



## Yerel olmayan elastisite teorisine göre akışkan taşıyan nanokirişin serbest titreşimlerinin analizi

### Free vibrations analysis of fluid conveying nanobeam based on nonlocal elasticity theory

Süleyman Murat BAĞDATLI<sup>1\*</sup>, Necla TOĞUN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, Türkiye.  
murat.bagdatli@cbu.edu.tr

<sup>2</sup>Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep, Türkiye.  
nkara@gantep.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 12.02.2016, Kabul Tarihi/Accepted: 15.07.2016

\* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2016.85579

Araştırma Makalesi/Research Article

#### Öz

Bu çalışmada, basit-basit ve ankastre-ankastre sınır şartları altında akışkan taşıyan nanokirişin doğrusal titreşimleri incelenmiştir. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi Euler-Bernoulli kiriş modeline uygulanmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisi MEMS ve NEMS yapıların mekaniksel analizinde gelişen popüler bir tekniktir. Hareket denklemlerini ve sınır şartlarını elde etmek için Hamilton prensibi kullanılmıştır. Denklemler boyutsuz formda elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemi ve sınır şartları malzeme ve geometrik yapıdan bağımsız hale getirilmiştir. Akışkan hızının, ortalama sabit bir hız etrafında harmonik olarak değiştiği kabul edilmiştir. Perturbasyon metodlarından biri olan çok zaman ölçekli metod kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Perturbasyon serisindeki ilk terim doğrusal problemi oluşturmaktadır. Doğrusal problemin çözümü ile tabii frekanslar ve mod yapıları farklı sınır şartları için hesaplanmıştır. Her iki mesnet durumu için yerel olmayan parametre ( $\gamma$ ) ve akışkan hızı ( $v_0$ ) artığında tabii frekanslar azalmaktadır. Sonuçlar grafiklerle sunulmuş ve yorumlanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Titreşim, Akışkan taşıyan nano ölçekli kiriş, Perturbasyon metodu, Yerel olmayan elastisite teorisi

#### Abstract

In this study, linear vibration analysis of a nanobeam conveying fluid is investigated under simple-simple and clamped-clamped boundary conditions. Eringen's nonlocal elasticity theory is applied to Euler-Bernoulli beam model. Nonlocal elasticity theory is a popular growing technique for the mechanical analyses of MEMS and NEMS structures. The Hamilton's principle is employed to derive the governing equations and boundary conditions. Non-dimensional form of equations is obtained. The obtained equations of motion and boundary conditions are independent from material and geometric structure. It is assumed that fluid velocity is harmonically changed about a constant average speed. Approximate solutions were obtained using the Method of Multiple Scales, a perturbation method. The first term in perturbation series composes linear problem. Natural frequencies and mode shapes are calculated by solving the linear problem for different boundary conditions. For both boundary conditions, the natural frequencies are decreased by increasing the nonlocal parameter ( $\gamma$ ) and the fluid velocity ( $v_0$ ). The results are presented and interpreted by graphics.

**Keywords:** Vibration, Nanobeam conveying fluid, Perturbation method, Nonlocal elasticity theorem

## 1 Giriş

Nano-mekanik alanında hızlı gelişmeler sayesinde, nano ölçekteki kirişler, sensörler ve aktüatörler gibi elemanlar nanoteknoloji de yaygın olarak kullanılan en önemli yapılardan biri haline gelmiştir. Boyuta bağlı sürekli ortam teorileri son yıllarda mikro ve nano teknolojinin hızla gelişmesi ile birlikte çok küçük boyutta mekanik yapıların analiz ve modellenmesinde kullanılmaya başlanmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisinin kapsamı ilk olarak Eringen tarafından sunulmuştur. Yerel olmayan elastisite teorisi çok küçük nano elemanlara uygulanabilir olması sebebiyle nanoteknoloji komiteleri tarafından büyük ilgi görmüştür. Klasik elastisite teorisinde herhangi bir  $x$  noktasındaki gerilme sadece  $o$   $x$  noktasındaki şekil değiştirmenin fonksiyonu olarak ele alınır. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinde [1] sürekli ortam içindeki bir noktadaki gerilme, sadece  $o$   $x$  noktasındaki şekil değiştirmenin değil ortama ait tüm  $x$  noktadaki şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu özelliği sayesinde bu teori çok küçük boyuttaki elamanları incelemeye elverişlidir.

Akışkan taşıyan karbon nanotüp (KNT) titreşim ve kararlılık analizi çalışmaları ilk olarak Yoon ve diğ. [2] tarafından gerçekleştirilmiştir. Literatürde bilinen model olan Euler-

Bernoulli kiriş modelini kullanmışlardır. Reddy ve diğ. [3] tek duvarlı karbon nanotüp (TDKNT) serbest titreşim ve kararlılık analizi çalışmalarını Euler-Bernoulli kiriş modelini kullanarak incelemiştir. Akışkan hızının değişik değerleri ile titreşim frekanslarının nasıl değiştiğini göstermek için akışkan taşıyan KNT'lerin titreşim ve kararlılık analizi çalışmaları yapılmıştır [4]. Klasik Timoshenko kiriş modeli ile akışkan taşıyan çok duvarlı karbon nanotüp (ÇDKNT) [5] ve TDKNT'lerin [6] doğal frekansları ve mod yapıları incelenmiştir.

Eringen'in [1] yerel olmayan elastisite teorisini nanoteknoloji alanına ilk uygulayan araştırmacı olan Peddieson ve diğ. [7] çalışmaları bu alanda bir öncü çalışma olarak kabul edilir. Bu çalışmadan sonra, birçok araştırmacı nano yapıların analizinde Eringen'in yerel olmayan modelini kullanmıştır. Akış hızının, akışkan taşıyan TDKNT titreşim frekansı ve mod yapısı üzerindeki etkileri yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak analiz edilmiştir [8]. Bu çalışmanın sonuçları, yerel olmayan parametre ( $e_0a/L$ )'nin frekans ve mod yapılarında önemli ölçüde etkili olduğunu göstermektedir. Yerel olmayan parametrenin artışı ile doğal frekanslar azalmaktadır. Daha yüksek mod yapısı yerel olmayan parametre değerinin artışı ile görülmektedir. Kritik akış hızına ulaşıldığında birinci ve ikinci mod kombinasyonu meydana gelmektedir. Akışkan dolu ÇDKNT titreşim özellikleri yerel olmayan elastisite teorisi

kullanılarak incelenmiştir [9]. Wang yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak birçok çalışma gerçekleştirmiştir. Bunlar; akışkan taşıyan mikro ve nano kirişlerin titreşim ve kararlılık analizi [10], akışkan taşıyan ÇDKNT titreşim analizi [11], akışkan taşıyan nano tüpün serbest titreşimleri [12], akışkan taşıyan nano tüpün titreşim ve kararlılık analizi [13]'dir. Xian ve Wang [14] çalışmasında akışkan taşıyan kavisli şekle sahip bir KNT'nin titreşim karakteristiklerini yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak incelemiştir. Bu çalışmadan elde edilen sonuç kavisli şekle sahip KNT'nin yeterince yüksek bir akım hızına sahip sistem için koşulsuz kararlı olduğunu göstermiştir. Basit-basit mesnetli viskoz sıvı taşıyan eğimli TDKNT'nin titreşim davranışı yerel olmayan Rayleigh kiriş modeli kullanılarak analiz edilmiştir [15]. Termal etki, yerel olmayan parametre etkisi ve kritik akış hızının doğal frekanslar üzerindeki etkisi ile ilgili literatür çalışmalarında; akışkan taşıyan TDKNT'nin termal-mekanik titreşimleri [16], akışkan taşıyan karbon nano konilerin termal-mekanik titreşimleri [17], Pasternak tipi elastik zeminde akışkan taşıyan KNT'nin elektro-termal titreşimleri [18], akışkan taşıyan ve viskoz sıvı içinde viskoelastik KNT titreşimleri yerel olmayan Timoshenko kiriş modeli [19] kullanılarak araştırılmıştır. Bağdatlı bir çalışmada gergin nanokiriş titreşimini [20], diğer çalışmada ise farklı sınır şartlarında nanokiriş titreşimini [21] incelemiştir. Literatürde yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak doğrusal olmayan nanokiriş titreşimleri incelenmiştir [22]-[25].

Bu çalışmada ise akışkan taşıyan yerel olmayan kiriş ele alınmıştır. Ele alınan kiriş Euler-Bernoulli kirişidir. Kirişin uçlardan zemine ankastre bağlandığı ve basit mesnetle bağlandığı durumlar incelenmiştir. Akışkan hızının ortalama bir hız etrafında harmonik olarak değiştiği kabul edilmiştir. Hareket denklemleri ve sınır şartları Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak malzeme ve geometrik yapıya olan bağımlılık ortadan kaldırılmıştır. Perturbasyon metodlarından biri olan çok zaman ölçekli metod kullanılarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Değişik yerel olmayan parametre katsayıları, değişik doluluk oranları ve akışkan hız değerleri için tabii frekanslar hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.

Bu çalışmada, 2. bölümde; yerel olmayan elastisite teorisini kısaca verilmiş ve akışkan taşıyan yerel olmayan kiriş için hareket denklemlerinin elde edilişi anlatılmıştır. 3. bölümde; denklemlerin çözümü için perturbasyon tekniklerinden çok zaman ölçek metodu kısaca verilmiştir. 4. bölümde; elde edilen sonuçlar grafikler halinde verilmiştir. Son bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlar açıklanmıştır.

## 2 Yerel olmayan elastisite teorisini

### 2.1 Tanım

Yerel olmayan elastisite teorisini, klasik elastisite teorisinin yetersiz olduğu durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiş bir teori olup; sürekli ortamlar mekaniğinde yeni bir yaklaşımdır. Yerel olmayan elastisite teorisinde sürekli ortam içindeki bir noktadaki gerilme, sadece o x noktasındaki şekil değiştirmenin değil ortama ait tüm x noktalarındaki şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır [26]. Bu teoriye ait Gerilme tensörü klasik elastisiteye ait gerilme tensörü cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir.

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma = T \quad (1)$$

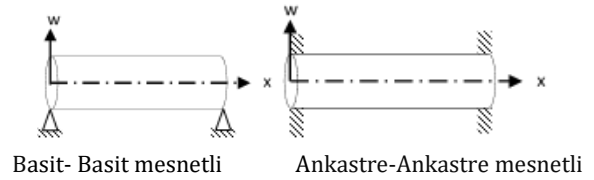
Burada,  $T$  klasik elastisite teorisindeki gerilme tensörü,  $(e_0 a)^2$  yerel olmayan elastisite parametresi,  $\nabla^2$  ise Laplasiyeni göstermektedir.  $a$ , iç karakteristik uzunluğu ve  $e_0$  ise boyutsuz bir malzeme sabitini göstermektedir.  $(e_0 a)'$  nin seçimi yerel olmayan elastisite modelinin geçerliliğini sağlamak için önemli bir noktadır. Yerel olmayan elastisite teorisine göre gerilme aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\sigma(x^*) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma(x^*)}{\partial x^{*2}} = E \varepsilon(x^*) \quad (2)$$

Burada;  $E$ , Elastisite modülüdür.

### 2.2 Hareket denklemleri

Bu çalışmada, akışkan taşıyan nano ölçekteki kiriş titreşimleri yerel olmayan Euler-Bernoulli kiriş modeli kullanılarak çalışılacaktır. Sistemin şematik gösterimi Şekil 1'de verilmiştir. Her iki uçta da basit mesnetli ve ankastre mesnetli akışkan taşıyan nanokirişin hareket denklemleri elde edilecektir.



Şekil 1: Kiriş için farklı sınır şartları.

Hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Önce sistemin Lagrangian'ı hesaplanmıştır. Sistemin Lagrangian'ı kinetik ve potansiyel enerji farkı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \right)^2 dx^* \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L m_f \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2v_f \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial x^*} \right. \\ & \left. + v_f^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) dx^* \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( -EI \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \right. \\ & \left. + (e_0 a)^2 \left( m_f \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2v_f \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial x^*} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + v_f^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) \right) \\ & \left. - (e_0 a)^2 N \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} dx^* \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L N \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} dx^* \end{aligned} \quad (3)$$

Denklem 3'te,  $w^*$  enine yerdeğişimi,  $t^*$  zaman değişkeni,  $\rho$  kirişin yoğunluğu,  $A$  kirişin kesit alanı,  $L$  kirişin uzunluğu,  $v_f$  akışkan hızı,  $m_f$  birim uzunluktaki akışkan kütlesi,  $I$  atalet momenti,  $(e_0 a)$  küçük-ölçek parametresi ve  $N$  ise eksenel kuvveti göstermektedir. Bu denklemde, birinci integral kirişin kinetik enerjisi, ikinci integral akışkanın kinetik enerjisi, üçüncü integral eğilme momentinden kaynaklı potansiyel enerji ve son integral de eksenel gerilme ile ilgilidir. Hamilton prensibi ise Lagrangian'ın zaman üzerinden integralinin varyasyonunun sıfır olduğunu belirtmektedir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt^* = 0 \quad (4)$$

Çift katlı integrallerden hareket denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + m_f v_f^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 2m_f v_f \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial x^*} + (m_f + m) \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \\ - (e_0 a)^2 \left( (m_f + m) \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} \right. \\ \left. + m_f v_f^2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + 2m_f v_f \frac{\partial^4 w^*}{\partial t^* \partial x^{*3}} \right) \\ = \frac{EA}{2L} \left( \int_0^L \left( \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 dx^* \right) \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right. \\ \left. - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Kiriş uçlarındaki ( $x^* = 0$  ve  $x^* = L$ ) sınır şartlarının boyutlu hali aşağıdaki gibidir.

### 2.2.1 Basit-basit mesnetli durum

$$\begin{aligned} w^*(0) = 0, \quad w^*(L) = 0 \\ w^{*''}(0) = 0, \quad w^{*''}(L) = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

### 2.2.2 Ankastre-ankastre mesnetli durum

$$\begin{aligned} w^*(0) = 0, \quad w^*(L) = 0 \\ w^{*'}(0) = 0, \quad w^{*'}(L) = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

Sistemin boyutlu hareket denklemini ve boyutlu sınır şartları Denklem (5) ve (6a-b)'de verilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştıracaktır. Böylece incelenen matematiksel model malzemenin cinsi ve geometrik yapısından bağımsız hale gelecek ve bütün durumları kapsayacaktır. Bunun için boyutsuz parametreler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} x = \frac{x}{L}, w = \frac{w}{L}, t = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m + m_f}} t^*, \\ \gamma = \frac{e_0 a}{L}, v = \frac{v_f}{\varphi}, t = \frac{1}{\alpha L} \sqrt{\frac{EI}{m_f}} \\ \alpha = \frac{m_f}{m + m_f}, m = \rho A, m_f = \rho_f A_f \end{aligned} \quad (7)$$

Boyutsuz hareket denklemini aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sqrt{\alpha v} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - \gamma^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ \left. + 2\sqrt{\alpha v} \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} \right) \\ = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetler için boyutsuz sınır şartları aşağıda verilmiştir.

### 2.2.3 Basit-basit mesnetli durum

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \\ w''(0) = 0, \quad w''(L) = 0 \end{aligned} \quad (9a)$$

### 2.2.4 Ankastre-ankastre mesnetli durum

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \\ w'(0) = 0, \quad w'(L) = 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

## 3 Perturbasyon analizi

Hareket denklemlerinin çözümü için perturbasyon metodlarından çok zaman ölçekli metod kullanılacaktır [27],[28]. Sönüm terimi Denklem (8)'e yerleştirilirse, aşağıdaki gibi denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sqrt{\alpha v} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - \gamma^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ \left. + 2\sqrt{\alpha v} \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} \right) - \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial t} \\ = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Bu denklemde,  $\bar{\mu}$  sönüm katsayısıdır. Çok zaman ölçekli metod direkt olarak denklemlere uygulanacaktır. Perturbasyon çözümü için önce hareket denkleminiz  $\bar{\mu} = \sqrt{\varepsilon} \mu$ ,  $w = \sqrt{\varepsilon} y$  dönüşümü yapılarak düzenlenirse bunun sonucunda doğrusal olmayan ifadeler  $\varepsilon$  mertebesinde ortaya çıkar. Yer değiştirme fonksiyonu için aşağıdaki açılımı alabiliriz.

$$y(x, t; \varepsilon) = y_0(x, T_0; T_1) + \varepsilon y_1(x, T_0; T_1) \quad (11)$$

$\varepsilon$  hesaplamalarda kullanılan küçük bir parametredir.  $T_0 = \varepsilon^0 t$  hızlı zaman ölçeği,  $T_1 = \varepsilon t$  yavaş zaman ölçeğidir [20],[21]. Zamana ve mekâna göre türevler Denklem (12)'deki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \varepsilon^0 \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$D_i = \partial / \partial T_i$  şeklindedir. Hız değişimi ise,  $v = v_0 + \varepsilon v_1 \sin \Omega t$

Denklem (11), (12) Denklem (10)'a yerleştirilirse,  $\varepsilon^0$  ve  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemler şu şekilde elde edilir.

Mertebe ( $\varepsilon^0$ ):

$$\begin{aligned} y_0^{iv} (1 - \gamma^2 v_0^2) + v_0^2 y_0'' - \gamma^2 D_0^2 y_0'' + 2\sqrt{\alpha} v_0 D_0 y_0' + D_0^2 y_0 \\ - 2\gamma^2 \sqrt{\alpha} v_0 D_0 y_0''' = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

**Mertebe ( $\varepsilon$ ):**

$$\begin{aligned}
 & y_1^{iv}(1 - \gamma^2 v_0^2) + v_0^2 y_1'' - \gamma^2 D_0^2 y_1'' + 2\sqrt{\alpha} v_0 D_0 y_1' + D_0^2 y_1 \\
 & - 2\gamma^2 \sqrt{\alpha} v_0 D_0 y_1'' \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_0'^2 dx) y_0'' - \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^1 (y_0'^2 dx) y_0^{iv} \\
 & - 2v_1 v_0 \sin \Omega t y_0'' - 2\sqrt{\alpha} v_0 D_1 y_0' \quad (14) \\
 & - 2\sqrt{\alpha} v_1 \sin \Omega t D_0 y_0' - 2D_0 D_1 y_0 \\
 & + 2\gamma^2 D_0 D_1 y_0'' + 2\gamma^2 v_0 v_1 y_0^{iv} \sin \Omega t \\
 & + 2\gamma^2 \sqrt{\alpha} v_0 D_1 y_0'' \\
 & + 2\gamma^2 \sqrt{\alpha} v_1 D_0 y_0'' \sin \Omega t - 2\mu D_0 y_0
 \end{aligned}$$

Sistemin doğrusal hareket denklemleri ve doğrusal frekans denklemleri bulunacak  $\varepsilon^0$  mertebesindeki denklem (Denklem 13) doğrusal problemi oluşturmaktadır. Bu denklemin çözümü bize doğrusal problemin çözümünü verecektir. Bu denklemlerin şu çözümleri kabul ettiğini varsayalım.

$$y_0(x, T_0, T_1) = (A(T_1)e^{i\omega t} + ke)Y(x) \quad (15)$$

Denklem (13)'te  $ke$  kompleks eşleniği,  $\omega$  doğal frekansı göstermektedir. Denklem (13)'ün çözümünden doğrusal tabii frekans denklemleri ve mod yapıları elde edilecektir. Denklem (15) Denklem (13)'e yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
 & (1 - \gamma^2 v_0^2) Y^{iv}(x) + 2\sqrt{\alpha} v_0 i \omega (Y'(x) - \gamma^2 Y'''(x)) \\
 & + (v_0^2 + \gamma^2 \omega^2) Y''(x) - \omega^2 Y(x) = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

Denklem (16)'nın çözümü için Denklem (17) kullanılabilir.

$$Y(x) = c_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 e^{i\beta_4 x} \quad (17)$$

Denklem (17)'i hareket denklemlerinde ve sınır şartı denklemlerinde yerine yazıldığında (18-19a-b) ifadeleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
 & (1 - \gamma^2 v_0^2) \beta_n^4 - 2\sqrt{\alpha} v_0 \omega (\beta_n + \gamma^2 \beta_n^3) - (v_0^2 + \gamma^2 \omega^2) \beta_n^2 \\
 & - \omega^2 \quad (18) \\
 & n = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

**Basit-Basit Mesnetli Durum:**

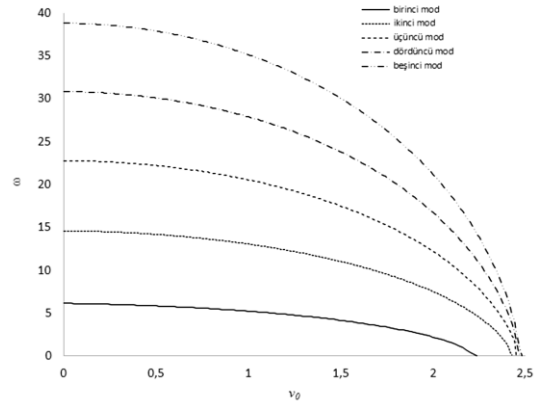
$$Y(0) = 0, Y''(0) = 0, Y(1) = 0, Y''(1) = 0 \quad (19a)$$

**Ankastre-Ankastre Mesnetli Durum:**

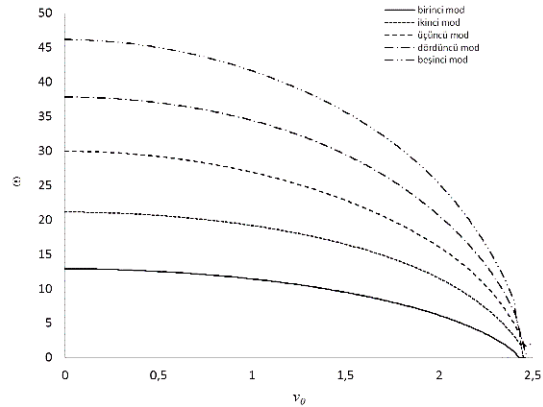
$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y(1) = 0, Y'(1) = 0 \quad (19b)$$

#### 4 Sayısal çözümler

Bu kısımda doğrusalfrekans değerleri değişik yerel olmayan parametre  $\gamma = \frac{e_0 \alpha}{L}$ , doluluk oranı  $\alpha = \frac{m_f}{m+m_f}$  ve akışkan hızına bağlı frekans değerleri verilecektir. Şekil 2-7'de verilen şekiller değişik  $\gamma$  ve  $\alpha$  değerleri için akışkan hızının değişimine bağlı tabii frekans değerleri elde edilmiştir.

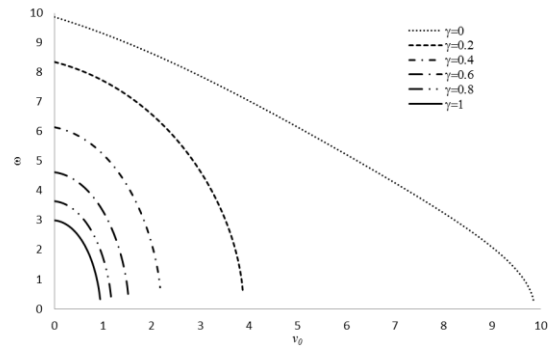


Şekil 2: Basit-basit mesnet durumu için akışkan hızına bağlı doğal frekans değişimi ( $\gamma=0.4$  ve  $\alpha=0.1$ )

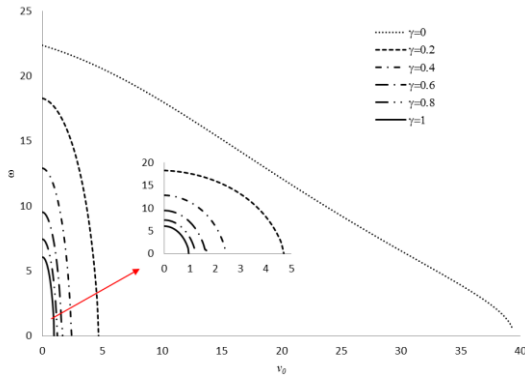


Şekil 3: Ankastre-ankastre mesnet durumu için akışkan hızına bağlı doğal frekans değişimi ( $\gamma=0.4$  ve  $\alpha=0.1$ )

Şekil 2 ve 3'te basit-basit ve ankastre-ankastre durumları için  $\gamma = 0.4$ , ve  $\alpha = 0.1$  değerleri için akışkan hızına bağlı ilk beş moda ait tabii frekans değerlerini gösteren grafikler sırasıyla çizilmiştir. Mod sayıları frekanslar üzerinde belirgin bir etkiye sahip olduğu Şekil 2 ve 3'te görülmektedir. Yüksek modlara ait frekanslar düşük modlara ait frekanslardan daha yüksek değere sahiptir. Akışkan hızı arttığında tabii frekanslar azalmaktadır. Mod değeri arttığında tabii frekans değerleri ise artmaktadır. Akışkan hızı kritik bir değere ulaştığında tabii frekanslar sıfır olmaktadır.

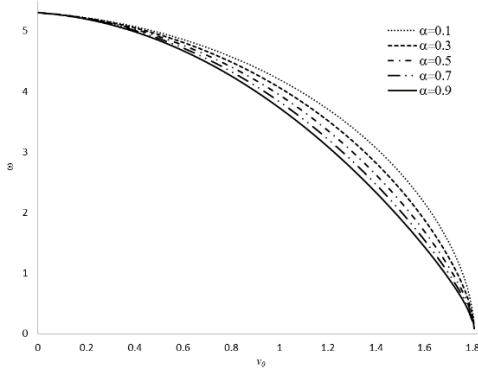


Şekil 4: Basit-basit mesnet durumu için akışkan hızına bağlı farklı  $\gamma$  değerinin doğal frekans değişimi (1. mod ve  $\alpha=0.1$ )

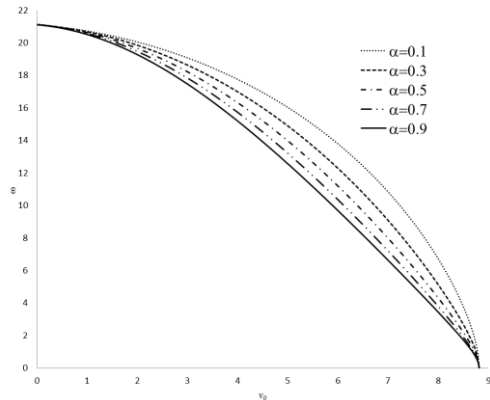


Şekil 5: Ankastrer-ankastrer mesnet durumu için akışkan hızına bağlı farklı  $\gamma$  değerinin doğal frekans değişimi (1. mod ve  $\alpha=0.1$ )

Şekil 4 ve 5'te basit-basit ve ankastrer-ankastrer durumları için  $\alpha=0.1$  ve birinci modun  $\gamma$  değişimini gösteren frekans değerleri sırasıyla elde edilmiştir. Bu şekillerde  $\gamma=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  ve  $1$  değerleri için grafikler çizilmiştir. Burada  $\gamma=0$  olması yerel olmayan etkinin olmadığı klasik Euler-Bernoulli kiriş modelini göstermektedir.  $\gamma$  değeri arttığında tabii frekansların değeri azalmaktadır.  $\gamma$  değeri arttığında akışkan hız değeri de azalmaktadır. Bu sebeple titreşim çalışmalarında denklemlere yerel olmayan parametre etkisini katmak önemlidir. Bu durum her iki mesnet durumu için de geçerlidir.



Şekil 6: Basit-basit mesnet durumu için akışkan hızına bağlı farklı  $\alpha$  değerinin doğal frekans değişimi (1. mod ve  $\gamma=0.5$ )



Şekil 7: Ankastrer-ankastrer mesnet durumu için akışkan hızına bağlı farklı  $\alpha$  değerinin doğal frekans değişimi (1. mod ve  $\gamma=0.5$ )

Şekil 6 ve 7'de basit-basit ve ankastrer-ankastrer durumları için  $\gamma=0.5$  ve birinci mod da  $\alpha$  değişimini gösteren frekans değerleri sırasıyla elde edilmiştir. Bu şekillerde  $\alpha=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  ve  $0.9$  değerleri için şekiller çizilmiştir.  $\alpha$  değeri arttığında  $v_0=0$  da ki frekans değerleri değişmemekte daha sonra ise azalmaktadır ve kritik hız değerine ulaşmaktadır. Basit-basit mesnet durumu için kritik hız değeri  $1.8$ , ankastrer-ankastrer mesnetli durum için kritik hız değeri  $8.8$ 'dir. Bu hızlarda tabii frekanslar sıfır olmaktadır.

## 5 Sonuçlar

Bu çalışmada, akışkan taşıyan nano ölçekteki kiriş ele alınmıştır. Kirişin uçlardan zemine ankastrer ve basit olarak mesnetlenmiş kiriş incelenmiştir. Kiriş modeli olarak yerel olmayan Euler-Bernoulli kiriş modeli kullanılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinin hareket denklemi Eringen tarafından önerilen yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak ifade edilmiştir. Akışkan hızının ortalama bir hız etrafında harmonik olarak değiştiği kabul edilmiştir ( $v=v_0+\varepsilon v_1 \sin \Omega t$ ). Sistemin hareket denklemleri ve sınır şartları Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak malzeme ve geometrik yapıya olan bağımlılıklar ortadan kaldırılmıştır. Perturbasyon metodlarından biri olan çok zaman ölçekli metod kullanılarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Perturbasyon serisindeki ilk terim doğrusal problemi oluşturmaktadır. Doğrusal problemin çözümü ile değişik yerel olmayan parametre, değişik doluluk oranları ve akışkan hız değerleri için tabii frekanslar tam olarak hesaplanmıştır. Doğrusal problemin çözümünden değişik parametreler için birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci tabii frekanslar elde edilmiş bulunan sonuçlar grafikler halinde gösterilmiştir. Buna göre her iki mesnet durumu için yerel olmayan parametre ( $\gamma$ ) değeri arttığında tabii frekans değeri azalmaktadır. Akışkan hızı arttığında ise tabii frekanslar azalmaktadır. Her iki mesnet konumu için akışkan taşıyan kirişin doluluk oranı arttığında  $v_0=0$  da ki frekans değerleri değişmemekte daha sonra ise azalmaktadır ve kritik hız değerine ulaşmaktadır. Belli bir hız değerinden sonra tabii frekans değerleri elde edilememektedir. Bu durum kritik hız olarak değerlendirilmektedir. Kritik hız değeri  $1.8$  ve  $8.8$  sırasıyla basit-basit mesnet ve ankastrer-ankastrer mesnetli durum içindir. Tabii frekanslar bu hızlarda sıfır olmaktadır.

## 6 Kaynaklar

- [1] Eringen AC. "On differential-equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves". *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710, 1983.
- [2] Yoon J, Ru CQ, Mioduchowski A. "Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid". *Composites Science and Technology*, 65(9), 1326-1336, 2005.
- [3] Reddy CD, Lu C, Rajendran S, and Liew KM. "Free vibration analysis of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes". *Applied Physics Letters*, 90, 133122, 2007.
- [4] Lin W, Qiao N. "On vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid". *Computational Materials Science*, 43(2), 399-402, 2008.
- [5] Khosravian N, Tabar HR. "Computational modelling of a non-viscous fluid flow in a multi-walled carbon nanotube modelled as a Timoshenko beam". *Nanotechnology*, 19(27), 275703, 2008.

- [6] Chang WJ, Lee HL. "Free vibration of a single-walled carbon nanotube containing a fluid flow using the Timoshenko beam model". *Physics Letters: A*, 373(10), 982-985, 2009.
- [7] Peddieson J, Buchanan GR, McNitt RP. "Application of nonlocal continuum models to nanotechnology". *International Journal of Engineering Science*, 41(3-5), 305-312, 2003.
- [8] Lee HL, Chang WJ. "Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory". *Journal of Applied Physics*, 103 (024302), 1-4, 2008.
- [9] Deng Q, Yang Z. "Vibration of fluid-filled multi-walled carbon nanotubes seen via nonlocal elasticity theory". *Acta Mechanica Solida Sinica*, 27(6), 568-578, 2014.
- [10] Wang L. "Vibration and instability analysis of tubular nano and micro-beams conveying fluid using nonlocal elasticity theory". *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(10), 1835-1840, 2009.
- [11] Wang L. "Dynamical behaviors of double-walled carbon nanotubes conveying fluid accounting for the role of small scale effect". *Computational Materials Science*, 45(2), 584-588, 2009.
- [12] Wang L. "Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects". *Physica E: Lowdimensional Systems and Nanostructures*, 43(1), 437-439, 2010.
- [13] Wang L. "A modified nonlocal beam model for vibration and stability of nanotubes conveying fluid". *Physica E: Lowdimensional Systems and Nanostructures*, 44(1), 25-28, 2011.
- [14] Xia W, Wang L. "Vibration characteristics of fluid-conveying carbon nanotubes with curved longitudinal shape". *Computational Materials Science*, 49(1), 99-103, 2010.
- [15] Kiani, K. "Vibration behavior of simply supported inclined single-walled carbon nanotubes conveying viscous fluids flow using nonlocal Rayleigh beam model". *Applied Mathematical Modelling*, 37(4), 1836-1850, 2013.
- [16] Zhen Y, Fang B. "Thermal-mechanical and nonlocal elastic vibration of single-walled carbon nanotubes conveying fluid". *Computational Materials Science*, 49(2), 276-282, 2010.
- [17] Afkhami Z, Farid M. "Thermal-mechanical vibration and instability of carbon nanocones conveying fluid using nonlocal Timoshenko beam model". *Journal of Vibration and Control*, 20, 1-15, 2014.
- [18] Atabakhshian V, Shooshtari A, Karimi M. "Electro-thermal vibration of a smart coupled nanobeam system with an internal flow based on nonlocal elasticity theory". *Physica B: Condensed Matter*, 456, 375-382, 2015.
- [19] Ghavanloo E, Fazelzadeh SA. "Flow-thermoelastic vibration and instability analysis of viscoelastic carbon nanotubes embedded in viscous fluid". *Physica E: low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(1), 17-24, 2011.
- [20] Bağdatlı SM. "Nonlinear vibration of nanobeams with various boundary condition based on nonlocal elasticity theory". *Composites Part B: Engineering*, 80, 43-52, 2015.
- [21] Bağdatlı SM. "Non-linear transverse vibrations of tensioned nanobeams using nonlocal beam theory". *Structural Engineering Mechanics*, 55(2), 281-298, 2015.
- [22] Toğun N, Bağdatlı SM. "Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple stress theory". *Composites Part B: Engineering*, 97, 255-262, 2016.
- [23] Toğun N. "Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of a nanobeam resting on elastic foundation". *Boundary Value Problems*, 57, 1-14, 2016.
- [24] Toğun N, Bağdatlı SM. "Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on nonlocal Euler-Bernoulli beam theory". *Mathematical and Computational Applications*, 21(3), 1-19, 2016.
- [25] Toğun N. "Linear vibration analysis of nanobeam carrying nanoparticle based on nonlocal elasticity theory". 2. International Conference on Advances in Mechanical and Robotics Engineering, Zürich, Switzerland, 25-26 October, 2014.
- [26] Eringen AC. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Newyork, USA, Springer-Verlag, 2002.
- [27] Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*, New York, USA, John Wiley, 1979.
- [28] Nayfeh AH. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, USA, John Wiley, 1981.