Nötrosofik Modüllerin Projektif Boyutları

Mikail BAL[1]

[1]Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep, Türkiye

: mikailbal46@hotmail.com [1] 0000-0002-7489-8605

Geliş (Received): 25.05.2022 Düzeltme (Revision): 22.09.2022 Kabul (Accepted): 16.12.2022

ÖZ

Bu çalışmada, cebirin temel konularından biri olan halka yapısının özel bir hali olan modül kavramı ele alınarak tanımlanan modüllerin projektif boyutları yapısı kullanılarak, yeni bir çalışma alanı olan nötrosofik küme kavramı üzerine taşınarak, ilk defa nötrosofik modüllerin projektif boyutları yapısı oluşturulmuştur. Giriş bölümünde bu tanımlamanın yapılabilmesi için gerekli olan halka, modül, modül homomorfizma, dizi ve nötrosofik modül yapılarının temel tanımları ile bazı örnekleri verilmiştir. Ana konuda ise nötrosofik modüllerin projektif boyutu kavramı ile ilgili yeni temel tanımlar ile genel teoremlerin ispatlarının verilmesinin yanı sıra bu tanım ve teoremler ile ilgili gerekli örnekler verilerek konu aydınlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Modül, Nötrosofik, Projektif boyut

Projective Dimensions of Neutrosophic Modules

ABSTRACT

In this study, the projective dimensions of the neutrosophic modules were formed for the first time by using the projective dimensions of the modules, which was defined by the concept of the module, which is a special case of the ring structure, which is one of the basic subjects of algebra, and moved to the concept of the neutrosophic set, which is a new field of study. In the introduction, basic definitions and some examples of a ring, module, module homomorphism, sequence and neutrosophic module structures, which are necessary for this definition, are given. In the main topic, new basic definitions and proofs of general theorems related to the concept of the projective dimension of neutrophic modules are given, and the subject is clarified by giving necessary examples about of these definitions and theorems.

Keywords: Modul, Neutrosophic, Projective dimension

GİRİŞ

Klasik modüller temsil teorisinin çalışmasında kullanılır. 1950'li yıllarda homolojik yöntemlerin tanımlanmasıyla birlikte modül teorisinin kullanım alanı daha da genişlemiş oldu. Bugünlerde ise modül teorisi cebir çalışmalarında kendi başına çalışılabilen bir alan oldu. Nötrosofi kavramı ise ilk olarak yeni bir felsefe dalı olarak Florentin Smarandanche tarafından 1980 yılında tanımlanmıştır. Nötrosofik kavramının temelini belirsizlik kavramı oluşturur. Belirsizlik kavramı bilimin birçok alanında karşılaşılan bir problemdir. Florentin Smarandanche yaptığı çalışmalarda belirsizlik kavramını kullanarak matematikte bir küme tanımlamıştır. Bu kümede; T sembolü ile doğruluğu, F sembolü ile yanlışlığı ve I sembolü ile belirsizliği ifade etmiştir. Nötrosofik küme kavramı, bulanık küme kavramının genelleştirilmiş halidir [1].

Belirsizlik tıp bilimi, çevre, ekonomi, sosyal bilimler gibi pek çok alanda büyük bir sorun oluşturmaktadır. Klasik yöntemler bu tür sorunların üstesinden gelmeye yetmemektedir. Çünkü klasik yöntemlerin sınıflandırma yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Cebir alanında belirsizlikler üzerine tanımlanan küme teorileri bazı yazarlar tarafından da farklı şekilde tanımlanmıştır. Smarandanche gibi bazı araştırmacılar, cebir üzerine yaptığı çalışmalarda, nötrosofik teori kavramını tanımlayarak nötrosofik cebirsel yapıları oluşturmuşlardır. Smarandanche tarafından yapılan bu çalışmalar, cebirsel yapılar da ilk nötrosofik yapının oluşmaya başlamasını sağlamıştır. Daha sonra başka araştırmacılar tarafından da geliştirilerek ortaya konan yeni tanım ve teoremler, günümüzde nötrosofik cebirsel yapıları, yeni araştırmacılar tarafından üzerinde çalışma yapılabilmesi daha cazip bir konu haline getirmiştir. Bu durum, nötrosofik yapıları birçok alanda kullanılabilir bir teori haline getirerek nötrosofik yapıların önemi artırmıştır [2,3].

Konu ile ilgili uzun konu dışı açıklamalardan kaçınmak için homolojik boyutların tanımını ' Ext' veya 'Tor' kullanmadan, fakat projektif modül kullanılarak bir tanım verilmiştir. Bu tanım için Kaplansky'nin çalışmalarından yararlanılmıştır. Schaunel teoremi, Kaplansky 1958 sonbaharında Chicago üniversitesinde homolojik cisim teorisi üzerinde bir ders anlattığında Schaunel tarafından tasarlandı. Kaplansky'nin fikirlerini kullanarak sonsuz projektif boyutların modülünün bazı örnekleri kolayca yapılabilmektedir.

Bu çalışmada, daha önce üzerinde çalışılmış olunan, modüllerin homolojik boyutları yapısı kullanılarak yeni bir yapı olan nötrosofik modüllerinin projektif boyutu tanımlanacak ve bazı teorilerinden bahsedilecektir. Bu teoriler, nötrosofik halkaların boyutları olarak tanımlanan bazı yeni sayısal değişmezlerin tanımlanmasını sağlayacaktır. Nötrosofik modüllerinin projektif boyutları ile ilgili tanım ve teoremler verilmeden önce konuyu temel oluşturacak olan halka, cisim, modül, modül homomorfizması ve dizi kavramları ve nötrosofik modül hakkında temel tanımlardan bahsedilecektir.

MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde nötrosofik modüllerin homolojik boyutlarına temel oluşturacak şekilde halka, ideal, modül, modül homomorfizması ve izomorfizması, diziler ve nötrosofik modüllerin tanımları ile bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 1: R boş kümeden farklı ve +, . ikili işlemleri üzerinde tanımlı bir küme olsun. Eğer

1) (R,+) bir değişmeli gruptur.
2) Her x,y için xy $\in$R
3) Her x,y,z$\in$R için x(yz) = (xy)z
4) Her x,y,z $\in$R için (x+y)z = xz+yz
   x(y+z) = xy+xz

şartlarını sağlanıyor ise ($R,+,\cdot$) ikili işlemine bir halka denir. Eğer her x,y$\in$R için xy = yx oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir. Her x$\in$R için $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa bu halkaya birim elemanlı halka denir [4].

Tanım 2: R birimli değişmeli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. Eğer R'nin sıfırdan farklı her alemanının tersi var ise R' ye cisim denir [5].

Tanım 3: R kümesi bir halka ve boştan farklı A kümesi de R nin alt kümesi olsun. Eğer A kümesi;

1) Her a,b $\in$A için a-b$\in$A
2) Her r$\in$R ve a$\in$A için ar$\in$A ve ra$\in$A

şartlarını sağlıyor ise A kümesine R'nin bir ideali denir. A$\lhd$ R şeklinde gösterilir

Tanım 4: R kümesi bir halka ve X$\subseteq$R için;

$$\{I_i : \forall i \in I,\ I_i \lhd R \ ve \ X \subseteq I_i\}$$

idealler ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i\in I} I_i$ 'ye X kümesi tarafından üretilen ideal denir ve (X) ile gösterilir. X' in elemanlarına (X) idealinin üreteçleri denir.

$X=\{a_1,...,a_n\}$ ise $(X)=(a_1,...,a_n)$ ile ifade edilir ve (X) idealine sonlu üretilmiş ideal denir [7].

Tanım 5: Tek bir eleman tarafından üretilen ideale temel ideal denir[7].

Tanım 6: R bir halka ve A$\neq R$ olacak şekilde A$\lhd R$ olsun. Her x,y$\in$R için, xy$\in$A$\Rightarrow x\in$A veya $y\in$A oluyorsa A kümesine bir asal ideal denir [7].

Tanım 7: R kümesi bir halka ve $A \neq R$ olacak şekilde $A \lhd R$ olsun. $A\subseteq B \subseteq R$ olacak şekilde her $B \lhd R$ ideali için A = B veya B = R oluyorsa A idealine R'nin bir maksimal ideali denir [7].

Tanım 8: R bir halka, M bir değişmeli ve toplamsal grup ve

$$\cdot : R \times M \to M$$
$$(r,v) \to r.v$$

şeklinde tanımlanan bir dış işlem olsun. Her r, r_1, $r_2 \in$ R ve her v, v_1,$v_2 \in$ M için

1) $r(v_1+ v_2) = r v_1+r v_2$
2) $(r_1+ r_2)v = r_1v + r_2v$
3) $(r_1 . r_2)v = r_1(r_2v)$

Şartları sağlanır ise, o zaman M' ye bir R-modül denir. Ayrıca
4) Her v$\in$M ve $1_R\in$R için $1_Rv = v$

oluyor ise M' ye birimli modül denir [3].

Tanım 9: R bir halka, V bir R-modül olsun. Eğer A kümesi bir R-modül ise A kümesine V'nin alt modül denir [3].

Tanım 10: R değişmeli bir halka, V R-modül, I, $J \lhd R$ ve IV, V' nin alt modülü olsun. IV, {rg: r$\in$I ve v$\in$V} $\{rg \ : \ r\in I, \ g\in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir [8];

1) IV $=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i g_i : r_i \in I, v_i \in V, n \in IN\right\}$
2) $I(JV)=(IJ)V$
3) $a\in R$ için (Ra)V' nin yerine aV yazılır.

(Ra)V = {aV : v$\in$V}

Tanım 11: R değişmeli bir halka, M modül, G de M'nin bir alt modülü ve $J\neq\varnothing$ olacak şekilde $J\subseteq M$ olsun.

$$(G:J)=(G:_R J)=\{\ r\in R \ : \forall\, j\in J \ için \ rj\in G\}$$

ifadesi bir ideal olur.

Eğer N, J tarafından üretilen M' nin alt modülü ise $(G:J)=(G:N)$ 'dir. $m\in M$ için $(G:\{m\})$ 'nin yerine $(G:m)$ yazılır.

Eğer G=0 ise

$$(0:J)=\{\ r\in R : \forall\, j\in J \ \ için \ rj=0\}$$

kümesine J'nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m\in M$ için m 'nin sıfırlayanı (0 : m) ile gösterilir [8].

Önerme 12: $I\lhd R$ ideali değişmeli halka olsun. $I=Ann_R(R/I)=(0:_R 1+I)$ olur [7].

Önerme 13: R değişmeli bir halka, M modül ve N, N' ve G de M' nin alt modülü ve $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ M'nin alt modüllerinin iki ailesi olsun.

$$1)(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda : N)$$
$$2)(G : \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G : N_\lambda)$$

olur [8].

Tanım 14: M ve N kümeleri R değişmeli halkası üzerinde iki modül olsun. $f : M \to N$ dönüşümü

1) Her a,b $\in$ M için f(a+b) = f(a) + f(b)

2) Her a $\in$ M ve r $\in$ R için f(rm) = rf(m)

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme modül homomorfizması denir [9].

Tanım 15: Bir f : A$\to$B dönüşümü birebir ve örten modül homorfizması ise bu homomorfizmaya izomorfizma denir. $A \cong B$ ile gösterilir [9].

Tanım 16: R değişmeli bir halka M modül ve G, M'nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \to f(m) = m + G$ olarak tanımlanan $f : M \to M/G$ dönüşümüne doğal (kanonik) homomorfizma denir ve f örtendir [9].

Tanım 17: R değişmeli halka, G, M, N modül ve $g : G \to M$ ve $f : M \to N$ modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

diziside $\operatorname{Im} g = Çekf$ ise bu diziye M modül tam dizisi denir. Genel olarak

$$\ldots \to M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+1} \to \ldots$$

dizisi her M_n de tam ise bu diziye modül tam dizisi denir. Örneğin $\operatorname{Im} d_n = Çekd_{n+1}$ iken

$$M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1}$$

dizisi tamdır. Genel olarak

$$0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$$

dizisi için f birebir, g örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir [10].

Tanım 18: R değişmeli halka ve L, M, N birer R modül ve

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu dizi $\operatorname{Im} f = Çekg$, M' nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split dizi denir.

Buradan Dizi splittir $\Leftrightarrow M = Çekg \oplus G$ olacak şekilde M' nin bir G alt modül vardır [10].

Önerme 19: $0 \neq R$ değişmeli bir halka ve F sonlu taban ile serbest modül olsun. O zaman F için her taban sonludur ve F için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. F için bir taban içinde ki elemanların sayısına F'nin *rankı* denir ve $rank(F)$ ile gösterilir [11].

Tanım 20: X bir modül ve $g : A \to B$ modül homomorfizması olsun. $\forall\ f : X \to B$ modül homomorfizması için $h : X \to A$ modül homomorfizması varsa X modülüne projektif modül denir [10].

Teorem 21: Her serbest modül projektiftir [11].

Önerme 22: X projektif modül ve $X = M \oplus N$ ise M projektif modüldür [12].

Önerme 23: Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir [12].

(M,+,.) değişmeli bir R halkası üzerinde herhangi bir R-modül ve M(I) = ⟨M∪I⟩ kümeside M ve I tarafından oluşturulan bir nötrosofik küme olsun.

Tanım 24: M(I) nötrosofik grubu (M(I),+,.) ikili işlemi ile değişmeli bir R halkası üzerinde R x M(I) $\to M(I)$ olacak şekilde bir nötrosofik modül oluşturur ve buna zayıf nötrosofik modül denir [3].

Tanım 25: Eğer nötrosofik M(I) kümesi bir nötrosofik R(I) halkası üzerinde R(I) x M(I) $\to M(I)$ olacak şekilde nötrosofik modül oluryor ise, o zaman M(I) kümesine kuvvetli nötrosofik modül denir [3].

Tanım 26: M(I) kümesinin elemanlarına nötrosofik vektörler ve R(I) halkasının elemanlarına nötrosofik skaler denir [8].

Önerme 27: Eğer k,p,m,n ∈ M için x = k+pI, y = m+nI ∈ M(I) ve a,b ∈ R için q = a+bI ∈ R(I) ise o zaman nötrosofik kümelerde toplama ve çarpma işlemi

x+y = (k+pI)+(m+nI)= (k+m)+(p+n)I

qx = (a+bI).(k+pI)= ak+(ap+kb+bp)I

şeklinde tanımlanır [13].

Örnek 28: M(I) bir R halkası üzerinde zayıf nötrosofik R-modül ve nötrosofik R(I) halkası üzerinde bir kuvvetli R-modül olsun [13].

1) M^n(I) bir R halkası üzerinde zayıf nötrosofik R-modül ve nötrosofik R(I) halkası üzerinde kuvvetli nötrosofik R-modüldür.

2) M_{m*n}(I) ={[a_{ij}]:a_{ij}∈R(I)} bir R halkası üzerinde zayıf nötrosofik modül ve nötrosofik R(I) halkası üzerinde kuvvetli nötrosofik R-modüldür.

Teorem 29: Her kuvvetli nötrosofik modül aynı zamanda bir zayıf nötrosofik modüldür[13].

İspat : Kabul edelim ki M(I) bir nötrosofik R(I) halkası üzerinde kuvvetli nötrosofik R-modül olsun. Her R halkası nötrosofik R(I) halkasının bir alt kümesi olduğundan her kuvvetli nötrosofik modül aynı zamanda bir zayıf nötrosofik modül olur.

BULGULAR ve TARTIŞMA

Önerme 30: R değişmeli birimli bir halka ve M(I) nötrosofik modül ve P(I) projektif nötrosofik modül olmak üzere

$$0 \to K(\mathrm{I}) \to P(\mathrm{I}) \xrightarrow{\alpha} M(\mathrm{I}) \to 0$$
$$0 \to L(\mathrm{I}) \to Q(\mathrm{I}) \xrightarrow{\beta} M(\mathrm{I}) \to 0$$

dizileri modül homomorfizmalarının nötrosofik tam dizisi ise

$$0 \to K(\mathrm{I}) \to L(\mathrm{I}) \oplus P(\mathrm{I}) \to Q(\mathrm{I}) \to 0$$

olacak şekilde nötrosofik tam dizisi vardır. Özellikle $Q(\mathrm{I})$ projektif nötrosofik modül ise o zaman

$$K(\mathrm{I}) \oplus Q(\mathrm{I}) \cong L(\mathrm{I}) \oplus P(\mathrm{I})$$

elde edilir.

İspat: $X(\mathrm{I}) = \{(p,q) \in P(\mathrm{I}) \oplus Q(\mathrm{I}) : \alpha(p) = \beta(q)\}$ kümesi $P(\mathrm{I}) \oplus Q(\mathrm{I})$'nın alt nötrosofik modülü olsun.

$$\pi_1 : x(I) \to p(I)$$
$$\pi_1(p,q) = p$$

dönüşümü örtendir. p = a+bI ve q = c+dI olmak üzere, $\forall p \in P(\mathrm{I})$ için β örten olduğundan $\beta(q) = \alpha(p)$ olacak şekilde $q \in Q(\mathrm{I})$ vardır. Böylece $(p,q) \in X(I)$ ve $\pi_1(p,q) = p$ elde edilir.

$$\text{Çek}\,\pi_1 = \{(0,q) : (0,q) \in X\}$$
$$= \{(0,q) : \beta(q) = 0\}$$
$$\cong \text{çek}\ \beta \cong L(I)$$

bulunur. Böylece

$$0 \to L(I) \to X(I) \xrightarrow{\pi_1} P(I) \to 0$$

nötrosofik tam dizisi elde edilir. Benzer şekilde

$$0 \to K(I) \to X(I) \xrightarrow{\pi_2} Q(I) \to 0$$

nötrosofik tam dizisi elde edilir. $P(I)$ projektif nötrosofik modül olduğundan

$$0 \to L(I) \to X(I) \xrightarrow{\pi_1} P(I) \to 0$$

nötrosofik tam dizisi split dizi olur ve

$L(I) \oplus P(I) \cong X(I)$ elde edilir.

$$0 \to K(I) \to X(I) \to Q(I) \xrightarrow{\pi_1} 0$$

nötrosofik tam dizisinde $X(I)$ yerine $L(I) \oplus P(I)$ yazılırsa istenen

$$0 \to K(I) \xrightarrow{\psi} L(I) \oplus P(I) \xrightarrow{\varphi} Q(I) \to 0$$

nötrosofik tam dizisi elde edilir. Q(I) projektif nötrosofik ise bu dizi split olduğundan

$$K(I) \oplus Q(I) \cong L(I) \oplus P(I)$$

elde edilir.

Sonuç 31: $P_i(I)$ ve $Q_i(I)$'ler iki projektif nötrosofik modüller olmak üzere

$$0 \to K(I) \to P_{n-1}(I) \to \cdots \to P(I)_1 \to P_0(I) \xrightarrow{a} M(I) \to 0$$
$$0 \to L(I) \to Q_{n-1}(I) \to \cdots \to Q_1(I) \to Q_0(I) \xrightarrow{\beta} M(I) \to 0$$

nötrosofik modül homomorfizmalarının nötrosofik tam dizisi olsun. O zaman

$$K(I) \oplus Q_{n-1}(I) \oplus P_{n-2}(I) \oplus Q_{n-3}(I) \oplus \cdots$$
$$\cong L(I) \oplus P_{n-1}(I) \oplus Q_{n-2}(I) \oplus P_{n-3}(I) \oplus \cdots$$

elde edilir.

İspat: $K(I) = \text{çek}\,\alpha$ ve $L^1(I) = \text{çek}\,\beta$ olsun. Bir önceki önermeden $K'(I) \oplus Q_0(I) \cong L'(I) \oplus P_0(I)$ olduğundan.

$$0 \to K(I) \to P_{n-1}(I) \to \cdots \to P_2(I) \to P_1(I) \oplus Q_0(I)$$
$$\to K'(I) \oplus Q_0(I) \to 0$$
$$0 \to L(I) \to Q_{n-1}(I) \to \cdots \to Q_2(I) \to Q_1(I) \oplus P_0(I)$$
$$\to L'(I) \oplus P_0(I) \to 0$$

nötrosofik tam dizileri yazılabilir. Tümevarım metodu kullanılarak işleme devam edilirse istenen sonuç elde edilir.

Tanım 32: $\mathrm{A}(I), \mathrm{B}(I) \in \mathcal{M}(I)_R$ olsun. ($\mathcal{M}(I)_R$ nötrosofik modüller kümesidir.)

$A(I) \oplus P(I) \cong B(I) \oplus Q(I)$ olacak şekilde $P(I)$, $Q(I) \in \mathcal{M}(I)_R$ projektif nötrosofik modüller varsa A(I) ve B(I)'ya projektif olarak denktir denir. $A(I) \sim B(I)$ ile gösterilir. '~' bir denklik bağıntısıdır.

i) $A(I) \oplus P(I) \cong A(I) \oplus P(I)$ olup yansıma özelliği vardır.

ii) $A(I) \sim B(I)$ olsun. O zaman

$$A(I) \oplus P(I) \cong B(I) \oplus Q(I)$$

olacak şekilde $P(I)$, $Q(I) \in M(I)_R$ projektif nötrosofik modülleri vardır.

$B(I) \oplus Q(I) \cong A(I) \oplus P(I)$ olduğundan $B(I) \sim A(I)$ bulunur.

iii) $A(I) \sim B(I)$ ve $B(I) \sim C(I)$ olsun. O zaman $A(I) \oplus P(I) \cong B(I) \oplus Q(I)$

$$B(I) \oplus Q(I) \cong C(I) \oplus T(I)$$

olacak şekilde $P(I)$, $Q(I)$, $T(I) \in \mathcal{M}(I)_R$ projektif nötrosofik modülleri vardır. $A(I) \oplus P(I) \cong B(I) \oplus Q(I)$ ve $B(I) \oplus Q(I) \cong C(I) \oplus T(I)$ ise

$$A(I) \oplus P(I) \cong C(I) \oplus T(I)$$

olur. Buradan $A(I) \sim C(I)$ bulunur.

A(I)'nın nötrosofik denklik sınıflarını [A(I)] ve böyle bütün denklik sınıfların kümesini G(I) ile gösterelim. O zaman nötrosofik G(I) üzerinde ikili işlem $[A(I)] + [B(I)] = [A(I) \oplus B(I)]$ olarak tanımlanır ve bu tanım iyi tanımlıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 33: $(G(I),+)$ birim elemanlı değişmeli bir nötrosofik yarıgruptur $[P(I)]$'nın G(I)'da tersi vardır. $\Leftrightarrow [P(I)]=0 \Leftrightarrow P(I)$ projektif nötrosofik modüldür.

İspat: G(I)'nin birim elemanı $[\circ]$ nötrosofik modüldür.

$[X(I)],[Y(I)]\in G(I)$ için

$$[X(I)]+[Y(I)]=[X(I)\oplus Y(I)]$$

olup $[X(I)\oplus Y(I)]\in G(I)$ dir.

$[X(I)],[Y(I)],[Z(I)]\in G(I)$ için

$$\begin{aligned}([X(I)]+[Y(I)])+[Z(I)] &= [(X(I)\oplus Y(I))]\oplus[Z(I)]\\ &= [(X(I)\oplus Y(I))\oplus Z(I)]\\ &= [X(I)\oplus(Y(I)\oplus Z(I))]\\ &= [X(I)]+[Y(I)\oplus Z(I)]\\ &= [X(I)]+([Y(I)]+[Z(I)])\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}[X(I)]+[Y(I)] &= [X(I)\oplus Y(I)]\\ &= [Y(I)\oplus X(I)]\\ &= [Y(I)]+[X(I)]\end{aligned}$$

olduğundan $G(I)$ değişmelidir.

Benzer işlemler yapılırsa $(n\geq 0)$ için $P^n[M(I)]$ aşağıdaki şekilde bulunur. $P_i(I)$'ler projektif nötrosofik modül olmak üzere

$$\cdots \to P_n(I)\xrightarrow{\alpha_n}P_{n-1}(I)\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\cdots\to P_1(I)$$
$$\xrightarrow{\alpha_1}P_0(I)\xrightarrow{\alpha_0}M(I)\to 0$$

modül homomorfizmalarının nötrosofik tam dizisi olsun. Bu diziye M(I) nötrosofik modülünün projektif çözünürlüğü denir.

Tanım 34: M(I)$\in\mathscr{M}$(I)$_R$ nötrosofik modülünün projektif boyutu

$$pd(M(\mathrm{I}))=pd_R(M(\mathrm{I}))=\min\{n:\mathcal{P}^n[M(\mathrm{I})]=0\}$$

olarak tanımlanır. Böyle bir n yoksa $pd_R(M(\mathrm{I}))=\infty$ alınır.

Önerme 35: $pd(M(\mathrm{I}))=0$ olması durumunda $M(\mathrm{I})$ projektif nötrosofik modül olur.

İspat: $0\to M(\mathrm{I})\to M(\mathrm{I})\to 0$ dizisi için $M(\mathrm{I})$ projektif nötrosofik modül olduğu açıktır.

Önerme 36: M(I) $\in\mathscr{M}$ (I)$_R$ ve $n\geq 0$ için

i) $pd_R(M(\mathrm{I}))\leq n$ olur.

ii) $P_{n-1}(\mathrm{I})\xrightarrow{\alpha_{n-1}}P_{n-2}(\mathrm{I})\to\cdots\to P_1(\mathrm{I})\to P_2(\mathrm{I})\to M(\mathrm{I})\to 0$

dizisi için çek(α_{n-1}) projektif nötrosofik modüldür.

iii) $0\to P_n(\mathrm{I})\xrightarrow{\alpha_n}P_{n-1}(\mathrm{I})\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\cdots\to P_1(\mathrm{I})$

$$\to P_0(\mathrm{I})\to M(\mathrm{I})\to 0$$

olur. Sonlu nötrosofik modül homomorfizmalarının sonlu bir nötrosofik tam dizisi vardır. Ayrıca $n\geq 1$ için α_n split değilse $pd(M(\mathrm{I}))=n$ olarak alınır.

Tanım 37: Bir R halkasının global boyutu

$$gl.\dim R=\sup\{pd_R(M):M\in M_R\}\leq\infty$$

olarak tanımlanır.

Sonuç 38: $M(I)\in\mathscr{M}$(I)projektif nötrosofik modül ise gl.dim $R(I)\leq 1$ dir.

Teorem 39: a = x+yI ve b = w+zI olacak şekilde $a,b\in R(I)$ için $ann_r(a)=bR(I)$ ve $ann_r(b)=aR(I)$ olacak şekilde $aR(I)\oplus bR(I)$ toplamı R(I) ya denk değilse o zaman

$$pd(aR(I))=pd(bR(I))=\infty$$

olur. $aR(I)\oplus bR(I)\cong R(I)$ ise

$$pd(aR(I))=pd(bR(I))=0$$

olur.

İspat: $\mathrm{R(I)}\to\mathrm{aR(I)}$
$x\to ax$

olacak şekilde dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm örtendir ve çekirdeği $ann_r(a)=bR(\mathrm{I})$ dir.

$$0\to bR(I)\to R(I)\to aR(I)\to 0$$

nötrosofik tam dizisi elde edilir. Böylece

$$\mathcal{P}[aR(I)]=[bR(I)]$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathcal{P}[bR(I)]=[aR(I)]$$

olur. Eğer $aR(I)$ projektif nötrosofik modül değilse o zaman $pd(aR(I))$ ve $pd(bR(I))$ sıfır olmadığından

$$pd(aR(I))=pd(bR(I))=\infty$$

olur. Yani n çift ise $\alpha_n(x)=ax$ ve n tek ise $\alpha_n(x)=bx$ olacak şekilde

$$\cdots\to R(I)\xrightarrow{\alpha_1}R(I)\xrightarrow{\alpha_1}R(I)\xrightarrow{\alpha_0}aR(I)\to 0$$

nötrosofik modül homomorfizmalarının sonsuz çözünürlüğü bulunur. Diğer yandan eğer $aR(I)$ projektif nötrosofik modül ise

$$0\to bR(I)\to R(I)\to aR(I)\to 0$$

dizisi split olup

$$aR(I)\oplus bR(I)\cong R(I)$$

elde edilir.

Örnek 40: $R(I)=k[t]$ ve $n\geq 2$ için $t^n=0$ olsun. $a=t$ ve $b=t^{n-1}$ alınırsa

$$[((aR(I)\oplus bR(I))t^{n-1}=0 \text{ ve } R(I)t^{n-1}\neq 0$$

olduğundan

$$aR(I)\oplus bR(I)\cong R(I)$$

izomorfizması bulunamaz. Böylece

$$pd(aR(I))=pd(bR(I))=\infty$$

olur. Buradan da $gl.\dim R(I)=\infty$ elde edilir.

Örnek 41: $R(I)=k[x,y]$ ve $xy=0$ olsun. $a=x$ ve $b=y$ alınırsa o zaman,

$$0\to bR(I)\to R(I)\to aR(I)\to 0$$

dizisi split değildir. Split olsaydı bR(I) $R(I)$'nın direkt toplamı ve sıfırdan farklı bir idempotet eleman içerir. Fakat

$$bR(I)=yk[x,y]=yk[y]\subseteq k[y]$$

olduğundan bR(I)'nın sıfırdan farklı bir idempotent elemanı yoktur. Böylece

$$pd(aR(I))=pd(bR(I))=\infty \text{ ve } gl\dim R(I)=\infty$$

bulunur.

Teorem 42: Modül homomorfizmalarının nötrosofik tam dizisi $0\to X(I)\to Y(I)\to Z(I)\to 0$ olsun. O zaman $pd(A(I)), pd(B(I))$ ve $pd(C(I))$'lerden ikisi sonlu ise üçüncüsü de sonludur. Ayrıca

1) $pd(X(I))<pd(Y(I))$ ise
$$pd(Z(I))=pd(Y(I)) \text{ dir.}$$
2) $pd(X(I))>pd(Y(I))$ ise
$$pd(Z(I))=pd(X(I))+1 \text{ dir.}$$
3) $pd(X(I))=pd(Y(I))$ ise
$$pd(Z(I))\leq pd(X(I))+1 \text{ dir.}$$

Sonuç 43: Modül homomorfizmalarının nötrosofik tam dizisi $0\to X(I)\to Y(I)\to Z(I)\to 0$ ise, o zaman

$$pd(Y(I))\leq \max\{pd(X(I)), pd(Z(I))\}$$

olur.

İspat: (1) $pd(X(I))<pd(Y(I))$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$pd(Z(I))=pd(Y(I))>pd(X(I))$$

olur. Buradan

$$\max\{pd(X(I)), pd(Z(I))\}=pd(Z(I))=pd(Y(I))$$

bulunur.

(2) $pd(X(I))>pd(Y(I))$ olduğu kabul edilirse

$$pd(Z(I))=pd(X(I))+1$$

olur. Buradan da

$$\max\{pd(X(I)), pd(Z(I))\}=pd(X(I))+1\geq pd(Y(I))+2$$

bulunur.

(3) $pd(X(I))=pd(Y(I))$ olduğunu kabul edersek

$$pd(Z(I))\leq pd(X(I))+1$$

olur. Eğer $pd(Z(I))<pd(X(I))+1$ ise o zaman

$$\max\{pd(X(I)), pd(Z(I))\}=pd(X(I))=pd(Y(I))$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\max\{pd(X(I)), pd(Z(I))\}=pd(X(I))+1=pd(Y(I))+1$$

elde edilir.

Önerme 44: $M(I)=\oplus_i M_i(I)$ olsun. O zaman $pd(M(I))=\sup\{pd(M_i(I))\}$ dir.

İspat: $\mathcal{P}^n\,[\mathcal{M}_i(\mathrm{I})]=K_i(I)$ olsun. O zaman

$\mathcal{P}^n[M(I)]=\oplus K_i(I)$ olur. Böylece

$$P^n[M(I)]=0 \Leftrightarrow P^n[M_i(I)]=0$$

olur. $\forall_i\in F(I)$ için $n\geq \sup\{pd(M_i(I))\}$ bulunur.

Önerme 45: R(I) bir halka ve $x\in R(I)$ için x elemanı sıfır bölen olmayan R(I)'nın her elemanı ile değişmeli olan bir eleman olsun. $\overline{R}(I)=\dfrac{R(I)}{xR(I)}$ bölüm halkası olmak üzere $pd_{\overline{R}}(M(I))=n<\infty$ ise o zaman $pd_R(M(I))=n+1$ olur.

Önerme 46: $pd_{\overline{R}}(M(I))=\infty$ olduğunda yukarıdaki önerme doğru değildir. Çünkü $R(I)=Q(I)(t)$ ve $x=t^2$ için $M(I)=Q(I)$ nötrosofik modül olsun. O zaman $pd_{\overline{R}}(M(I))=\infty$ olur. Fakat m temel ideal bölgesi olan R üzerinde projektif olmayan bir nötrosofik modül olduğundan $pd_R(M(I))=1$ olmalıdır.

Sonuç 47: $R(I)\neq 0$ ve $gl.\dim \overline{R}(I)=n<\infty$ ise o zaman $gl.\dim R(I)\geq n+1$ olur.

Aşağıda tanımlanan nötrosofik regüler dizi kavramı yardımı ile, projektif boyutu ile birlikte verilen bir nötrosofik modül kavramı tanımlanabilir.

Tanım 48: $R(I)$ bir nötrosofik halka olsun. Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sıralı dizisi

1) $\forall i\geq 1$ için $\sum x_i R(I)\neq R(I)$
2) x_i 'nin $R(I)/(x_1R(I)+\cdots+x_{i-1}R(I))$

şartlarını sağlar ise, bu diziye bir nötrosofik regüler dizi denir. Ayrıca nötrosofik halkaların görüntüsü sıfır bölen dizi değildir.

Not: Bu tanıma göre $R(I) \neq 0$ ise ϕ dizisi nötrosofik regülerdir.

Önerme 49: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dizisi $R(I)$ nötrosofik halkasında bir nötrosofik regüler dizi ve

$I = \sum_{i=1}^{n} x_i$ R(I) olsun. O zaman pd((R(I)/I)$_R$)=n olur.

SONUÇ

İlk olarak 1958 yılında Schnuel tarafından homolojik cisim üzerine yapılan çalışmalar da ortaya attığı tanım ve teoremler, homolojik yöntemlerin tanımlanması ile birlikte daha geniş bir alanda kullanılmaya başlamıştır. Bu teoremler, soyut cebir alanında halkaların boyutları olarak tanımlanan bazı yeni sayısal değişmezlerin tanımlanmasını sağlamıştır. Bu makale çalışmasında, daha önce Schnuel'in tarafından tanımlanan homolojik kavramı ele alınarak, güncel çalışma alanı olan nötrosofik modül kavramı üzerine taşıyarak, yeni bir kavram olan, nötrosofik modüllerin projektif boyutu kavramı tanımlanmıştır. Konu hakkında bazı teoremler verilmiş ve konu gerekli örnekler ile açıklanmıştır. Bu çalışma ileride konu üzerine çalışma yapacak olan araştırmacılara yol göstermesi umut edilerek hazırlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Agboola A.A.A., Akinleye, SA. Neutrosophic vector space, Neutrosophic Sets and Systems 4, 9-18, 2014.

[2] Kandasamy W.B.V., Smarandache F. Neutrosophic rings, Hexis, Phoenix, Arizona 2006.

[3] Olgun N., Bal M. Neutrosophic modules, Neutrosophic Operational Research, 2, 181-190, 2017.

[4] Agboola A.A.A., Akinola A.D., Oyebola O.Y. Neutrosophic rings I. International Journal Mathematical Combinatorics 4, 1–14, 2011.

[5] Olgun N., Şahin M. Soyut Cebir, Gaziantep, 2010.

[6] Sankari H., and Mohammad A. AH-homomorphisms in neutrosophic rings and refined neutrosophic rings. Vol. 38. Infinite Study, 2020.

[7] Song S.Z., Khan M., Smarandache F., & Jun Y. B. Interval neutrosophic sets applied to ideals in BCK/BCI-algebras, Neutrosophic Sets and Systems, 18, 16-26, 2017.

[8] Kandasamy W.B.V., Smarandache F. Basic neutrosophic algebraic structures and their application to fuzzy and neutrosophic models. Hexis, USA. Church Rock 2004.

[9] Rossman B. Homomorphism preservation theorems, Journal of the ACM, 55, 1-53, 2008.

[10] Swan R.G. Induced representations and projective modules. Annals of Mathematics, 552-578, 1960.

[11] Swan R.G. Vector bundles and projective modules. Transactions of the American Mathematical Society, 105(2), 264-277, 1962.

[12] Zhong K.L., Chun X.Z. Gorenstein projective dimensions of complexes, Acta Mathematica Sinica, English Series, 27, 1395-1404, 2011.

[13] Hatip A. The special neutrosophic functions. International Journal of Neutrosophic Science, 4, 104-116, 2020.