



Tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kapları üzerine analiz

Analysis on multi-layered and functionally graded spherical pressure vessels

Eray ARSLAN^{1*}

¹Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.
eray.arslan@inonu.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 27.01.2016, Kabul Tarihi/Accepted: 23.06.2016

doi: 10.5505/pajes.2016.56688

* Yazışılan yazar/Corresponding author

Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

İç ya da dış basınca maruz kalan tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kapları için iki ayrı analitik model sunulmuştur. Her bir tabakasında elastisite modülü ve akma gerilmesinin kademeli bir şekilde değiştiği varsayılan n tabakalı basınç kabı için çift tekrarlamalı (rekursif) bir algoritma kullanılmıştır. Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabı için ise aynı mekanik özelliklerin radyal doğrultuda bir güç fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu heterojen (ve bunlara ilaveten homojen) basınç kaplarının aynı yük koşulları altındaki elastik davranışları karşılaştırılmıştır. Elastik limit yükü (von Mises akma kriterine göre) ile kademelendirme parametresi (fonksiyonel olarak kademelendirilmiş kap için) ve tabaka sayısı (tabakalı kap için) arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Sonuç olarak, iki tabakalı basınç kabında ulaşılan elastik limit yükü ile kademelendirilmiş kabın elastik limit yükü arasındaki farkın %70 civarında olduğu fakat bu farkın 32 tabakalı kapta %2'ye inemediği gözlemlenmiştir. Diğer bir yandan, kademelendirilmiş basınç kabında akma, yüke ve kademelendirme parametresine bağlı olarak iç ya da dış yüzeyde oluşabilirken, tabakalı basınç kabında akma r_{n-1} 'inci arayüz koordinatında gerçekleşmektedir.

Anahtar kelimeler: Heterojen küresel basınç kabı, FKM, Tabakalı malzeme, Elastik limit, Von Mises akma kriteri

1 Giriş

İç ve/veya dış basınca maruz kalan küresel kaplar makine mühendisliğinde sıkça kullanılmaktadır. Dolayısıyla, bu kapların deformasyon davranışları birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Klasik kalın duvarlı, homojen küresel basınç kapları problemi, elastik durum için Timoshenko ve Goodier [1] tarafından, elastik-plastik durum için ise Gamer [2] ve Jiang [3] tarafından çözülmüştür. Araştırmalar bunlarla da kalmamış, kapların mukavemet limitlerinin artırılması için, heterojen malzeme kullanımının etkileri de birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bu noktada, tabakalı ya da fonksiyonel olarak kademelendirilmiş heterojen basınç kaplarının deformasyon davranışlarını tarif eden bazı matematiksel modellerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur [4], [5]. Bu amaçla, Bufler [6] iç ve dış basınç altında çalışan içi boş, rastgele ve periyodik şekilde tabakalandırılmış küresel basınç kapları için bir analiz gerçekleştirmiştir. Ayrıca, bu yapıların deneysel ve sonlu elemanlar kopma analizi Liu ve diğ. [7] ile Roy ve Massard [8] tarafından yapılmıştır. Bir diğer çalışmada, Borisov [9] dış basınç altında, ince duvarlı, tabakalı, içi boş bir kürenin gerilme ve deformasyonlarını tespit etmek için analitik bir yaklaşım tanımlamıştır. Diğer bir taraftan, Lutz ve Ferrari [10] radyal doğrultuda doğrusal ve sürekli bir şekilde değişen elastisite modülüne sahip bir küre için temel

Abstract

Analytical models are presented for both multi-layered and functionally graded thick walled spherical pressure vessels that are subjected to uniform internal or external pressure. A double recursive algorithm is used for the n-layered vessel of which the modulus of elasticity and yield stress are assumed to change stepwise from one layer to another. In the model intended for the continuously graded one, these properties are assumed to vary in radial direction according to a power law. The elastic behaviors under the same loading conditions for such heterogeneous vessels, and the homogeneous ones alike, have been compared. The relationships between the elastic limit load (according to the yield criterion of von Mises) and the grading indices or number of layers have been investigated. As a result, it has been observed that although the difference between elastic limit load of the functionally graded and that of 2-layered pressure vessels is 70%, this difference decreases to 2% for the 32-layered one. Moreover, yielding may emerge at the inner or outer surfaces of the graded vessel depending on the load and grading parameter however it occurs at (r_{n-1}) th interface coordinate in the multi-layered one.

Keywords: Heterogeneous spherical pressure vessel, FGM, Multi-layered material, Elastic limit, Von Mises yield criterion

denklemleri türetmiştir. Tütüncü ve Öztürk [11], You ve diğ. [12], Güven ve Baykara [13] ile Nejad ve Gharibi [14] farklı formlardaki fonksiyonel olarak kademelendirilmiş iç basınç altındaki küresel kapların elastik gerilme durumu için kapalı formda çözümlerini sunmuşlardır. Aynı anda basınç ve ısı yük altındaki eleman için bir başka analitik model, Bayat ve diğ. [15] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada araştırmacılar, elastisite modülünün radyal doğrultuda bir güç fonksiyonuna bağlı olarak değiştiğini varsaymışlardır. Ayrıca, Chen ve Lin [16] ile Karami ve diğ. [17], dış basınç altındaki kademelendirilmiş küresel basınç kabı için çözümler sunmuşlardır. Bir diğer çalışmada, Chen ve Lin [18], dış basıncın fonksiyonel olarak kademelendirilmiş kapta oluşturduğu yer değiştirme bileşenlerine etkilerini, sayısal bir model kullanarak incelemiştir. Sadece iç yüzeyi fonksiyonel olarak kademelendirilmiş bir malzeme ile kaplanan kalın duvarlı küresel kabın deformasyon davranışı Atashipour ve ekibi [19] tarafından incelenmiştir. Carrera ve Soave [20], iki homojen tabaka arasına yerleştirilen kademelendirilmiş tabakanın avantajlarını araştırmışlardır. Son olarak Akış [21], bu tip basınç kaplarının elastik-plastik davranışlarını incelemiş ve bu amaçla analitik bir model geliştirmiştir.

Kademelendirilmiş malzemeler için (sadece küresel basınç kapları bile düşünüldüğünde) çok fazla teorik araştırma olmasına rağmen, bu malzemelerin verimli bir şekilde üretilmesi karmaşık ve pahalı işlemler gerektirmektedir [22],[23]. Bu nedenle, birçok araştırmacı deneysel (ya da sayısal) çalışmalarında (örneğin [24]-[27]) tabakalı yapıların fonksiyonel olarak kademelendirilmiş yapılara yaklaştığını varsaymaktadır. Ancak, burada vurgulanmalıdır ki, bu kaba yaklaşım, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş yapıların sonlu sayıda tabakadan oluşmadığından dolayı gerçekçi bir yaklaşım olmayabilir [28]. Tabakalı yapının tabaka sayısı sonsuza yaklaştığı durumda, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş malzeme kavramı söz konusu olabilir. Malzemedeki mekanik özelliklerin sürekli dağılımı bu şekilde sağlanabilir. Bu durum, tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş malzemeler arasındaki yapısal farkı belirlemektedir. Bu nedenle, bu tip yapıların deformasyon davranışlarını tarif etmek için farklı matematiksel modeller geliştirilmelidir. Ayrıca tabakalı yapıların davranışlarının kademelendirilmiş yapılarınkine benzerliğinin gözlenmesi için ileri analizlerin yapılması gerekmektedir.

Bu çalışmada, iç ya da dış basınca maruz kalan, tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş kalın duvarlı basınç kapları için iki farklı analitik model geliştirilmiştir. Her iki modelde de küçük deformasyonlar ve küresel simetri durumları kabul edilmiştir. Ayrıca, Poisson oranının tüm kap boyunca sabit kaldığı varsayılmıştır. Çok tabakalı basınç kabı analizinde, Zhifei'nin [4] silindirik kaplar için geliştirdiği çift tekrarlamalı (rekursif) algoritması, küresel kap modeline uyarlanmıştır. Bu modelde, her bir tabakanın kendi içinde homojen olduğu, elastisite modülünün ve akma gerilmesinin ise tabakadan tabakaya adım adım değiştiği kabul edilmiştir. Ayrıca, her bir tabakanın kalınlığı sabit olarak alınmıştır. Diğer bir taraftan, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kabı için oluşturulan modelde, elastisite modülünün ve akma gerilmesinin radyal doğrultuda bir güç fonksiyonuna bağlı olarak sürekli bir şekilde değiştiği kabul edilmiştir. Aynı fiziksel koşullar altında, her iki modelden elde edilen ve homojen bir küresel basınç kabı için türetilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Gerilmelerdeki ve deformasyonlardaki farklar tespit edilmiştir. Basınç kaplarının, von Mises akma kriterine göre akmaya başladığı anlara özel bir ilgi gösterilmiştir. Elastik akma yükü ile kademelendirme parametresi (fonksiyonel olarak kademelendirilmiş kap için) ve tabaka sayısı (tabakalı kap için) arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2 Problem ve temel denklemler

2.1 Problem

n -tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kaplarının kesitlerinin geometrisi ve yükler Şekil 1a ve 1b'de gösterilmiştir. Kapların iç ve dış yarıçapları sırasıyla a ve b 'dir. Her iki kap için de, iki farklı sınır koşulları düşünülmüştür. Birinci durumda, iç yüzeye P_{in} basıncı uygulanmış fakat dış yüzey serbest yüzey olarak kalmıştır. Böylece, sınır koşulları,

$$\sigma_r(a) = -P_{in}, \quad (1)$$

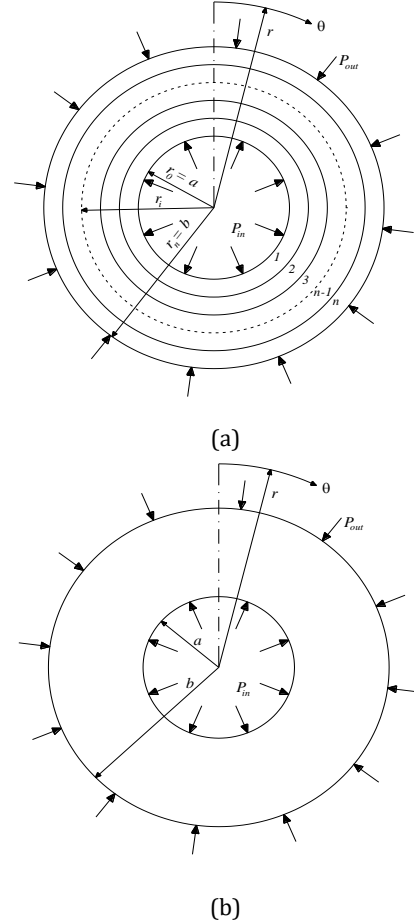
$$\sigma_r(b) = 0 \quad (2)$$

şeklinde tanımlanabilir. İkinci durum için, dış yüzeye P_{out} basıncının uygulandığı kabul edilmiştir. Böylece, bu durum için sınır koşulları,

$$\sigma_r(a) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_r(b) = -P_{out} \quad (4)$$

olur.



Şekil 1: (a): Tabakalı ve (b): Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kaplarının kesiti ve yükler.

2.2 Temel denklemler

Bu bölümde tanıtılan temel denklemler, hem tabakalı hem de kademelendirilmiş küresel basınç kapları için kullanılacaktır. Küresel koordinat sistemi (r, θ, ϕ) kullanılmıştır. Küresel simetriden dolayı, $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ ve $\epsilon_\theta = \epsilon_\phi$. Radyal yöndeki denge denklemi,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0, \quad (5)$$

radyal ve açısal yöndeki Hooke yasası denklemleri,

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta), \quad (6)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r], \quad (7)$$

ve geometrik ilişkiler,

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (8)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (9)$$

temel denklemleri oluşturur. Denklemler (8) ve (9) denklemler (6) ve (7)'ye yerleştirilirse; gerilmelerin, radyal yer değiştirme u ve onun r 'ye göre türevi cinsinden ifadelerine ulaşılır:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[2\nu \frac{u}{r} + (1-\nu) \frac{du}{dr} \right], \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right). \quad (11)$$

3 Matematiksel modeller

3.1 Tabakalı küresel basınç kabı

n adet tabakadan oluşan bir küresel basınç kabı düşünülmüş (bkz. Şekil 1a) ve her bir tabakadaki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri bu bölümde hesaplanmıştır. Çözüm yönteminde, Zhifei [4] tarafından silindirik basınç kabı için geliştirilen bir algoritma, küresel kaba uyarlanmıştır. Her bir tabakanın kendi içinde homojen olduğu (mekanik özellikleri sabit) fakat elastisite modülünün ve akma gerilmesinin tabakadan tabakaya adım adım değiştiği kabul edilmektedir. Ayrıca, her bir tabakadaki kalınlığın $r_i - r_{i-1}$ (bkz. Şekil 1a) eşit olduğu varsayılmıştır.

İlk olarak, heterojen bir küresel basınç kabı için genel diferansiyel denklem, denklemler (10) ve (11)'in denklem (5)'e yerleştirilmesiyle elde edilir:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = 0. \quad (12)$$

Denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$u = -\frac{(1+\nu)A}{2Er^2} + \frac{(1-2\nu)Br}{E}. \quad (13)$$

Burada, A ve B keyfi integrasyon sabitleridir. Böylece gerilmeler aşağıdaki formu alır.

$$\sigma_r = \frac{A}{r^3} + B, \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{2r^3} + B. \quad (15)$$

Bu durumda, i 'nci tabakaya ait gerilme ve radyal yer değiştirme aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\sigma_r^i = \frac{A_i}{r^3} + B_i, \quad (16)$$

$$\sigma_\theta^i = -\frac{A_i}{2r^3} + B_i. \quad (17)$$

$$u^i = -\frac{(1+\nu_i)A_i}{2E_i r^2} + \frac{(1-2\nu_i)B_i r}{E_i}. \quad (18)$$

Burada, $i = 1, \dots, n$ (bkz. Şekil 1a). Ayrıca vurgulanmalıdır ki, Poisson oranı ν_i 'nin her tabakada sabit olduğu varsayıldığı için sonraki denklemlerde $\nu_i = \nu$ olarak alınmıştır. Her tabakanın arayüzündeki gerilmeler aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır.

$$\frac{A_i}{r_{i-1}^3} + B_i = -P_{i-1}, \quad (19)$$

$$\frac{A_{i+1}}{r_{i+1}^3} + B_{i+1} = -P_{i+1}. \quad (20)$$

Burada, r_i ve P_i sırasıyla i 'nci ve $(i+1)$ 'inci tabakalar arasındaki arayüz radyal koordinatını ve ekstrüzyon gerilmelerini temsil etmektedir. Bu durumda, iç ve dış yüzeylerde, denklemler (19) ve (20).

$$\frac{A_1}{a^3} + B_1 = -P_0 = -P_{in}, \quad (21)$$

$$\frac{A_n}{b^3} + B_n = -P_n = -P_{out} \quad (22)$$

şeklini alır. Burada hatırlatılmalıdır ki, $a = r_0$ ve $b = r_n$ 'dir (bkz. Şekil 1a). Ayrıca, arayüz koordinatlarında radyal gerilme ve yer değiştirme bileşenleri sürekli olmalıdır.

$$\sigma_r^i(r_i) = \sigma_r^{i+1}(r_i), \quad u^i(r_i) = u^{i+1}(r_i). \quad (23)$$

Denklem (23), denklemler (16) ve (18)'e yerleştirilir ve A_{i+1} ve B_{i+1} için çözülürse,

$$A_{i+1} = \frac{2(1-2\nu) + (1+\nu)\delta_{i+1}}{3(1-\nu)} A_i + \frac{2(1-2\nu)(1-\delta_{i+1})r_i^3}{3(1-\nu)} B_i, \quad (24)$$

$$B_{i+1} = \frac{(1+\nu)(1-\delta_{i+1})}{3(1-\nu)r_i^3} A_i + \frac{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\delta_{i+1}}{3(1-\nu)} B_i \quad (25)$$

elde edilir. Burada,

$$\delta_{i+1} = \frac{E_{i+1}}{E_i}. \quad (26)$$

Denklemler (24) ve (25), denklem (20)'ye yerleştirilir ve denklem (19) ile birlikte A_i ve B_i için çözülürse,

$$A_i = r_i^3 \left\{ \left[\frac{2(1-2\nu)(1-\delta_{i+1})}{3(1-\nu)\gamma_i} + \frac{[1+\nu+2(1-2\nu)\delta_{i+1}]\omega_{i+1}^3}{3(1-\nu)\gamma_i} \right] P_{i-1} - \frac{\omega_{i+1}^3 P_{i+1}}{\gamma_i} \right\}, \quad (27)$$

$$B_i = - \left[\frac{2(1-2\nu) + (1+\nu)\delta_{i+1}}{3(1-\nu)\gamma_i} - \frac{(1+\nu)(1-\delta_{i+1})\omega_{i+1}^3}{3(1-\nu)\gamma_i} \right] P_{i-1} + \frac{\omega_{i+1}^3 \omega_i^3 P_{i+1}}{\gamma_i} \quad (28)$$

bulunur. Burada,

$$\omega_i = \frac{r_i}{r_{i-1}},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{3(1-\nu)} \{ \delta_{i+1} [1 + \nu + 2(1-2\nu)\omega_i^3] (1 - \omega_{i+1}^3) + [2(1-2\nu) + (1+\nu)\omega_{i+1}^3] (1 - \omega_i^3) \}. \quad (29)$$

$$+ [2(1-2\nu) + (1+\nu)\omega_{i+1}^3] (1 - \omega_i^3). \quad (30)$$

Diğer bir taraftan, i 'nci ve $(i+1)$ 'inci tabakalar arasındaki arayüz radyal koordinatındaki radyal gerilme,

$$\sigma_r^i(r_i) = \frac{A_i}{r_i^3} + B_i = -P_i. \quad (31)$$

Denklemler (27) ve (28), denklem (31)'de yerlerine yerleştirilirse,

$$P_{i+1} = \frac{\gamma_i P_i}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3} - \frac{\delta_{i+1}(1 - \omega_{i+1}^3)P_{i-1}}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3}. \quad (32)$$

Bu denklem, farklı arayüz koordinatlarındaki ekstrüzyon gerilmeleri arasındaki ilişkiyi tarif eder. Böylece, denklemler (27) ve (28) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$A_i = \frac{(P_{i-1} - P_i)r_i^3}{1 - \omega_i^3}, \quad (33)$$

$$B_i = -\frac{P_{i-1} - P_i\omega_i^3}{1 - \omega_i^3}. \quad (34)$$

Şimdi, her bir arayüz koordinatındaki ekstrüzyon gerilmeleri (P_i), P_{in} ve P_{out} cinsinden ifade edilebilir. Bu amaçla, çift tekrarlamalı bir algoritma kullanılmıştır [4].

$$\Delta_i = \frac{\gamma_i}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3} \Delta_{i-1} - \frac{\delta_{i+1}(1 - \omega_{i+1}^3)}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3} \Delta_{i-2}, \quad (35)$$

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3} \Gamma_{i-1} - \frac{\delta_{i+1}(1 - \omega_{i+1}^3)}{(1 - \omega_i^3)\omega_{i+1}^3} \Gamma_{i-2}. \quad (36)$$

Burada, $i = 2, \dots, n$ 'dir. Aşağıdaki terimler ise yukarıdaki tekrarlamalı algoritmayı başlatmak için kullanılır.

$$\Delta_0 = -1, \quad (37)$$

$$\Delta_1 = -\frac{\gamma_1}{(1 - \omega_1^3)\omega_2^3}, \quad (38)$$

$$\Gamma_0 = 0, \quad (39)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\delta_2(1 - \omega_2^3)}{(1 - \omega_1^3)\omega_2^3}. \quad (40)$$

Böylece, denklem (32) tekrar oluşturulabilir.

$$P_i = -\Delta_{i-1}P_1 - \Gamma_{i-1}P_0. \quad (41)$$

Bu denklem için de $i = 2, \dots, n$. Eğer denklem (40) için $i = n$ alınır ise,

$$P_1 = -\frac{P_n + \Gamma_{n-1}P_0}{\Delta_{n-1}}. \quad (42)$$

elde edilir. Böylece denklem (41) aşağıdaki şekli alır.

$$P_i = -\Delta_{i-1} \left(\frac{P_n + \Gamma_{n-1}P_0}{\Delta_{n-1}} \right) - \Gamma_{i-1}P_0. \quad (43)$$

Burada, $i = 2, \dots, n - 1$. Böylece, P_i 'nin $P_0 (= P_{in})$ ve $P_n (= P_{out})$ cinsinden ifadesine ulaşılmış olur. Son olarak, her bir arayüz koordinatındaki ekstrüzyon gerilmeleri (P_i) hesaplandıktan sonra bu gerilmeler denklem (33) ve (34)'de yerlerine yerleştirilir ve A_i ve B_i hesaplanır. Ardından, her bir tabakadaki gerilme ve radyal yer değiştirmeler denklemler (16)-(18) yardımıyla bulunabilir.

Burada açıkça belirtilmelidir ki, $n = 2$ için (iki tabakalı basınç kabı için) söz konusu algoritma sonuç vermemektedir. Bu durumda, A_1, A_2, B_1 ve B_2 sabitlerini belirlemek için aşağıdaki denklemler kullanılmalıdır.

$$A_1 = \frac{(P_{in} - P_1)r_1^3}{1 - \omega_1^3}, \quad (44)$$

$$A_2 = \frac{(P_1 - P_{out})b^3}{1 - \omega_2^3}, \quad (45)$$

$$B_1 = -\frac{P_{in} - P_1\omega_1^3}{1 - \omega_1^3}. \quad (46)$$

$$B_2 = -\frac{P_1 - P_{out}\omega_2^3}{1 - \omega_2^3}. \quad (47)$$

Burada,

$$P_1 = -\frac{P_{out} + \frac{(\omega_2^3 - 1)\delta_2}{(\omega_1^3 - 1)\omega_2^3} P_{in}}{\frac{\gamma_1}{(\omega_1^3 - 1)\omega_2^3}}, \quad (48)$$

$$\omega_1 = \frac{r_1}{a}, \quad (49)$$

$$\omega_2 = \frac{b}{r_1}, \quad (50)$$

$$r_1 = \frac{a + b}{2}, \quad (51)$$

$$\delta_2 = \frac{E_2}{E_1}. \quad (52)$$

3.2 Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel basınç kabı

Bu bölümde, Akış'ın kapsamlı çözümü [21] temel alınarak, iç ya da dış basınca maruz kalan fonksiyonel olarak kademelendirilmiş küresel kap için alan denklemleri sunulacaktır. Elastisite modülünün ve akma gerilmesinin radyal koordinat doğrultusunda, aşağıda tanımlanan güç fonksiyonlarına bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir.

$$E = E_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\alpha, \quad (53)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(\frac{r}{b} \right)^\beta. \quad (54)$$

Bu denklemlerdeki, E_0 ve σ_0 sırasıyla elastisite modülünün ve tek eksenli akma gerilmesinin kabın dış yüzeyindeki referans değerlerini, α ve β ise kademelendirme parametrelerini temsil etmektedir. Denklemler (10) ve (11)'in denge denkleminde (5) yerlerine yazılmasıyla (ve denklem (53)'te göz önünde bulundurulmasıyla) aşağıdaki diferansiyel denkleme ulaşılır.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(2 + \alpha) du}{r dr} - \frac{2[1 - \nu(1 + \alpha)]}{r^2(1 - \nu)} u = 0. \quad (55)$$

Bu denklemin çözümünüyle

$$u = -\frac{(1 + \nu)C_1}{2E_0} r^{-(1-\alpha-S)/2} + \frac{(1 - 2\nu)C_2}{E_0} r^{-(1-\alpha+S)/2} \quad (56)$$

radyal yer değiştirme için genel bir çözüm elde edilmiş olunur. Bu denklemdeki C_1 ve C_2 keyfi integrasyon sabitleridir ve

$$S = \sqrt{9 + \alpha \left(10 + \alpha - \frac{8}{1 - \nu}\right)} \quad (57)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_1 r^{-(3+\alpha-S)/2} [1 + (\alpha + S)(1 - \nu) - 5\nu]}{4(1 - 2\nu)b^\alpha} \\ &\quad - \frac{C_2 r^{-(3+\alpha+S)/2} [1 + (\alpha - S)(1 - \nu) - 5\nu]}{2(1 + \nu)b^\alpha}, \quad (58) \\ \sigma_\theta &= -\frac{C_1 r^{-(3+\alpha-S)/2} [2 - (1 + \alpha + S)\nu]}{4(1 - 2\nu)b^\alpha} \\ &\quad + \frac{C_2 r^{-(3+\alpha+S)/2} [2 - (1 + \alpha - S)\nu]}{2(1 + \nu)b^\alpha}. \quad (59) \end{aligned}$$

Burada, not olarak belirtilmelidir ki, α 'nın sifıra yaklaşması ile ($\alpha \rightarrow 0$), çözüm, homojen basınç kapı için çözüme yaklaşmaktadır.

Denklemler (1) ve (2)'nin tarif ettiği sınır koşulları kullanıldığında, integrasyon sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$C_1 = \frac{4a^{(3-\alpha+S)/2} b^{\alpha+S} (1 - 2\nu) P_{in}}{(a^S - b^S)[1 + (\alpha + S)(1 - \nu) - 5\nu]} \quad (60)$$

$$C_2 = \frac{2a^{(3-\alpha+S)/2} b^\alpha (1 + \nu) P_{in}}{(a^S - b^S)[1 + (\alpha - S)(1 - \nu) - 5\nu]} \quad (61)$$

Diğer bir yandan, sınır koşulları (3) ve (4) kullanılır ise bu sabitler aşağıdaki şekli alırlar.

$$C_1 = -\frac{4a^S b^{(3+\alpha+S)/2} (1 - 2\nu) P_{out}}{(a^S - b^S)[1 + (\alpha + S)(1 - \nu) - 5\nu]} \quad (62)$$

$$C_2 = -\frac{2b^{(3+\alpha+S)/2} (1 + \nu) P_{out}}{(a^S - b^S)[1 + (\alpha - S)(1 - \nu) - 5\nu]} \quad (63)$$

3.3 Akma başlangıcı

Von Mises akma kriteri kullanılarak elastik limit yükleri tespit edilmiştir. Bu kritere göre;

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_r)^2]}. \quad (64)$$

$\sigma_\phi = \sigma_\theta$ olduğundan dolayı von Mises gerilmesi,

$$\sigma_{vM} = |\sigma_r - \sigma_\theta|. \quad (65)$$

şeklini alır. Bu durumda, kademelendirilmiş küresel basınç kabı için; iki asal gerilme birbirine eşit olduğundan dolayı von

Mises gerilmesi aynı zaman Tresca altgeninin bir köşe rejimini temsil etmektedir. Bu nedenle, çalışmada Tresca akma kriterini kullanan Akış'ın çözümü [21] ile bu modelin çözümü benzer sonuçları verecektir.

Kademelendirilmiş basınç kabında, akma iki durumda meydana gelebilir:

$$\text{Durum 1:} \quad \sigma_{vM}(a) = \sigma_y(a), \quad (66)$$

$$\text{Durum 2:} \quad \sigma_{vM}(b) = \sigma_y(b). \quad (67)$$

Akmanın başlangıcına sebep olacak iç basınç ($(P_{in})_y$), her iki durum için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{Durum 1 için:} \quad (P_{in})_y = \frac{4\left(\frac{a}{b}\right)^\beta (b^S - a^S)\sigma_0}{b^S(3-\alpha+S) - a^S(3-\alpha-S)}, \quad (68)$$

$$\text{Durum 2 için:} \quad (P_{in})_y = \frac{2a^{(-3+\alpha-S)/2} b^{(3-\alpha-S)/2} (b^S - a^S)\sigma_0}{S}. \quad (69)$$

Her iki durum için, akmanın başlangıcına sebep olacak dış basınç ($(P_{out})_y$) aşağıdaki gibi bulunur.

Durum 1 için:

$$(P_{out})_y = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^\beta a^{(3-\alpha-S)/2} b^{(-3+\alpha-S)/2} (b^S - a^S)\sigma_0}{S}, \quad (70)$$

Durum 2 için:

$$(P_{out})_y = \frac{4(b^S - a^S)\sigma_0}{a^S(3-\alpha+S) - b^S(3-\alpha-S)}. \quad (71)$$

4 Sayısal sonuçlar

Sayısal sonuçların elde edilmesi aşamasında aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılmıştır.

$$\bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \quad \bar{u} = \frac{uE_0}{\sigma_0 b}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\sigma_0}. \quad (72)$$

Yukarıda da belirtildiği gibi, E_0 ve σ_0 sırasıyla elastisite modülünün ve akma gerilmesinin referans değerleridir. Bu referans değerleri fonksiyonel olarak kademelendirilmiş kap için dış yüzeyi ve katmanlı kap için ise en dışarıdaki katmanı (n 'inci katmanı) temsil etmektedir. Sayısal sonuçlarda $a/b = 0.5$ ve $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Kademelendirilmiş basınç kabının kademelendirme parametreleri için,

$$-1 \leq \alpha \leq 2, \quad (73)$$

$$-2 \leq \beta \leq 1. \quad (74)$$

aralıkları kullanılmıştır [11],[21]. Böylece seçilen parametreler gerçek malzeme özelliklerine uygun olur [29]. Ayrıca, homojen basınç kabının sonuçlarını elde etmek için $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ olacak şekilde ayarlanmış ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

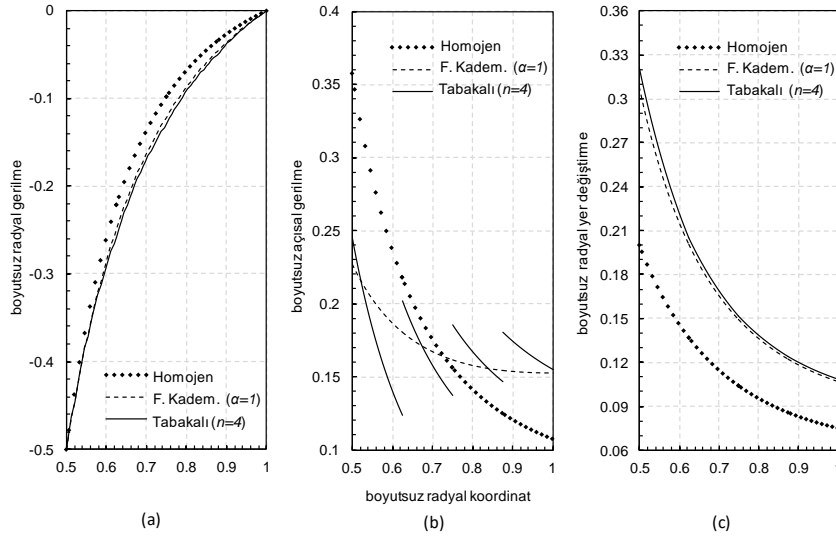
İlk olarak, iç basınç P_{in} 'e mağruz kalan heterojen ve homojen basınç kaplarının elastik davranışları incelenmiştir. Şekil 2'de $\bar{P}_{in} = 0.5$ için oluşan gerilme ve radyal yer değiştirmenin radyal koordinat üzerindeki dağılımları gösterilmiştir. Bu şekilde, noktalar homojen malzemenin, kesik çizgiler doğrusal olarak kademelendirilmiş malzemenin ($\alpha = 1$) ve düz çizgiler 4 tabakalı ($n = 4$) malzemenin sonuçlarını temsil etmektedir. Aynı yük altındaki bu karşılaştırmalarda, fonksiyonel olarak

kademelendirilmiş basınç kabında ve 4 tabakalı kapta oluşan açıl gerilmelerin birbirinden tamamıyla farklı olduğu fakat radyal gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin benzer olduğu gözlenmektedir. Aynı yük altındaki ($\bar{P}_{in} = 0.5$) sayısal sonuçlar, tabakalı basınç kabı $n = 16$ alınarak tekrar çizilmiş ve Şekil 3'te gösterilmiştir. Bu durumda, tabakalı ve fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kaplarının sonuçlarını birbirine oldukça yaklaştırmıştır.

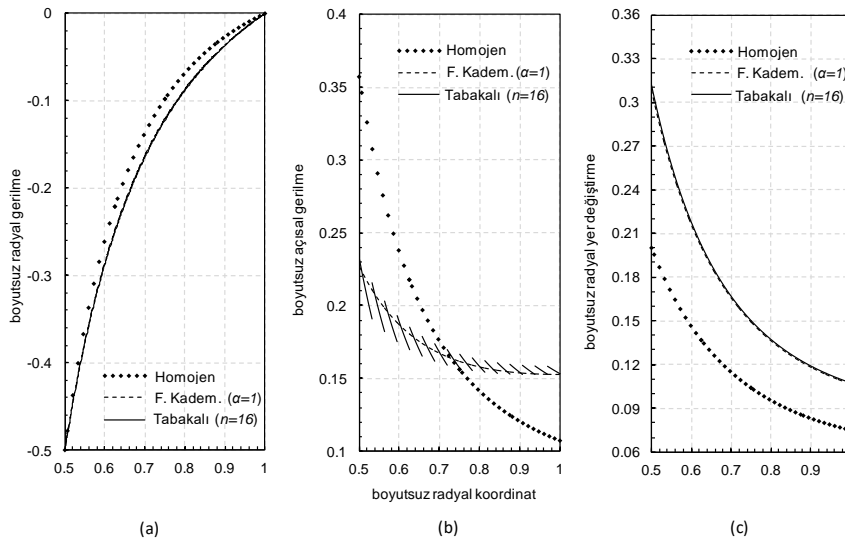
Elastik limit değerlerini incelemek için, von Mises akma kriterine göre akmanın gerçekleşeceği iç basınç değerleri araştırılmıştır. Bu amaçla, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabı için, denklemler (68) ve (69) yardımıyla akma basıncı $(P_{in})_y$ 'nin kademelendirme parametreleri α ve β ile değişimi Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekilde gösterilen "Durum 1" akmanın basınç kabının iç yüzeyinde, "Durum 2" ise akmanın basınç kabının dış yüzeyinde gerçekleştiği durumları temsil etmektedir. İki

durumun kesiştiği eğri, akmanın iç ve dış yüzeyde aynı anda olduğu özel durumu temsil etmektedir. Bu şekilde ayrıca, $\alpha = \alpha^* = 1.3544$ ve $\beta = \beta^* = -2.0$ parametreleri seçildiğinde akmanın başlaması için en yüksek iç basınç değerine ($(\bar{P}_{in})_y = 2.9130$) ulaşılabileceği gözlenmektedir.

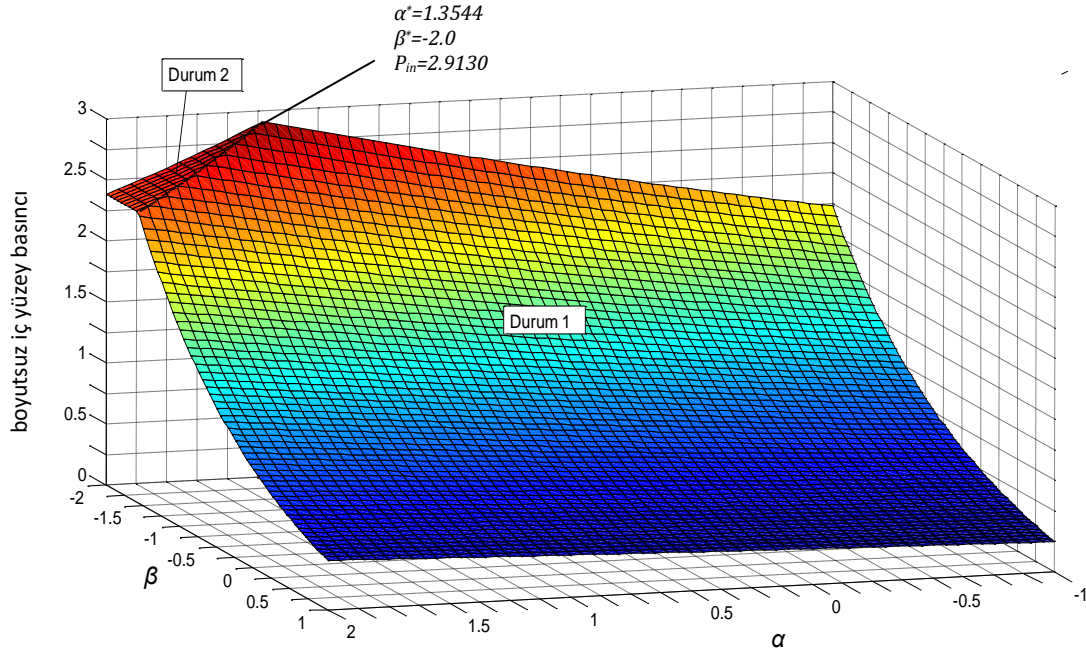
Şekil 5'te ise tabakalı basınç kabında $(P_{in})_y$ 'nin (ve $(P_{out})_y$ 'nin) tabaka sayısı ile (n) değişimi gösterilmiştir. Şekilde $n = 1$, homojen basınç kabını temsil etmektedir ve tabaka sayısı arttıkça sonuçlar fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabına yaklaşmaktadır. Ayrıca belirtmelidir ki, tabakalı basınç kaplarında akma her zaman r_{n-1} 'inci arayüz koordinatında gerçekleşmektedir. Daha fazla tabakanın olması durumunda (örneğin $n = 100$), $(P_{in})_y = 2.9177$ olarak hesaplanmıştır. Burada not edilmelidir ki, $(P_{out})_y$ 'nin tabaka sayısı ile (n) değişiminin yorumları dış basınç analizinin sunulduğu bölümde yapılmıştır.



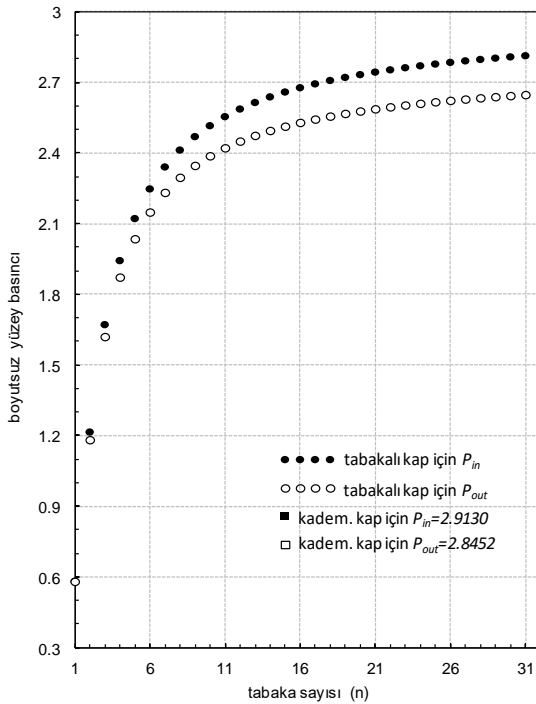
Şekil 2: Homojen, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş ($\alpha = 1$) ve tabakalı ($n = 4$) basınç kaplarında $\bar{P}_{in} = 0.5$ yükü ile oluşan, (a): Radyal gerilme, (b): Açıl gerilme ve (c): Radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 3: Homojen, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş ($\alpha = 1$) ve tabakalı ($n = 16$) basınç kaplarında $\bar{P}_{in} = 0.5$ yükü ile oluşan, (a): Radyal gerilme, (b): Açıl gerilme ve (c): Radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 4: Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında $(P_{in})_y$ 'nin kademelendirme parametreleri α ve β ile değişimi.



Şekil 5: Tabakalı basınç kabında $(P_{in})_y$ ve $(P_{out})_y$ 'nin tabaka sayısı ile değişimi.

Homojen basınç kabı için $(\bar{P}_{in})_y = 0.5833$; fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabı için $(\alpha = \alpha^* = 1.3544$ ve $\beta = \beta^* = -2.0)$ $(\bar{P}_{in})_y = 2.9130$; 4 tabakalı basınç kabı için $(\bar{P}_{in})_y = 1.9448$ ve 16 tabakalı basınç kabı için $(\bar{P}_{in})_y = 2.4142$ olarak hesaplanmıştır. Bu yükler altındaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları ise sırasıyla Şekil 6a-6d'de verilmiştir. Şekillerde de görüldüğü gibi homojen basınç kabında akma iç yüzeyde, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında iç ve dış yüzeylerde aynı anda, tabakalı kaplarda ise r_{n-1} 'inci arayüz koordinatında gerçekleşmektedir.

Sonraki şekiller, P_{out} dış basıncına mağruz kalan basınç kapları için çizilmiştir. $\bar{P}_{out} = 0.5$ yükü altındaki kaplar için gerilme ve radyal yer değiştirme dağılımları Şekil 7 ve Şekil 8'de gösterilmiştir. Kademelendirme parametreleri α ve β 'nin $(\bar{P}_{out})_y$ üzerindeki etkileri Şekil 9'da sunulmuştur. Şekil 9'da görüldüğü gibi $\alpha^* = 0.5992$ ve $\beta^* = 2.0$ olarak hesaplanır ve bu değerlere karşılık gelen akma basıncı $(\bar{P}_{out})_y = 2.8452$ olur. Bu basıncın tabaka sayısı ile değişimi Şekil 5'te gösterilmiştir. Son olarak, $(\bar{P} = \bar{P}_{out})_y = 0.5833$ altındaki homojen basınç kabında, $\bar{P} = (\bar{P}_{out})_y = 2.8452$ altındaki fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında $(\alpha = \alpha^*$ ve $\beta = \beta^*)$; $\bar{P} = (\bar{P}_{out})_y = 1.8751$ altındaki 4 tabakalı basınç kabında ve $\bar{P} = (\bar{P}_{in})_y = 2.2987$ altındaki 16 tabakalı basınç kabında oluşan gerilme ve radyal yer değiştirme dağılımları Şekil 10'da gösterilmiştir.

Kapların mekanik davranışlarını etkileyen bir diğer parametre, basınç kabının kalınlığıdır (ya da a/b oranıdır). Farklı a/b oranlarına sahip fonksiyonel olarak kademelendirilmiş, homojen ve tabakalı basınç kaplarının elastik limit yükleri iç basınç için Tablo 1'de, dış basınç için Tablo 2'de verilmiştir. Tablo 1 ve Tablo 2'de görüldüğü gibi, kalınlık arttıkça (a/b oranı azaldıkça), elastik limit yükünde de artış gerçekleşmektedir.

5 Sonuçlar

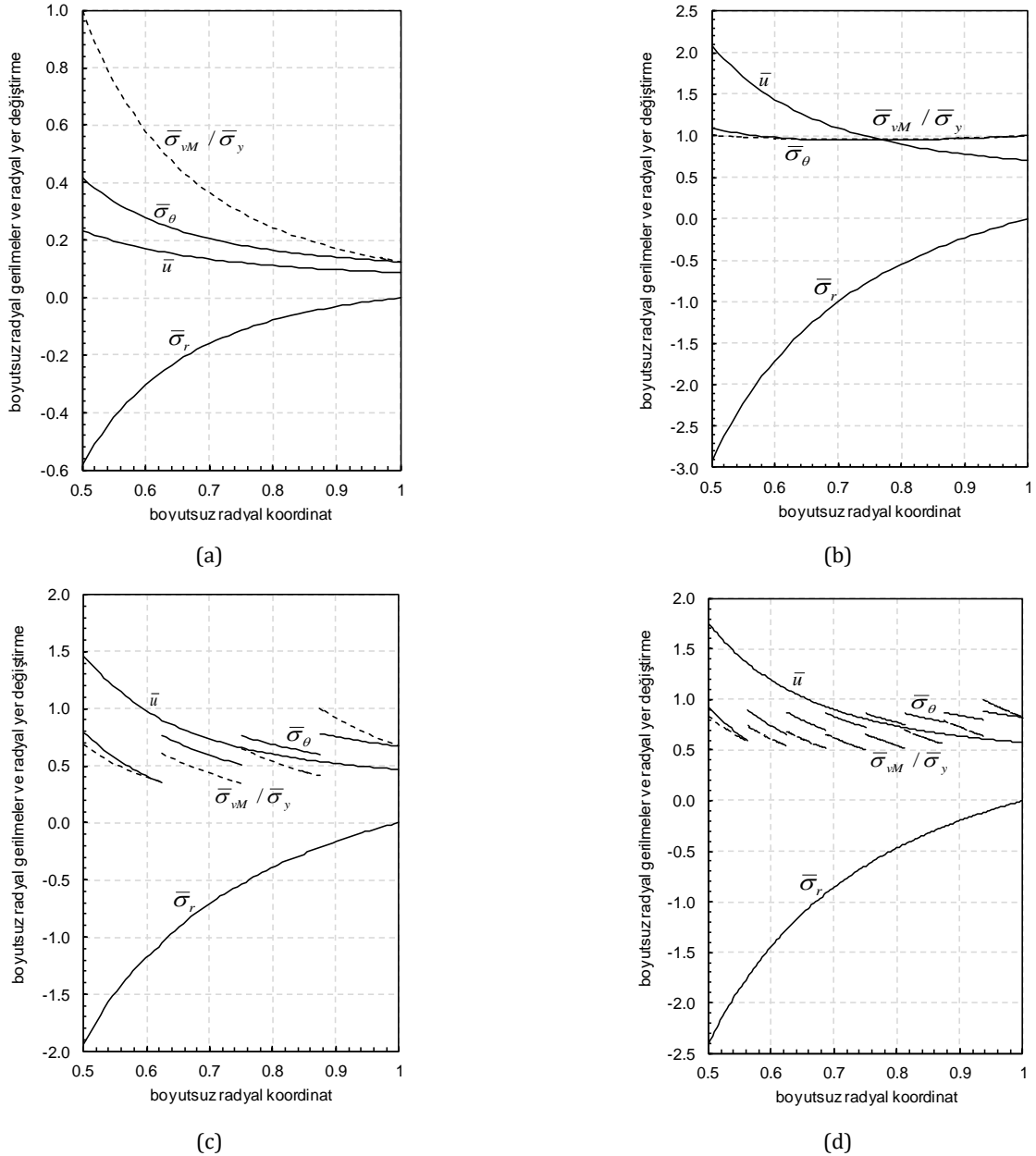
İki çeşit heterojen (ve homojen) küresel basınç kaplarının iç ve dış basınç altında gösterdikleri elastik davranışları ve elastik limit yükleri her bir malzeme için geliştirilen analitik modeller ile incelenmiş ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında, kademelendirme parametrelerinin; tabakalı basınç kabında ise tabaka sayısının akmaya sebep olacak yüklere olan etkisi detaylı bir şekilde incelenmiş ve sonuçları sunulmuştur.

Von Mises akma kriterine göre elastik limit yükleri, iç ya da dış yüke maruz kalan ($a/b = 0.5$ ve $\nu = 0.3$) basınç kapları için tespit edilmiştir. En yüksek elastik limit yükünün fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında oluşabileceği

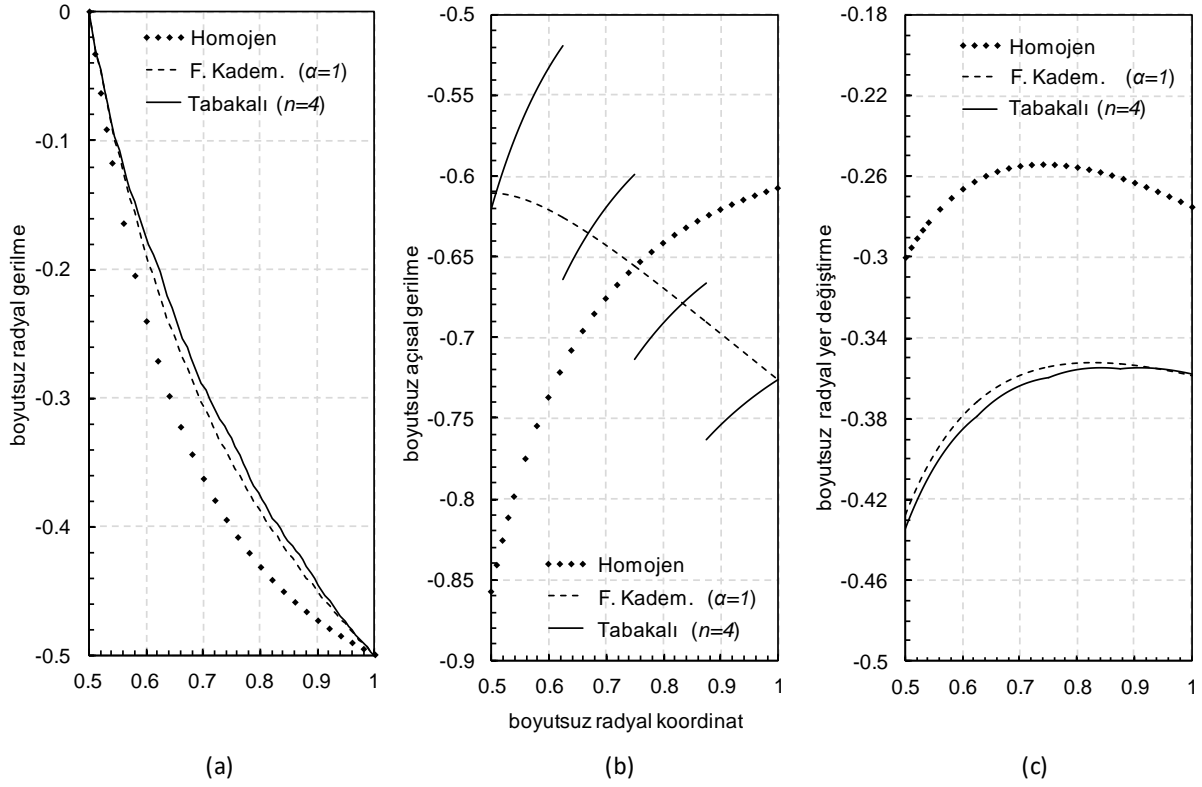
gözlenmiş, tabakalı kaptaki ise tabaka sayısının artırılmasıyla bu yük değerinin arttığı tespit edilmiştir. İç basınca maruz kalan fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabı için, $\alpha = 1.3544$, $\beta = -2.0$ alındığında, en yüksek elastik limit yükü $(\bar{P}_{in})_y = 2.9130$ olarak hesaplanmıştır. Dış basınç altındaki kademelendirilmiş kaptaki en yüksek elastik limit yükü $(\bar{P}_{out})_y = 2.8452$ olmaktadır ve bu değere ulaşmak için kademelendirme parametreleri $\alpha = 0.5992$ ve $\beta = -2.0$ alınmalıdır. Homojen basınç kabı için bu değerler $(\bar{P}_{in})_y = (\bar{P}_{out})_y = 0.5833$ değerinde kalmıştır. Tabakalı basınç kaplarında ise, iki tabakalı kap için $(\bar{P}_{in})_y = 1.2170$ ve $(\bar{P}_{out})_y = 1.1848$ olurken 32 tabakalı kap için $(\bar{P}_{in})_y = 2.8192$ ve $(\bar{P}_{out})_y = 2.6539$ olarak hesaplanmıştır. Bu durumda, iki tabakalı basınç kabında ulaşılan elastik limit yükü

ile kademelendirilmiş kabın elastik limit yükü arasındaki fark %70 civarında iken bu fark 32 tabakalı kaptaki %2'ye inebilmektedir.

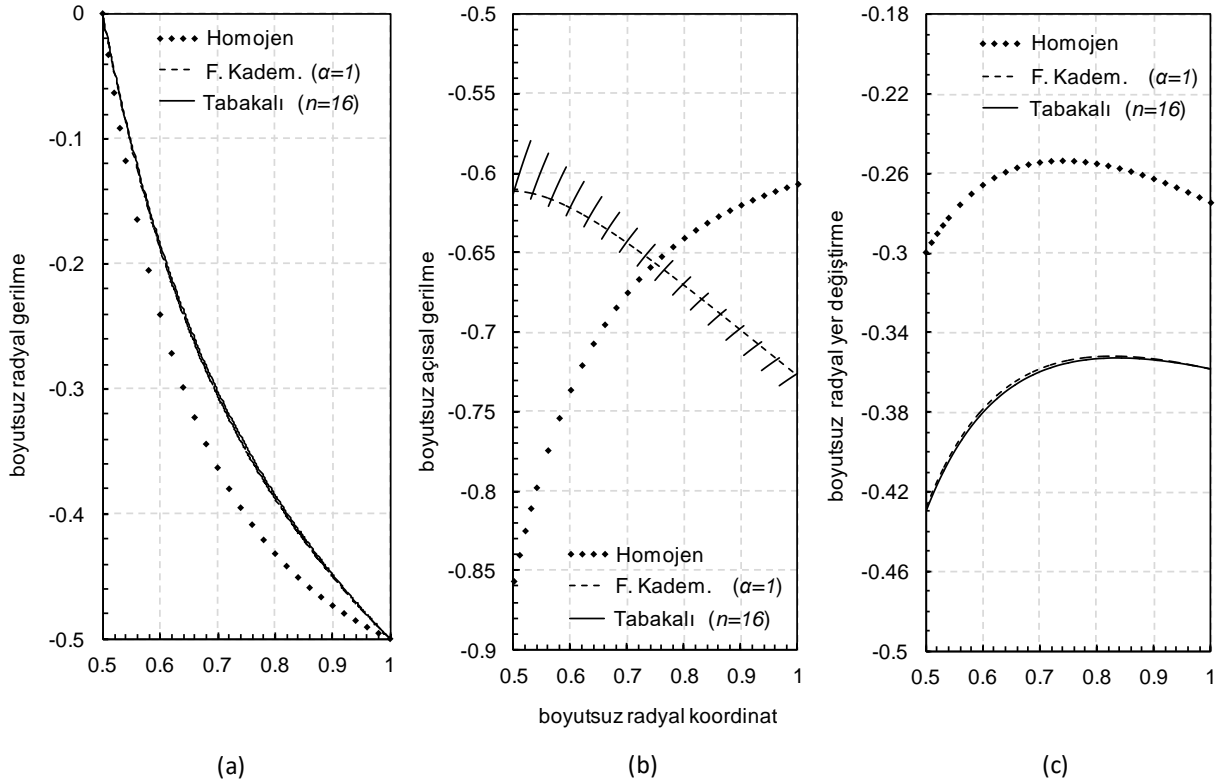
Diğer bir yandan, heterojen basınç kaplarında akmanın gerçekleştiği yüzeylerde de değişiklikler gözlenmiştir. Kademelendirilmiş basınç kabında akma yüküne ve kademelendirme parametresine bağlı olarak iç ya da dış yüzeyde oluşabilirken, tabakalı basınç kabında akma r_{n-1} 'inci arayüz koordinatında gerçekleşmektedir. Homojen basınç kaplarında ise akma her zaman iç yüzeyde gerçekleşmektedir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, heterojen basınç kabı üreticilerine yönelik detaylı bir araştırma niteliğindedir.



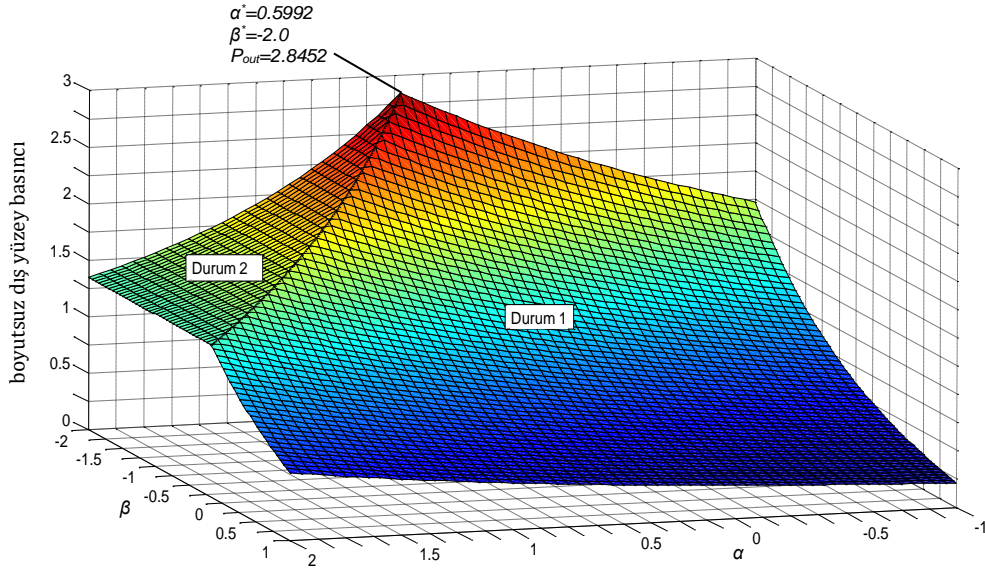
Şekil 6: (a): $(\bar{P}_{in})_y = 0.5833$ altında homojen basınç kabı için; (b): $(\bar{P}_{in})_y = 2.9130$ altında fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabı için ($\alpha = \alpha^* = 1.3544$ ve $\beta = \beta^* = -2.0$); (c): $(\bar{P}_{in})_y = 1.9448$ altında 4 tabakalı basınç kabı için ve (d): $(\bar{P}_{in})_y = 2.4142$ altında 16 tabakalı basınç kabı için gerilme ve radyal yer değiştirme dağılımları.



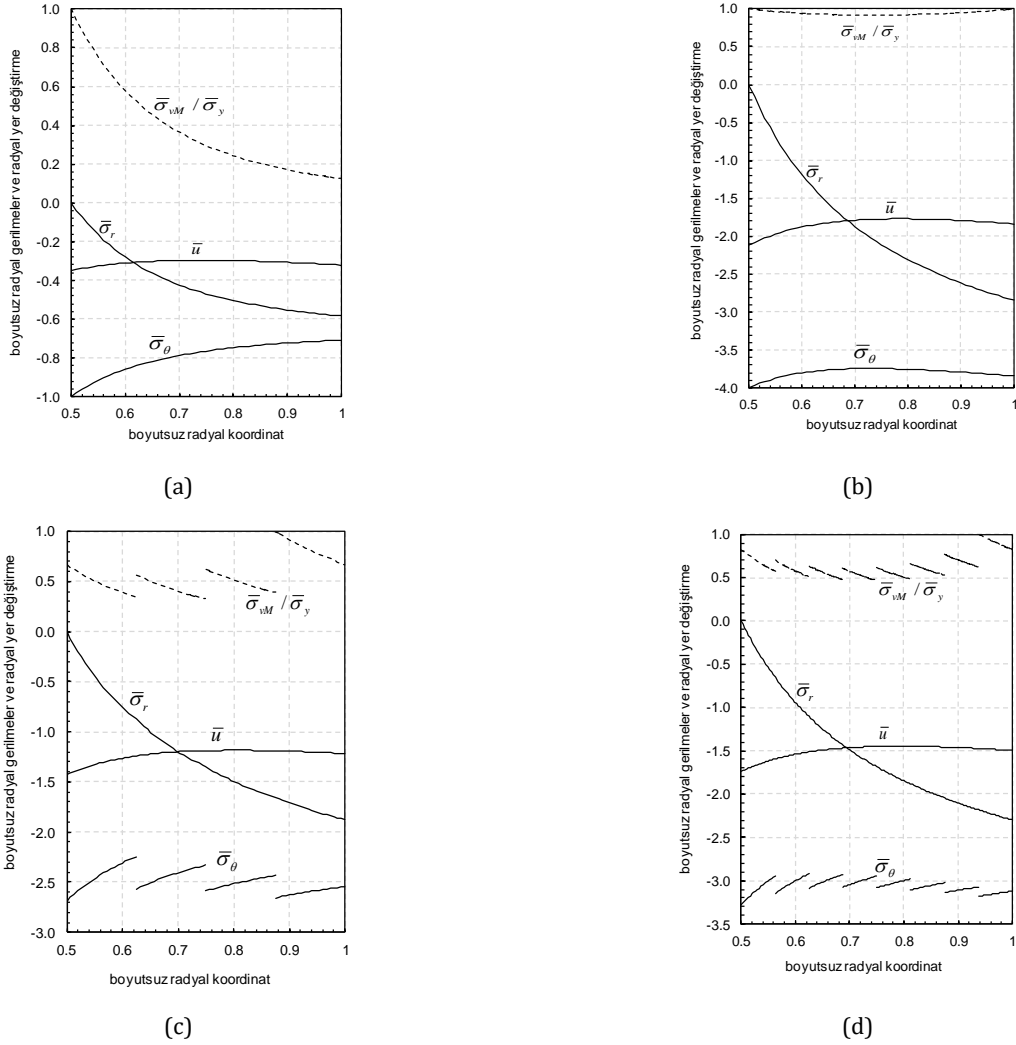
Şekil 7: Homojen, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş ($\alpha = 1$) ve tabakalı ($n = 4$) basınç kaplarında $\bar{P}_{out} = 0.5$ yükü ile oluşan, (a): Radyal gerilme, (b): Açısal gerilme ve (c): Radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 8: Homojen, fonksiyonel olarak kademelendirilmiş ($\alpha = 1$) ve tabakalı ($n = 16$) basınç kaplarında $\bar{P}_{out} = 0.5$ yükü ile oluşan (a): Radyal gerilme, (b): Açısal gerilme ve (c): Radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 9: Fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında (P_{out})_y'nin kademelendirme parametreleri α ve β ile değişimi.



Şekil 10: (a): $(\bar{P} = \bar{P}_{out})_y = 0.5833$ altındaki homojen basınç kabında; (b): $\bar{P} = (\bar{P}_{out})_y = 2.8452$ altındaki fonksiyonel olarak kademelendirilmiş basınç kabında ($\alpha = \alpha^*$ ve $\beta = \beta^*$); (c): $\bar{P} = (\bar{P}_{out})_y = 1.8751$ altındaki 4 tabakalı basınç kabında ve (d): $\bar{P} = (\bar{P}_{in})_y = 2.2987$ altındaki 16 tabakalı basınç kabında oluşan gerilme ve radyal yer değiştirme dağılımları.

Tablo 1: Farklı a/b oranları için elastik limit iç basınç değerleri.

a/b	Kademelendirilmiş			Homojen	Çok Tabakalı				
	$(P_{in})_y$	α^*	β^*	$(P_{in})_y$	$n=2$ için $(P_{in})_y$	$n=4$ için $(P_{in})_y$	$n=8$ için $(P_{in})_y$	$n=16$ için $(P_{in})_y$	$n=32$ için $(P_{in})_y$
0.3	9.5644	1.5450	-2	0.6487	2.8618	5.5274	7.5555	8.8459	9.5747
0.35	6.8201	1.4939	-2	0.6381	2.1786	4.0556	5.4272	6.2634	6.7242
0.4	5.0323	1.4453	-2	0.6240	1.7449	3.1008	4.0494	4.6093	4.9127
0.45	3.8001	1.3988	-2	0.6059	1.4433	2.4351	3.1003	3.4832	3.6881
0.5	2.9130	1.3544	-2	0.5833	1.2170	1.9448	2.4142	2.6789	2.8192
0.55	2.2519	1.3118	-2	0.5558	1.0361	1.5676	1.8985	2.0819	2.1783
0.6	1.7453	1.2710	-2	0.5227	0.8837	1.2671	1.4982	1.6243	1.6901
0.65	1.3480	1.2319	-2	0.4836	0.7499	1.0205	1.1789	1.2643	1.3085
0.7	1.0305	1.1945	-2	0.4380	0.6283	0.8132	0.9185	0.9746	1.0035
0.75	0.7725	1.1586	-2	0.3854	0.5149	0.6352	0.7020	0.7372	0.7552
0.8	0.5601	1.1242	-2	0.3253	0.4070	0.4796	0.5189	0.5394	0.5499
0.85	0.3832	1.0912	-2	0.2573	0.3027	0.3414	0.3619	0.3725	0.3779
0.9	0.2343	1.0595	-2	0.1807	0.2008	0.2171	0.2256	0.2300	0.2321

Tablo 2: Farklı a/b oranları için elastik limit dış basınç değerleri.

a/b	Kademelendirilmiş			Homojen	Çok Tabakalı				
	$(P_{out})_y$	α^*	β^*	$(P_{out})_y$	$n=2$ için $(P_{out})_y$	$n=4$ için $(P_{out})_y$	$n=8$ için $(P_{out})_y$	$n=16$ için $(P_{out})_y$	$n=32$ için $(P_{out})_y$
0.3	8.7104	0.3461	-2	0.6487	2.3236	4.5507	5.9860	6.7890	7.2123
0.35	6.3697	0.4153	-2	0.6381	1.9151	3.5636	4.6190	5.2089	5.5199
0.4	4.7917	0.4806	-2	0.6240	1.6136	2.8459	3.6265	4.0613	4.2902
0.45	3.6717	0.5419	-2	0.6059	1.3778	2.3016	2.8784	3.1980	3.3659
0.5	2.8452	0.5992	-2	0.5833	1.1848	1.8750	2.2987	2.5319	2.6539
0.55	2.2169	0.6525	-2	0.5558	1.0207	1.5318	1.8396	2.0075	2.0951
0.6	1.7279	0.7023	-2	0.5227	0.8767	1.2492	1.4690	1.5879	1.6497
0.65	1.3397	0.7487	-2	0.4836	0.7469	1.0120	1.1652	1.2473	1.2897
0.7	1.0268	0.7921	-2	0.4380	0.6271	0.8094	0.9125	0.9672	0.9953
0.75	0.7711	0.8326	-2	0.3854	0.5145	0.6337	0.6996	0.7342	0.7520
0.8	0.5596	0.8705	-2	0.3253	0.4069	0.4790	0.5181	0.5384	0.5488
0.85	0.3831	0.9060	-2	0.2573	0.3027	0.3413	0.3617	0.3722	0.3776
0.9	0.2343	0.9393	-2	0.1807	0.2008	0.2171	0.2256	0.2299	0.2321

6 Teşekkür

Bu araştırmayla ilgili yapmış olduğu yardım ve yorumları nedeniyle Orta Doğu Teknik Üniversitesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Ahmet N. Eraslan'a teşekkür ederim.

7 Kaynaklar

- [1] Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*. 3rd ed. New York, USA, McGraw-Hill, 1970.
- [2] Gamer U. "The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening". *International Journal of Mechanical Science*, 30(6), 415-426, 1988.
- [3] Jiang W. "Hollow spheres subjected to sustained and variable loads". *Journal of Engineering Mechanics*, 120(6), 1343-1368, 1994.
- [4] Zhifei S, Taotao Z, Hongjun X. "Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders". *Composite Structures*, 79(1), 140-147, 2007.
- [5] Ghannad M, Rahimi GH, Nejad MZ. "Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials". *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 388-396, 2013.
- [6] Buffer H. "The arbitrarily and the periodically laminated elastic hollow sphere: exact solutions and homogenization". *Archives of Applied Mechanics*, 68(9), 579-588, 1998.

- [7] Liu PF, Xing LJ, Zheng JY. "Failure analysis of carbon fiber/epoxy composite cylindrical laminates using explicit finite element method". *Composites Part B: Engineering*, 56, 54-61, 2014.
- [8] Roy AK, Massard TN. "A design study of thick multilayered composite spherical pressure vessels". *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 11(5), 479-493, 1992.
- [9] Borisov AV. "Elastic analysis of multilayered thick-walled spheres under external load". *Mechanika*, 4(84), 28-32, 2010.
- [10] Lutz MP, Ferrari M. "Compression of a sphere with radially varying elastic moduli". *Composites Engineering*, 3(9), 873-884, 1993.
- [11] Tutuncu N, Ozturk M. "Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels". *Composites Part B: Engineering*, 32(8), 683-686, 2001.
- [12] You LH, Zhang JJ, You XY. "Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials". *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82(5), 347-354, 2005.
- [13] Guven U, Baykara C. "On stress distributions in functionally graded isotropic spheres subjected to internal pressure". *Mechanics Research Communications*, 28(3), 277-281, 2001.
- [14] Nejad MZ, Gharibi M. "Effect of material gradient on stresses of thick FGM spherical pressure vessels with exponentially-varying properties". *Journal of Advanced Materials and Processing*, 2(3), 39-46, 2014.
- [15] Bayat Y, Ghannad M, Torabi H. "Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading". *Archives of Applied Mecha*, 82(2), 229-242, 2012.
- [16] Chen YZ, Lin XY. "Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials". *Computational Materials Science*, 44(2), 581-587, 2008.
- [17] Karami K, Abedi M, Nejad MZ, Lotfian MH. "Elastic analysis of heterogeneous thick-walled spherical pressure vessels with parabolic varying properties". *Frontiers of Mechanical Engineering*, 7(4), 433-438, 2012.
- [18] Chen YZ, Lin XY. "An alternative numerical solution of thick-walled cylinders and spheres made of functionally graded materials". *Computational Materials Science*, 48(3), 640-647, 2010.
- [19] Atashipour SA, Sburlati R, Atashipour SR. "Elastic analysis of thick-walled pressurized spherical vessels coated with functionally graded materials". *Meccanica*, 49(12), 2965-2978, 2014.
- [20] Carrera E, Soave M. "Use of functionally graded material layers in a two-layered pressure vessel". *Journal of Pressure Vessel Technology*, 133(5), 1202-1212, 2011.
- [21] Akış T. "Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels". *Computational Materials Science*, 46(2), 545-554, 2009.
- [22] Kieback B, Neubrand A, Riedel H. "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 81-106, 2003.
- [23] Gandra J, Miranda R, Vilaca P, Velhinho A, Teixeira JP. "Functionally graded materials produced by friction stir processing". *Journal of Materials Processing Technology*, 211(11), 1659-1668, 2011.
- [24] Choi SH, Cheung HH. "A topological hierarchy-based approach to layered manufacturing of functionally graded multi-material objects". *Computers in Industry*, 60(5), 349-363, 2009.
- [25] Shin K, Natsu H, Dutta D, Mazumder J. "A method for the design and fabrication of heterogeneous objects". *Materials & Design*, 24(5), 339-353, 2003.
- [26] Cannillo V, Lusvardi L, Siligardi C, Sola A. "Effects of different production techniques on glass-alumina functionally graded materials". *Ceramics International*, 34(7), 1719-1727, 2008.
- [27] Fraldi M, Carannante F, Nunziante L. "Analytical solutions for n-phase functionally graded material cylinders under de saint venant load conditions: Homogenization and effects of poisson ratios on the overall stiffness". *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1310-1324, 2013.
- [28] Lannutti JJ. "Functionally graded materials: Properties, potential and design guidelines". *Composites Engineering*, 4(1), 81-94, 1994.
- [29] Elastic Properties and Young Modulus for some Materials. The Engineering ToolBox. "Standart Arama". http://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html (02.06.2016).