GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 11
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2022
Sayfa/Pages: 324-330

Alınış tarihi (Received): 06.12.2022
Kabul tarihi (Accepted): 14.12.2022

Çok Aralıklı Bir Sınır Değer Probleminin Bazı Spektral Özellikleri

Hayati OLĞAR[1*]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü / Tokat .*
**Sorumlu Yazar:hayati.olgar@gop.edu.tr*

ÖZET: Fizik, mühendislik ve doğa bilimlerinin çeşitli dallarındaki birçok problemin çözümünde çeşitli tipte Sturm-Liouville problemleri karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin temel kavramları ve yöntemleri; matematiksel fiziğin çeşitli problemlerinin Fourier yöntemiyle çözülmesi sonucu formüle edilmiş ve geliştirilmiştir. Son yıllarda, birçok fiziksel olgunun matematiksel bir modeli olmaları nedeniyle; yalnızca sınır koşulları değil, aynı zamanda geçiş şartları olarak da adlandırılan ilave sınır şartları içeren çok-aralıklı Sturm-Liouville problemlerine olan ilgide dikkate değer bir canlanma olmuştur. Bu çalışmanın amacı, klasik Sturm-Liouville problemlerinden farklı olarak Sturm-Liouville tipi yeni tipten çok aralıklı sınır değer problemini incelemektir. Bu çalışmada incelenen Sturm-Liouville tipi yeni tipten çok aralıklı sınır değer probleminin klasik sınır değer problemlerinden farklı olarak hem sınır şartlarının her ikisinde özdeğer parametresinin hem de geçiş şartları olarak bilinen dört ek etkileşim şartının bulunduğunu vurgulamak istedik.

***Anahtar Kelimeler** –Sınır değer problemi, sınır şartları, geçiş şartları, operator-polinom.*

Some Spectral Properties of a Many-Interval Boundary Value Problem

ABSTRACT: Various type SLPs appear in solving many problems of physics, engineering and other branches of natural sciences. Therefore, the basic concepts and methods of the spectral theory of differential operators were formulated and developed in solving various problems of mathematical physics by the Fourier method. In recent years there has been a remarkable revival interest of many-interval Sturm-Liouville problems, including not only boundary conditions but also additional conditions called transmission conditions, since they are a mathematical model of many physical phenomena. The aim of this work is to examine the new type many-interval boundary value problem of the Sturm-Liouville type, which is different from the classical Sturm-Liouville problems. We want to emphasize that the new type of boundary value problem studied in this study differs from the standard boundary value problems in that it contains eigenvalue parameter in both boundary conditions and four additional interaction conditions which is known transmission conditions.

Keywords–Boundary value problem, boundary conditions, transmision conditions, operator-polynomial.

1. Giriş

Matematik, fizik ve doğa bilimlerinin birçok dalında sınır değer problemleri olarak adlandırılan birtakım problemlerinde; kısmi türevli bir diferansiyel denklemin çözümü, tanımlandığı bölgenin sınırlarında verilmiş belirli sınır şartlarını sağlamalıdır. Fourier yöntemi olarak da bilinen bağımsız değişkenlere ayırma yönteminin uygulanması sonucu mekanik, mühendislik, fiziksel kimya, finans, matematiksel fiziğin problemlerinin birçoğu genelde sınır değer problemlerine dönüşmektedir. Örneğin, gerçel eksen boyunca denge konumu etrafında düzgün ω açısal hızı ile dönerek salınan uzunluğu l ve doğrusal yoğunluğu ρ olan bir sicim problemine, bağımsız değişkenlere ayırma metodunun uygulanması durumunda

$$T\,\frac{d^2u}{dx^2}+\rho\omega^2u\;=0,\qquad x\in[0,l]$$

$$u(0)=u(l)=0$$

formundaki Sturm-Liouville tipi sınır değer problemi elde edilir. Burada $u(x)$, dönme eksenindeki yer değiştirmeyi, T ise düzgün çekme kuvvetini gösterir. Çeşitli fiziksel, mekaniksel ve finansal modellerden kaynaklanan ve sınır şartlarında özdeğer parametresini bulunduran sınır-değer problemlerinin spektral özellikleri, çok sayıda bilim insanı tarafından birbirinden farklı formülasyonlarda araştırılmıştır (bakınız, Atkinson (1964), Belinskiy ve Dauer (1997), Fulton (1977), Hinton (1979), Stakgold (1971), Tikhonov ve Samarskii (1963), Titchmars (1962), Walter (1973)). Bir Sturm-Liouville denkleminin iç etkileşim noktasındaki çözümünde veya türevinde süreksizlikler olabilen sınır değer problemleri (Allahverdiev, Tuna (2019, 2020), Ao, Zhang (2020), Aydemir, Mukhtarov (2017), Bairamov ve ark. (2019), Çavuşoğlu ve ark. (2021a, 2021b), Faydaoğlu, Guseinov (2010), Guliyev (2019), Li, Wang (2022), Mukhtarov, Aydemir (2021), Mukhtarov ve ark. (2015, 2020, 2022), Mukhtarov, Yücel (2020), Olğar (2019), Şen ve ark. (2017), Uğurlu, Bairamov (2014), Yakar, Akdogan (2017), Zhang, Wang (2015)) çalışmalarında incelenmiştir. Son zamanlarda, farklı doğa bilimlerinde meydana gelen olayların matematiksel modellemeleri olmalarından dolayı; sınır ve sıçrama koşulları içeren çok-aralıklı Sturm-Liouville özdeğer problemlerine olan ilgide büyük bir hareketlilik gözlenmektedir.

Bu çalışmada, $(a,c_1)\cup(c_1,c_2)\cup(c_2,b)$ üzerinde tanımlı

$$-u''(t)+q(t)u(t)=\mu u(t) \tag{1}$$

biçiminde verilmiş çok-aralıklı Sturm-Liouville denkleminden, $t=a,b$ uç-noktalarında

$$u'(a)-\,\mu u(a)=0,\;\; u'(b)+\,\mu u(b)=0, \tag{2}$$

ile verilmiş sınır koşullarından ve $t=c_1,c_2$ süreksizlik noktalarında

$$\lim_{\varepsilon\to0}u(c_i+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}u(c_i-\varepsilon)=0,\qquad i=1,2, \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}u'(c_i-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}\big(u'(c_i+\varepsilon)\;+k_iu(c_i)\big)\;,\qquad i=1,2 \tag{4}$$

şeklinde verilmiş dört adet geçiş şartından oluşan bir sınır değer geçiş problemi araştırılacaktır. Burada $q(t)$ Lebesgue anlamında integrallenebilir bir fonksiyon, k_1 ve k_2 pozitif reel katsayılar, μ ise bir spektral parametredir. Bu çalışmanın temel amacı, ele alınan (1)-(4) çok-aralıklı sınır-değer-geçiş probleminin (ÇASDGP'nin) uygun bir Hilbert uzayında özdeğerlerine karşılık gelen genelleştirilmiş özfonksiyon kavramını tanımlamak ve bu problemi bir operatör polinom denkleme indirgemektir.

2. Probleme Uygun Uzaylar ve Eşitsizlikler

Bu kısımda $(1)-(4)$ ÇASDGP'ni incelemek için bu probleme uygun bazı yeni uzayları ve bu uzaylarda geçerli olan bazı kavramlar ve eşitsizlikler verilecektir. $\Omega_1 := (a,c_1)$, $\Omega_2 := (c_1,c_2)$, $\Omega_3 := (c_2,b)$ ve $\Omega := \bigcup_{i=1}^{3}\Omega_i$ olmak üzere Ω üzerinde karesi integrallenebilen kompleks değerli fonksiyonların uzayını $\aleph := \dotplus_{i=1}^{3} \mathrm{L}_2(\Omega_i)$ notasyonu ile gösterelim.

Bu uzaydaki iç çarpımı ve bu iç çarpıma karşılık gelen normu

$\langle u,v\rangle_{\aleph} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i}u(t)\overline{v}(t)dt$ ve $\|u\|_{\aleph}=(\langle u,u\rangle_{\aleph})^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlayalım.

Teorem 2.1. $\aleph$ uzayı klasik $L_2(a,b)$ Hilbert uzayı ile izometriktir.

Yukarıdaki Teoremden direkt olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.1. $\aleph$ iç-çarpım uzayı Hilbert uzayıdır.

$\aleph$ Hilbert uzayından yararlanarak (1)-(4) ÇASDGP'ne uygun

$$\mathcal{M} := \Big\{u : u, u' \in \aleph, \lim_{\varepsilon\to 0} u(c_i+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} u(c_i-\varepsilon), \lim_{\varepsilon\to 0} u'(c_i-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(u'(c_i+\varepsilon) + k_i u(c_i)\big), i = 1,2\Big\}$$

lineer uzayı ve bu $\mathcal{M}$ lineer uzay üzerinde tanımlı iç çarpım ve normu

$$\langle u,v\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i} u'(t)\overline{v'}(t)dt + \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i} q(t)u(t)\overline{v}(t)dt = \langle u',v'\rangle_{\aleph} + \langle u,v\rangle_{\aleph},$$

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = (\langle u,u\rangle_{\mathcal{M}})^{\frac{1}{2}}$$

notasyonları ile gösterelim.

Teorem 2.2. Üzerinde iç çarpım tanımlanan $\mathcal{M}$ lineer uzayı Hilbert uzayıdır.

$\mathcal{M}$ Hilbert uzayı üzerinde yeni bir iç çarpımı $\langle u,v\rangle_{\mathcal{M}_q} = \langle u',v'\rangle_{\aleph} + \langle u,qv\rangle_{\aleph}$ ve bu iç-çarpıma karşılık gelen normu $\|u\|_{\mathcal{M}_q} = \left(\langle u,u\rangle_{\mathcal{M}_q}\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlayalım. $\mathcal{M}$ uzayındaki fonksiyonların Ω üzerinde sürekli olduğu aşikardır, fakat bu fonksiyonların genelleştirilmişmiş türevlerinin sadece $\aleph$ uzayının elemanları olduğu kabul edilir.

Sobolev uzayları (Gohberg, Krein (1969)) için iyi bilinen gömülme teoremlerinden elde edilen

$$|f(j)|^2 \leq \xi\|f'\|_{\aleph}^2 + \frac{2}{\xi}\|f\|_{\aleph}^2, \qquad j \in \Omega$$

eşitsizliği, $(1)-(4)$ ÇASDGP'ini operatör-polinom denkleme indirgeyebilmek amacıyla kullanılmıştır. Bu eşitsizlikler her $u \in \oplus L_2(\Omega)$ için sağlanır. Ayrıca, her $\epsilon \in \Omega$ için

$$|u(\epsilon)| \leq C(\epsilon)\|u\|_{\mathcal{M}} \qquad (5)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $C(\epsilon)$ sabiti, u fonksiyonundan bağımsızdır yani sadece ϵ değişkenine bağımlıdır.

Not: Genelliği bozmaksızın $q(t)$ fonksiyonunun Ω üzerinde pozitif tanımlı olduğu varsayılabilir. Aslında, $t \in \Omega$ için $h = max\, q(t)$ olmak üzere $\lambda \to \lambda - h$ spektral parametresinin ötelemesi sonucunda $q(t)$ fonksiyonu Ω aralığının her yerinde pozitif olduğu kabul edilir.

$q(t)$ fonksiyonu sınırlı, pozitif tanımlı ve ölçülebilir olduğundan dolayı $0 < m < M$ olacak biçimde öyle m ve M sayıları mevcuttur ki, $\forall u \in \mathcal{M}$ için

$$m\|u\|_{\mathcal{M}} < \|u\|_{\mathcal{M}_q} < M\|u\|_{\mathcal{M}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2.2. $\mathcal{M}$ uzayında tanımlı $\|u\|_{\mathcal{M}}$ normu ile $\mathcal{M}_q$ uzayı üzerinde tanımlı $\|u\|_{\mathcal{M}_q}$ normu birbirine denktir.

$(1)-(4)$ ÇASDGP'nin operatör-demeti denklemine indirgeyebilmek amacıyla inşa edilen probleme özgü uzaylar ve eşitsizliklerin ifade edilmesi tamamlanmıştır. Şimdi incelenecek problem için genelleştirilmiş çözüm kavramı verilecektir.

3. Genelleştirilmiş Çözüm Kavramı ve Esas Sonuçlar

Tanım 3.1. $u \in \mathcal{M}$ elemanı verilsin. Eğer her $v \in \mathcal{M}$ için

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \left(u'(t)\overline{v'}(t) + q(t)u(t)\overline{v}(t)\right) dt + k_1 u(c_1)\,\overline{v}(c_1) + k_2 u(c_2)\,\overline{v}(c_2)$$
$$= \mu \left\{\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} u(t)\overline{v}(t)dt + u(a)\overline{v}(a) + u(b)\overline{v}(b)\right\} \quad (6)$$

eşitliği sağlanırsa, o halde $\mathcal{M}$ uzayının elemanı olan $u(t)$ fonksiyonuna $(1)-(4)$ ÇASDGP'nin genelleştirilmiş özfonksiyonu denir.

Lemma 3.1. $u(t) \in C^2(\Omega), q(t) \in C(\Omega)$ olmak üzere, geçiş şartları içeren klasik olmayan Sturm-Liouville probleminin genelleştirilmiş çözümü; ikinci mertebeden (1) diferensiyel denklemini, (2) sınır şartlarını ile $(3)-(4)$ geçiş şartlarını klasik anlamda da sağlar.
Riesz temsil teoreminden ve

$$\langle Ku, v\rangle_{\mathcal{M}_q} := k_1 u(c_1)\,\overline{v}(c_1) + k_2 u(c_2)\,\overline{v}(c_2) \quad (7)$$

$$\langle Lu, v\rangle_{\mathcal{M}_q} := \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} u(t)\overline{v}(t)dt + u(a)\overline{v}(a) + u(b)\overline{v}(b) \quad (8)$$

eşitlikleri ile tanımlı $K, L: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ operatörlerinden yararlanarak (6) bağıntısını operator polinom denkleme indirgeyeceğiz.

Teorem 3.1. K operatörü pozitif, kendine eşlenik ve kompakt operatördür.
İspat: $\mathcal{M}$ uzayında tanımlı ve (7) ifadesi ile temsil edilen K operatörünün pozitifliğini gösterelim. Bunun için her $u(t) \in \mathcal{M}$ için (7) ifadesi ile iç çarpım ve norm fonksiyonlarının özellikleri kullanılacak olursa

$$\langle Ku, u\rangle_{\mathcal{M}_q} = \left\langle\left(k_1 u(c_1)\,\overline{u}(c_1) + k_2 u(c_2)\,\overline{u}(c_2)\right), u\right\rangle_{\mathcal{M}_q}$$
$$= k_1 \|u(c_1)\|^2_{\mathcal{M}_q} + k_2 \|u(c_2)\|^2_{\mathcal{M}_q} \quad (9)$$

elde edilir. k_1, k_2 reel sayıları kabulümüz gereği pozitif olduğundan her $u(t) \in \mathcal{M}$için (9) eşitliği gereği K operatörünün pozitif olduğu söylenir.

Şimdi K operatörünün kendine eşlenikliliğine bakalım. Yine iç çarpım fonksiyonunun özellikleri ve $\forall u, v \in D(K)$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ için (7) eşitliği gereği

$$\langle u, Kv\rangle_{\mathcal{M}_q} = \langle Kv, u\rangle_{\mathcal{M}_q}$$

$$= \overline{k_1 v(c_1)\,\overline{u}(c_1) + k_2 v(c_2)\,\overline{u}(c_2)} = k_1 u(c_1)\,\overline{v}(c_1) + k_2 u(c_2)\,\overline{v}(c_2)$$
$$= \langle Ku, v\rangle_{\mathcal{M}_q}$$

elde edilir. Bu ise K operatörünün $\mathcal{M}$ Hilbert uzayında simetrik olduğunu gösterir. $\mathcal{M}$ uzayında K simetrik operatör ve bu operatörün tanım bölgesi, $\mathcal{M}$ uzayında her yerde yoğun olduğundan, Fonksiyonel Analizden iyi bilinen yöntemin uygulanması sonucunda K operatörünün kendine eşlenik olduğu söylenir.

Son olarak, K operatörünün kompaktlığını ispatlayacağız. Bunun içinde $\mathcal{M}$ Hilbert uzayında $\{u_k\}$ fonksiyonlar dizisinin u elemanına zayıf yakınsadığını kabul edelim. $\{u_k\}$ dizisi zayıf yakınsak olduğundan sınırlıdır bu takdirde öyle $C_1 > 0$ sabit sayısı mevcuttur ki $\|u_k\|_{\mathcal{M}} \leq C_1$ eşitsizliği sağlanır.

K operatörünün sınırlılığından dolayı, $\{Ku_k\}$ fonksiyonlar dizisinin $\mathcal{M}$ Hilbert uzayında $\{Ku\}$ elemanına zayıf yakınsak olduğu söylenir.

Sobolev uzayları için gömülme teoremleri (Ladyzhenskaia (1985)) $\{u_k\}$ dizisinin, $\aleph$ Hilbert uzayında güçlü yakınsak ve $\{u_k(c_1)\}, \{u_k(c_2)\}$ dizilerinin ise $\mathbb{C}(\Omega)$ uzayında yakınsak olduğunu ima eder. $\mathcal{M} \subset \aleph$ gömülmesi kompakt olduğundan K, $\mathcal{M}$ Hilbert uzayından $\aleph$ Hilbert uzayına kompakt operatördür. Dolayısıyla $\{Ku_k\}$, $\aleph$ uzayında güçlü yakınsak dizidir.

(7) ifadesi ile (5) eşitsizliği birlikte göz önünde bulundurulursa her $u(t) \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}\|Ku\|^2_{\mathcal{M}_q} = \langle Ku, Ku\rangle_{\mathcal{M}_q} &\leq \left|k_1 u(c_1)\,\overline{(Ku)}(c_1) + k_2 u(c_2)\,\overline{Ku}(c_2)\right| \\ &\leq C_1\{|u(c_1)||Ku(c_1)| + |u(c_2)|\,|Ku(c_2)|\} \\ &\leq C_2\|Ku\|_{\mathbb{C}(\Omega)}\{|u(c_1)| + |u(c_2)|\} \\ &\leq C_3\|Ku\|_{\mathcal{M}_q}\{|u(c_1)| + |u(c_2)|\}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\|K(u_k - u_m)\|^2_{\mathcal{M}_q} \leq C_4\{|u_k(c_1) - u_m(c_1)| + |u_k(c_2) - u_m(c_2)|\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\mathcal{M}$ uzayında $\{Ku_k\}$ fonksiyonlar dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve böylece K operatörünün de kompakt olduğunu göstermektedir.

Benzer biçimde L operatörü de pozitif, kompakt ve kendine eşlenik operatördür.

Yukarıdaki teoremler gereği (6) ile ifade edilen integral denklemi

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{M}_q} + \langle Ku, v\rangle_{\mathcal{M}_q} = \mu\langle Lu, v\rangle_{\mathcal{M}_q} \qquad (10)$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $u(t) \in \mathcal{M}$, $(1)-(4)$ ÇASDGP'nin genelleştirilmiş bir çözümü ise bu takdirde (10) eşitliği her $v(t) \in \mathcal{M}$ için sağlanır. Yani $\mathcal{M}$ uzayından alınan keyfi v değişkeni için (8) eşitliği $u + Ku = \mu Lu$ denklemi biçiminde temsil edilebileceğini söyleyebiliriz. Böylece

$$\mathrm{Z}(\mu) = I + K - \mu L \qquad (11)$$

şeklinde operatör-polinomu tanımlayabiliriz. Yani $(1)-(4)$ ÇASDGP, $\mathrm{Z}(\mu)u = 0$ operatör-polinom denklemine indirgenmiş olur. Bu takdirde genelleştirilmiş çözüm kavramından istifade edilecek olursa, takip eden teoremi elde ederiz.

Lemma 3.2. $(1)-(4)$ ÇASDGP'nin genelleştirilmiş özfonksiyonları, $\mathcal{M}$ uzayında $\mathrm{Z}(\mu)u(t) = 0$ operatör-polinom denklemini sağlar.

Teorem 3.2. μ_0 ın yeterince büyük pozitif değerleri için $\mathrm{Z}(-\mu_0)$ operatör polinomu pozitif tanımlıdır.

İspat: $u(t)$, $\mathcal{M}$ uzayının herhangi bir elemanı olsun. (11) eşitliği ve iç çarpım fonksiyonunun özellikleri gereği her $u(t) \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Z}(-\mu_0)u, u\rangle_{\mathcal{M}_q} &= \langle u + Ku + \mu_0 Lu, u\rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \langle u, u\rangle_{\mathcal{M}_q} + \langle Ku, u\rangle_{\mathcal{M}_q} + \mu_0\langle Lu, u\rangle_{\mathcal{M}_q}\end{aligned}$$

$$= \|u\|^2_{\mathcal{M}_q} + k_1|u(c_1)|^2 + k_2|u(c_2)|^2 + \mu_0\{\|u\|^2_0 + |u(a)|^2 + |u(b)|^2\}$$
$$\geq \|u\|^2_{\mathcal{M}_q}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1. $Z(-\mu_0)$ operatörünün bütün özdeğerleri pozitiftir.

Teorem 3.3. $\forall\mu_0 \in \mathbb{R}^+$ için $Z(-\mu_0)$ operatör polinomu kompakt ve kendine eşlenik operatördür.

İspat: Teorem 3.1. gereği K ve L operatörleri kompakt ve kendine eşlenik olduklarından (11) eşitliği ile tanımlı $Z(-\mu_0)$ operatör polinomu kompakt ve kendine eşlenik operatördür.

4. Teşekkür

Bu çalışmanın sonuçlarının bir kısmı Ankara International Congress on Scientific Research-VII adlı kongrede sunulmuştur.

5. Kaynaklar

Allahverdiev, B. P., Tuna, H. 2020. Eigenfunction expansion for singular Sturm–Liouville problems with transmışsın conditions. *Electron. J. Differ. Equ.* 3, 4286–4302.

Allahverdiev, B., Tuna, H. (2019). Eigenfunction expansion for singular sturm-liouville problems with transmission conditions. *Electron. J. Differ. Equ.* 3, 1–10.

Ao, J., Zhang, L. 2020. An inverse spectral problem of Sturm–Liouville problems with transmission conditions. Mediterr J Math., 17(5):1-24.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York.

Aydemir, K., Mukhtarov O. Sh. 2017. Class of Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent transmission conditions. *Numer. Funct. Anal. 3rd Optim.* 38(10), 1260–1275.

Bairamov, E., Aygar, Y. ve Oznur, G. B. 2019. Scattering properties of eigenparameter dependent impulsive Sturm–Liouville Equations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 4 2769-2781.

Belinskiy, B.P. ve Dauer, J.P. 1997. On a regular Sturm- Liouville problem on a finite interval with the eigenvalue parameter appearing linearly in the boundary conditions. *Spectral theory and computational methods of Sturm-Liouville problem, Eds. D. Hinton and P. W. Schaefer, 1997.*

Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O. S. (2021a). A new finite difference method for computing approximate solutions of boundary value problems including transition conditions. Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика, (2), 54-61.

Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O. and Olğar, H. (2021b). Finite Difference Method for Approximate Solution of a Boundary Value Problem with Interior Singular Point. *Konuralp Journal of Mathematics (KJM),* vol. 9, no. 1, pp. 40-48.

Faydaoglu, S., Guseinov, G. Sh. 2010. An expansion result for a Sturm-Liouville eigenvalue problem with impulse. *Turkish Journal of Mathematics*, 34 (3), 355-366.

Fulton, C. T. 1977. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, A77, 293-308.

Gohberg, I. C., Krein, M. G. 1969. *Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs*, vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Guliyev, Namig J. 2019. Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter. *J. Math. Phys.* 60, no. 6, 063501, 23.

Hinton, D. B. 1979. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. *Quart J. Math. Oxford* (2), 33-42.

Ladyzhenskaia, O. A. 1985. The Boundary Value Problems Of Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York.

Li, K., Wang, P. 2022. Properties for fourth order discontinuous differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions, *AIMS Mathematics*, 7(6), 11487–11508.

Mukhtarov, O. S., Aydemir, K. 2021. Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, *26*(3), 432-443.

Mukhtarov, O. Sh, Olğar, H. ve Aydemir, K. 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems. Filomat 29, 1671–1680.

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H., Muhtarov, F.S., Aydemir, K. 2022. The Weak Eigenfunctions of Boundary-Value Problem with Symmetric Discontinuities, *Journal of Applied Analysis* 28(2), 275-283.

Mukhtarov, O.S., Yücel, M. 2020. A study of the eigenfunctions of the singular Sturm–Liouville problem using the analytical method and the decomposition technique. Mathematics 8, 415–429.

Mukhtarov, O. Sh., Yücel, M., Aydemir, K. (2020). Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. *Complexity* 5, 2020.

Olğar, H. 2019. Selfadjointness and Positiveness of the Differential Operators Generated by New Type Sturm-Liouville Problems, *Cumhuriyet Sci. J. 40 (1), 24-34.*

Stakgold I. 1971. *Boudary Value Problems of Mathematical Physics, II,* Macmillan Co., New York.

Şen, E., Açıkgöz, M., Aracı, S. 2017. Spectral problem for Sturm-Liouville operator with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition. *Ukrainian Mathematical Journal* 68,8, 1263-1277.

Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1963). *Equations Of Mathematical Physics,* Oxford and New York, Pergamon.

Titchmars, E. C. 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, Second Edn. Oxford Univ. press, London.

Uğurlu, E., Bairamov, E. (2014). Spectral analysis of eigenparameter dependent boundary value transmission problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 443(1), 482-494.

Walter, J. (1973). Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. *Math. Z.*, 133, 301-312.

Yakar, A., Akdogan, Z. 2017. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem, Adv Differ Equ 2017; 378.

Zhang, M. Z., Wang, Y. C. 2015. Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems with interface conditions, *Appl. Math. Comput. 265, 31-39.*