0°/90°)	3,135(12)	3,466(10)	0,389(5)	0,613(5)	8,055	5,658

Z. ZERİN, Z. KARACA

Çizelge 4 incelendiğinde elastisite modülleri değişim katsayısı olan  $\mu$  'nün 0,9 alınması durumunda elde edilen sonuçların, 0 olması (homojen hal) haline göre değişimleri yüzde ifadeler olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir. Tek tabakalı, (0°) ve (90°) dizilişli silindirik kabuklarda elastisite modülleri değişim fonksiyonları lineer, parabolik, kübik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde; dinamik kritik yüke olan etkiler, sırasıyla % 7,56, % 11,40, % 2,53 ve % 10,79, dinamiklik katsayısına olan etkiler, sırasıyla % 17,04, % 24,53, % 5,25 ve % 28,34 olmaktadır. İki tabakalı silindirik kabuklarda;  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}; \bar{z}^2; \bar{z}^3$  ve  $e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(1,2\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ) olduğunda; (0°/90°) dizilişe sahip silindirik kabukta dinamik kritik yüke olan etkiler, sırasıyla % 1,63, % 8,98, % 1,82 ve % 11,95, dinamiklik katsayısına olan etkiler, sırasıyla % 10,53, % 21,15; % 2,17 ve % 28,34 olmaktadır. (90°/0°) dizilişe sahip silindirik kabukta dinamik kritik yüke olan etkiler, sırasıyla % 8,86, % 8,98, % 5,40 ve % 11,95, dinamiklik katsayısına olan etki sırasıyla % 10,45, % 21,15, % 6,63 ve % 29,81 olmaktadır.

Üç tabakalı silindirik kabukta  $\varphi_1^{(r+1)}(\bar{z}) = \bar{z}; \bar{z}^2; \bar{z}^3$  ve  $e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(1,2\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ) olduğunda, (0°/90°/0°) dizilişli silindirik kabukta dinamik kritik yüke olan etkiler, sırasıyla % 1,53, % 7,38, % 0,1 ve % 13,36, dinamiklik katsayısına olan etkiler, sırasıyla % 3,13, % 20,61, % 0,1 ve % 30,6 olmaktadır. Ayrıca (90°/0°/90°) dizilişli silindirik kabukta dinamik kritik yüke olan etkiler, sırasıyla % 11,34; % 11,72, % 3,89 ve % 10,57, dinamiklik katsayısına etkiler ise sırasıyla % 27,21, % 21,15, % 8,25 ve % 29,75 olmaktadır. Tek tabakalı (90°) dizilişe sahip silindirik kabukta dinamik kritik yük en büyük değerlerini almaktadır. Dinamiklik katsayısı ise (90°/0°/90°) dizilişe sahip üç tabakalı silindirik kabukta en küçük değerlerini almaktadır. Elastisite modüllerinin değişiminin kritik parametrelere en fazla etkisi de yine üç tabakalı (90°/0°/90°) tabaka dizilişine sahip silindirik kabukta oluşmaktadır.

Elastisite modülleri değişim fonksiyonları ve basıncın zamana göre değişim katsayısına bağlı olarak kritik parametrelerin değişimi Çizelge 5'te sunulmaktadır. ( $P = P_0 t^\alpha$ ,  $\alpha = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0$ ). Çizelgeye göre, basıncın zamana göre değişim katsayısı olan  $\alpha$  arttığında dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerleri azalmaktadır. Ayrıca  $\alpha$  arttığında elastisite modüllerinin değişiminin dinamik kritik yüke etkisi artmakta, dinamiklik katsayısına etkisi azalmaktadır. Elastisite modülleri değişim fonksiyonları  $\varphi_1^{(r+1)} = e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(0,8\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ) olduğunda dinamik kritik yüke olan etki; (0°) ve (90°) dizilişe sahip tek tabakalı silindirik kabuklarda  $\alpha = 1$  olduğunda % 13,89,  $\alpha = 3$  olduğunda % 21,55, (0°/90°) ve (90°/0°) dizilişe sahip iki tabakalı silindirik kabuklarda  $\alpha = 1$  olduğunda % 14,52,  $\alpha = 3$  olduğunda % 22,56, (0°/90°/0°) dizilişe sahip üç tabakalı silindirik kabukta  $\alpha = 1$  olduğunda % 15,17,  $\alpha = 3$  olduğunda % 23,61 ve (90°/0°/90°) dizilişe sahip üç tabakalı silindirik kabukta  $\alpha = 1$  olduğunda % 13,77,  $\alpha = 3$  olduğunda % 21,36 olmaktadır. Dinamiklik katsayısına olan etki; (0°) ve (90°) dizilişe sahip tek tabakalı silindirik kabuklarda  $\alpha = 1$  için % 33,15 ve  $\alpha = 3$  için % 28,67 olmaktadır. İki tabakalı (0°/90°) ve (90°/0°) dizilişe sahip silindirik kabuklarda  $\alpha = 1$  için % 33,90,  $\alpha = 3$  için % 29,26 olmaktadır. (0°/90°/0°) dizilişli üç tabakalı silindirik kabukta  $\alpha = 1$  için % 34,19,  $\alpha = 3$  için % 29,37 ve (90°/0°/90°) dizilişe sahip üç tabakalı silindirik kabukta  $\alpha = 1$  için % 33,86,  $\alpha = 3$  için % 29,45 olduğu görülmektedir.

0° dizilişe sahip tek tabakalı silindirik kabukta dinamik kritik yükün farklı  $\alpha$  değerleri için burkulma anına kadar değişimi Şekil 4'te sunulmaktadır. Şekil 4'e göre,  $\alpha$  değeri arttıkça, dinamik kritik yükün artışı daha yavaş olmakta, kritik zaman süresi artmakta, ancak daha küçük dinamik kritik yük değerlerinde silindirik kabuk stabilitesini kaybetmektedir.

Elastisite modülleri arasında  $k$  oranı bulunan izotrop malzemelerden oluşturulmuş iki ve üç tabakalı silindirik kabuklarda kritik parametrelerin değişimi Çizelge 6-8'de sunulmaktadır. Çizelge 6-8'de elastisite modülleri değişim fonksiyonları  $\varphi_1^{(r+1)} = e^{-0.1|\bar{z}|} \cos(0,5\bar{z})$ , ( $r = 0, 1, 2$ ),  $P = P_0 t$  olarak dikkate alınmıştır.

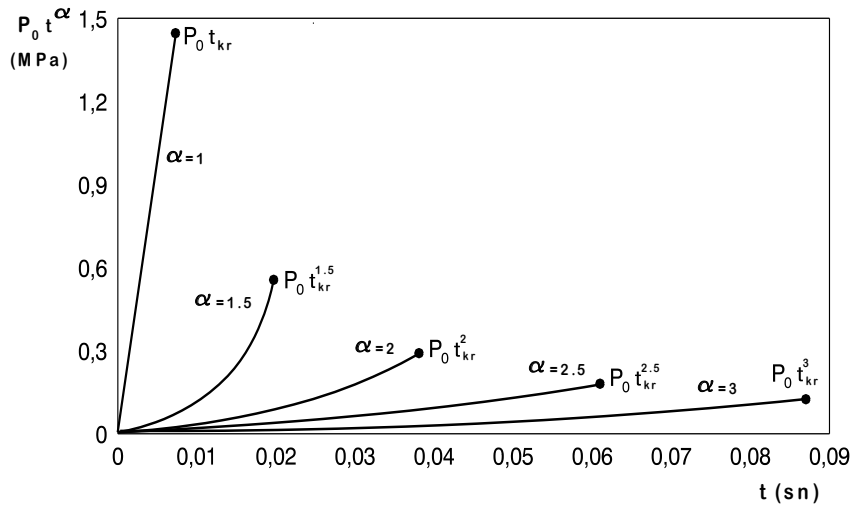
Çizelge 6 incelendiğinde, elastisite modülleri arasındaki oran  $k$  olan iki tabakalı izotrop malzemelerden oluşturulmuş silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi görülmektedir. İki tabakalı silindirik kabuk için  $E_0^{(1)} = kE_0^{(2)}$  ve  $E_0^{(2)} = kE_0^{(1)}$  olması durumlarında kritik parametrelerin değerlerinin homojen ve homojen olmayan durumda aynı olduğu görülmektedir.  $k = 10$  olması durumunda dinamik ve statik kritik yük değerleri  $k = 1$  durumuna göre azalma göstermektedir.  $k$  'nın değerlerine bağlı olarak iki tabakalı silindirik kabuk için elde edilen kritik parametre değerlerinden yararlanarak, çalışmada homojen izotrop ve tek tabakalı kabuk için elde edilen kritik parametrelerin özel ifadelerinde malzeme sabitleri ve kabuğun geometrik karakteristikleri yerine koyularak elde edilen denklemin çözümünden, bunlara eşdeğer olan kritik parametre değerlerinin elde

ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

edilebildiği tek tabakalı kabuğun elastisite modülü ve Poisson oranı kolayca bulunabilmektedir.  $k$  oranı arttığında, dinamik kritik yük değerleri azalmaktadır. Buna bağlı olarak, silindirik kabuk daha kararsız olmaktadır. Aynı sebeple, statik yük  $k$  oranı arttıkça daha hızlı azalmakta, dinamiklik katsayısı ve dinamik dalga sayısı artmaktadır.

**Çizelge 5.** Elastisite modülleri değişim fonksiyonları ve basıncın zamana göre değişim katsayısına bağlı olarak kritik parametrelerin değişimi

$P_{kr}^d (MPa)$						
$\alpha$	(0°)		(90°)		(0°/90°)	
	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$
1,0	1,458	1,661	3,163	3,602	2,103	2,409
1,5	0,551	0,644	1,395	1,631	0,855	1,006
2,0	0,290	0,344	0,813	0,967	0,472	0,565
2,5	0,184	0,221	0,556	0,669	0,310	0,377
3,0	0,131	0,160	0,419	0,510	0,227	0,279
$\alpha$	(90°/0°)		(0°/90°/0°)		(90°/0°/90°)	
1,0	2,103	2,409	1,685	1,941	3,135	3,567
1,5	0,855	1,006	0,655	0,776	1,380	1,611
2,0	0,472	0,565	0,351	0,424	0,803	0,954
2,5	0,310	0,377	0,226	0,277	0,549	0,660
3,0	0,227	0,279	0,163	0,202	0,414	0,502
$K_d$						
$\alpha$	(0°)		(90°)		(0°/90°)	
1,0	28,93	19,34	13,34	8,916	16,34	10,8
1,5	10,735	7,365	5,778	3,964	6,524	4,431
2,0	5,544	3,870	3,309	2,310	3,538	2,447
2,5	3,458	2,444	2,222	1,570	2,285	1,601
3,0	2,427	1,731	1,648	1,176	1,646	1,165
$\alpha$	(90°/0°)		(0°/90°/0°)		(90°/0°/90°)	
1,0	16,34	10,8	23,82	15,68	8,055	5,327
1,5	6,524	4,431	9,098	6,159	3,483	2,364
2,0	3,538	2,447	4,790	3,304	1,992	1,375
2,5	2,285	1,601	3,029	2,118	1,336	0,934
3,0	1,646	1,165	2,148	1,517	0,991	0,699



**Şekil 4.** Dinamik kritik yükün farklı  $\alpha$  için burkulma anına kadar değişimi

Z. ZERİN, Z. KARACA

**Çizelge 6.** Elastisite modülleri arasındaki oran  $k$  olan iki tabakalı izotrop malzemelerden oluşturulmuş silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi

$E_o^{(1)} = kE_o^{(2)}, E_o^{(1)} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu^{(1)} = 0,3, \rho_o^{(1)} = \rho_o^{(2)} = 7800 \text{ kg/m}^3$						
$k$	$P_{kr}^d \text{ (MPa)}, (n_d)$		$P_{kr}^{st} \text{ (MPa)}, (n_{st})$		$K_d$	
	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$
1	0,897(5)	1,035(4)	0,638(5)	1,139(6)	1,406	0,909
5	0,704(8)	0,813(6)	0,272(6)	0,487(6)	2,588	1,669
10	0,641(9)	0,742(7)	0,201(6)	0,362(6)	3,188	2,052
$E_o^{(2)} = kE_o^{(1)}, E_o^{(2)} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu^{(2)} = 0,3, \rho_o^{(1)} = \rho_o^{(2)} = 7800 \text{ kg/m}^3$						
1	0,897(5)	1,035(4)	0,638(5)	1,139(6)	1,406	0,909
5	0,704(8)	0,813(6)	0,272(6)	0,487(6)	2,588	1,669
10	0,641(9)	0,742(7)	0,201(6)	0,362(6)	3,188	2,052

$E_o^{(1)} = E_o^{(3)} = kE_o^{(2)}$  olması durumunda izotrop üç tabakalı silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi Çizelge 7’de sunulmaktadır. Üç tabakalı silindirik kabuk için  $E_o^{(1)} = E_o^{(3)} = kE_o^{(2)}$  olması durumunda  $k$  ’nın artımına bağlı olarak dinamik ve statik kritik yük değerlerinin azalmakta olduğu görülmektedir. Ayrıca, iki tabakalı kabuklar için yapılmış hesaplamalarla karşılaştırıldığında beklenildiği gibi  $k = 1$  değerinde iki ve üç tabakalı kabuk için kritik parametreler eşit değerler almaktadır. Üç tabakalı silindirik kabukta, dıştaki iki tabakanın elastisite modülleri sabit kalırken iç tabakanın elastisite modülü  $k$  oranında azaldığında, dinamik kritik yükteki azalma oranı küçük olmaktadır. Sadece orta tabakanın elastisite modülünün değiştiği durumda, tüm kabuğun elastisite modülündeki değişim az olmakta ve bu durumda da kritik yükteki azalma oranı küçük olmaktadır. Aynı sebeple, statik yükteki azalma ve dinamiklik katsayısındaki artma oranları da küçük olmaktadır. Dinamik kritik yüke karşı gelen dalga sayısı ise değişmemektedir.

Çizelge 8’ de,  $E_o^{(2)} = kE_o^{(1)} = kE_o^{(3)}$  olması durumunda izotrop üç tabakalı silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi sunulmaktadır. Üç tabakalı silindirik kabuk için  $E_o^{(2)} = kE_o^{(1)} = kE_o^{(3)}$  olması durumunda  $k$  ’nın artımına bağlı olarak dinamik ve statik kritik yük değerlerinin azalmakta olduğu görülmektedir. Ayrıca  $E_o^{(1)} = E_o^{(3)} = kE_o^{(2)}$  durumunda olduğu gibi, iki tabakalı kabuklar için yapılmış hesaplamalarla karşılaştırıldığında beklenildiği gibi  $k = 1$  değerinde iki ve üç tabakalı kabuk için kritik parametreler eşit değerler almaktadır.

Üç tabakalı silindirik kabukta, dıştaki iki tabakanın elastisite modülleri  $k$  oranında azalırken, iç tabakanın elastisite modülü sabit kaldığında, dinamik kritik yük değerindeki azalma oranı büyük olmaktadır. Sadece orta tabakanın elastisite modülünün sabit kaldığı bu durumda, tüm kabuğun elastisite modülündeki değişim miktarı fazla olmakta ve bu durumda da kritik yükteki azalma oranı büyük olmaktadır. Aynı sebeple, statik yükteki azalma ve dinamiklik katsayısındaki artma oranları da büyük olmaktadır. Dinamik kritik yüke karşı gelen dalga sayısı değerleri de artış göstermektedir.

**Çizelge 7.**  $E_o^{(1)} = E_o^{(3)} = kE_o^{(2)}$  olması durumunda izotrop üç tabakalı silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi

$E_o^{(1)} = E_o^{(3)} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0,3, \rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = 7800 \text{ kg / m}^3$						
$k$	$P_{kr}^d \text{ (MPa)}, (n_d)$		$P_{kr}^{st} \text{ (MPa)}, (n_{st})$		$K_d$	
	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$
1	0,897(5)	1,035(4)	0,638(5)	1,139(6)	1,406	0,909
2	0,892(5)	1,030(4)	0,601(5)	1,070(5)	1,485	0,962
3	0,891(5)	1,028(4)	0,588(5)	1,047(5)	1,515	0,982
4	0,890(5)	1,027(4)	0,582(5)	1,034(5)	1,531	0,993
5	0,890(5)	1,027(4)	0,577(5)	1,027(5)	1,541	1,000
10	0,889(5)	1,026(4)	0,569(5)	1,011(5)	1,563	1,014

ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ

**Çizelge 8.**  $E_o^{(2)} = kE_o^{(1)} = kE_o^{(3)}$  olması durumunda izotrop üç tabakalı silindirik kabukta kritik parametrelerin değişimi ( $\varphi_1^{(r+1)} = e^{-0.1|z|} \cos(0,5z)$ , ( $r = 0, 1, 2$ ),  $P = P_o t$ )

$E_o^{(2)} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , $\nu^{(2)} = 0,3$ , $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = 7800 \text{ kg / m}^3$						
$k$	$P_{kr}^d \text{ (MPa) }, (n_d)$		$P_{kr}^{st} \text{ (MPa) }, (n_{st})$		$K_d$	
	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$	$\mu = 0$	$\mu = 0,9$
1	0,897(5)	1,035(4)	0,638(5)	1,139(6)	1,406	0,909
5	0,609(10)	0,704(8)	0,166(6)	0,299(6)	3,676	2,356
6	0,587(10)	0,679(8)	0,146(6)	0,265(6)	4,009	2,566
7	0,569(11)	0,659(9)	0,132(6)	0,240(6)	4,300	2,749
8	0,555(11)	0,643(9)	0,122(6)	0,221(6)	4,557	2,911
9	0,543(12)	0,629(9)	0,114(6)	0,206(6)	4,786	3,055
10	0,533(12)	0,617(10)	0,107(6)	0,194(6)	4,994	3,185

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada homojen olmayan ortotrop üç tabakalı silindirik kabukların zamana bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen üniform yanal dış basınç yükü etkisi altında doğrusal dinamik stabilitesi incelenmiştir. Elastisite modülleri tabakaların kalınlık koordinatına bağlı olarak parçalı sürekli değişen ortotrop malzemelerden meydana gelmiş üç tabakalı silindirik kabukların temel bağıntıları, doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri elde edilmiştir. Kenarlarından kayıcı mafsallı sınır koşulunda doğrusal dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri çözülerek kritik parametreler için analitik ifadeler bulunmuştur. Elde edilen genel ifadelerden elastisite modülleri değişim katsayısı sıfır olduğunda (homojen malzemeden oluşturulmuş silindirik kabuk) zamana bağlı lineer olarak değişen yanal dış basınç yükü etkisi altında homojen ortotrop ve izotrop malzemelerden oluşturulmuş silindirik kabuklar için uygun özel ifadeler elde edilmiştir. Bilgisayar programlaması yardımıyla genel ifadeler kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış ve elastisite modüllerinin değişiminin, basıncın zamana göre değişim katsayısı, yükleme hızı değişimi, tabaka sayısı ve dizilişi değişiminin kritik parametrelere etkileri incelenmiştir.

Sayısal analizler sonrası şu sonuçlar elde edilmiştir:

- Elastisite modüllerinin değişimi lineer, kuadratik ve kübik fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde en büyük etki kuadratik halde olmaktadır.
- Dinamik kritik yükün en büyük değerinin ( $90^\circ$ ) dizilişe sahip tek tabakalı silindirik kabukta elde edildiği görülmektedir.
- Dinamiklik katsayısının en küçük değerinin ( $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ) dizilişe sahip üç tabakalı silindirik kabukta elde edildiği görülmektedir.
- Çapraz dizilişe sahip tabakalı silindirik kabukta, tüm tabaka sayısı ve dizilişlerinde basıncın zamana göre değişim katsayısı arttığında dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerleri azalmaktadır.
- Basıncın zamana göre değişim katsayısı arttığında elastisite modüllerinin değişiminin dinamik kritik yüke etkisi artmakta, dinamiklik katsayısına etkisi azalmakta, ayrıca dinamik kritik yüke karşı gelen dalga sayısı değerleri azalma göstermektedir.
- Basıncın zamana göre değişim katsayısı arttıkça, dinamik kritik yükün artışı yavaş olmakta, ayrıca, kritik zaman artmakta, ancak daha küçük kritik yük değerlerinde silindirik kabuk stabilitesini kaybetmektedir.
- Tabakaları oluşturan malzemelerin elastisite modülleri arasındaki oran arttıkça, dinamik ve statik kritik yükler azalmakta, dinamiklik katsayısı ve dinamik dalga sayısı değerleri arttığından silindirik kabuk daha kararsız olmaktadır.
- Elastisite modülleri arasında  $k$  oranı bulunan tabakalı silindirik kabuklarla eşdeğer kritik yükün elde edilebileceği tek tabakalı silindirik kabuğu oluşturan malzemenin elastisite modülleri ve Poisson oranları bulunabilmektedir.
- Tabakalı silindirik kabuklarda, tabakaları oluşturan malzemelerin elastisite modülleri arasındaki oran bir olduğunda aynı elastisite modülüne sahip tek tabakalı silindirik kabuğun kritik parametre değerleri elde edilmektedir.

**KAYNAKLAR**

- [1] BOLOTIN, V.V., “Vibration of Layered Elastic Plates”, Proceedings of Vibration Problems, Moscow, 4, 331-346, 1963.
- [2] WEINGARTEN, V.I., “Free Vibrations of Multilayered Cylindrical Shells”, Journal of Experimental Mechanics, 4, 200-205, 1964.
- [3] JONES, R.M., MORGAN, H.S., “Buckling and Vibration of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells”, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 13, 664-671, 1975.
- [4] NOOR, A.K., PETERS, J.M., “Stress, Vibration and Buckling of Multilayered Cylinders”, Journal of Structural Engineering, 115, 69-88, 1989.
- [5] ARGENTO, A., SCOTT, R.A., “Dynamic Instability of Layered Anisotropic Circular Cylindrical Shells”, Journal of Sound and Vibration, 162, 311-322, 1993.
- [6] MESSINA, A., SOLDATOS, K.P., “Ritz-type Dynamic Analysis of Cross-ply Laminated Circular Cylinders Subjected to Different Boundary Conditions”, Journal of Sound and Vibration, 227, 749-768, 1999.
- [7] REDDY, J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis (2nd ed.), CRC Press, Boca Raton, London, 2004.
- [8] CIVALEK, O., “A Parametric Study of the Free Vibration Analysis of Rotating Laminated Cylindrical Shells Using the Method of Discrete Singular Convolution”, Thin-Walled Structures, 45, 692-698, 2007.
- [9] LOMAKIN, V.A., The Elasticity Theory of Non-homogeneous Materials, Nauka, Moscow, Russia, 1976.
- [10] WIDERA, G.E.O., CHUNG, S.W., “A Theory for Non-homogeneous Anisotropic Cylindrical Shells”, Journal of Applied Mathematics and Physics, 21, 378-399, 1970.
- [11] KHOROSHUN, L.P., KOZLOV, S.Y., The Generalized Theory of Plates and Shells Non-homogeneous in Thickness Direction. Naukova Dumka, Kiev, Ukraine, 1988.
- [12] ERDOĞAN, F., KAYA, A.C., JOSEPH, P.F., “The Crack Problem in Bonded Non-homogeneous Materials”, ASME Journal of Applied Mechanics, 58, 410-418, 1991.
- [13] ZHANG, X., HASEBE, N., “Elasticity Solution for a Radially Non-homogeneous Hollow Circular Cylinder”, ASME Journal of Applied Mechanics, 66, 598-606, 1999.
- [14] SOFİYEYEV A.H., AKSOĞAN O., “Homojen Olmayan Ortotropik Elastik Silindirik Bir Kabuğun Zamanla Değişen Dış Basınç Etkisi Altında Dinamik Stabilitesi”, Teknik Dergi, TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası, 10, 2011-2028, 1999.
- [15] OOTAO, Y., TANIGAWA, Y., “Three-dimensional Solution for Transient Thermal Stresses of an Orthotropic Functionally Graded Rectangular Plate”, Composite Structures, 80, 10-20, 2007.
- [16] HEYLIGER, P.R., JILANI, A., “The Free Vibrations of Inhomogeneous Elastic Cylinders and Spheres”, International Journal of Solids Structures, 29, 2689-2708, 1992.
- [17] DING, H.J., WANG, H.M., CHEN, W.Q., “A Solution of a Non-homogeneous Orthotropic Cylindrical Shell for Axisymmetric Plane Strain Dynamic Thermo-Elastic Problems”, Journal of Sound and Vibration, 263, 815-829, 2003.
- [18] IEŞAN, D., QUINTANILLA, R., “On the Deformation of Inhomogeneous Orthotropic Elastic Cylinders”, European Journal of Mechanics A Solids, 26, 999-1015, 2007.
- [19] SOFİYEYEV, A.H., OMURTAG, M., SCHNACK, E., “The Vibration and Stability of Orthotropic Conical Shells with Non-Homogeneous Material Properties under a Hydrostatic Pressure”, Journal of Sound and Vibration, 319, 963-983, 2009.
- [20] YAO, J.C., “Dynamic Stability of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial and Radial Loads”, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1, 1391-1396, 1963.
- [21] MINEEV, V.E., “A Study of Cylindrical Shell under Uniform Dynamic External Pressure”, Research on The Theory of Plates and Shells, 6-7, 596-623, 1970.
- [22] VOLMIR, A.S., Nonlinear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, Russia, 1972.
- [23] SACHENKOV, A.V., BAKTIEVA, L.U., “Approach to the Solution of Dynamic Stability Problems of Thin Shells”, Research on the Theory of Plates and Shells, 13, 137-152, 1978.
- [24] SHUMIK, M.A., “Dynamic Stability of Orthotropic Elastic Shell under External Pressure”, Journal of Applied Mechanics, 5, 124-128, 1991.
- [25] YAKUSHEV, A.N., “The Stability of Orthotropic Cylindrical Shells under Dynamic External Pressure”, Research on the Theory of Plates and Shells, 20, 215- 222, 1990.
- [26] LEE, D.S., “Nonlinear Dynamic Buckling of Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Rapidly Applied Loads”, Journal of Engineering Mathematics, 38, 141-154, 2000.



*ÜÇ TABAKALI HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROP SİLİNDİRİK KABUKLARIN DOĞRUSAL DİNAMİK STABİLİTESİ*

- [27] SOFİYEV, A.H., BİRİNCİ, F., ZERİN Z., DENİZ A., “Homogen Olmayan Elastik Konik Bir Kabuğun Zamana Bağlı Kuvvet Fonksiyonu Şeklinde Değişen Dış Basınç Yüğü Etkisi Altındaki Dinamik Stabilesi”, Turkish Jorunal of Engineering and Environmental Sciences, 25, 225-236, 2001.
- [28] SOFİYEV, A.H., ERDEM, H., “The Dynamic Stability of a Non-homogeneous Elastic Cylindrical Thin Shell with Variable Thickness under a Dynamic External Pressure”, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 26, 155-165, 2002.
- [29] SOFİYEV, A.H., ZERIN, Z., TURKMEN M., “The Buckling of Laminated Cylindrical Thin Shells under Torsion Varying as a Linear Function of Time”, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 27, 237-246, 2003.
- [30] SOFİYEV, A.H., SCHNACK, E., “The Stability of Functionally Graded Cylindrical Shells under Linearly Increasing Dynamic Torsional Loading”, Journal of Engineering Structures, 26, 1321-1331, 2004.
- [31] KUBIAK, T., “Dynamic Buckling of Thin-Walled Composite Plates with Varying Widthwise Material Properties”, International Journal of Solids and Structures, 42, 5555-5567, 2005.
- [32] SOFİYEV, A.H., ZERIN, Z., YUCEL, K., AVCAR, M., “The Dynamic Stability of Orthotropic Cylindrical Shells with Non-homogenous Material Properties under Axial Compressive Load Varying as a Parabolic Function of Time”, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 25, 1877-1886, 2006.
- [33] LI, S.R., BATRA, R.C., “Buckling of a Laminated Cylindrical Shell with Functionally Graded Middle Layer under Axial Compressive Load”, Proc. Int. Conf. Mech. Eng. Mech., 796-800, Nanjing, China, 2005.
- [34] SOFİYEV, A.H., ZERIN, Z., KORKMAZ, A., “The Stability of a Thin Three-Layered Composite Truncated Conical Shell Containing a FGM Layer Subjected to Non-Uniform Lateral Pressure”, Composite Structures, 85, 105-115, 2008.
- [35] LI, S.R., FUB, X.H., BATRA, R.C., “Free Vibration of Three-Layer Circular Cylindrical Shells with Functionally Graded Middle Layer”, Mechanics Research Communications, 37, 577–580, 2010.