Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B – Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B – Theoretical Sciences

2017 - Cilt: 5 Sayı: 1
Sayfa: 34 - 48
DOI: 10.20290/aubtdb.289629
Geliş: 13 Temmuz 2016 Düzeltme: 16 Kasım 2016 Kabul: 13 Aralık 2017

8-BOYUTTA HİPERBOLİK UZAYLARDA SEIBERG –WITTEN DENKLEMLERİ

Serhan EKER [1, *], Şenay BULUT [1], Nedim DEĞİRMENCİ [1]

[1] Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

4 − manifoldların yapısını incelemekte kullanılan Seiberg−Witten denklemleri, Dirac denklemi ve Eğrilik denklemi olmak üzere iki denklemden oluşmaktadır. Bu denklemlerin yüksek boyutlarda da self –dualite seçimine bağlı olarak genellemeleri yapılmıştır [1,2,6,9]. Bu çalışmada öncelikle 4-boyutlu Hiperbolik uzay üzerinde klasik Seiberg−Witten denklemleri yazılmış daha sonra [1,2,6,9] de verilen yöntem kullanılarak 8 − boyutlu Hiperbolik uzay üzerinde genelleştirilmiş Seiberg-Witten denklemleri yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Seiberg−Witten denklemleri, Hiperbolik Uzay, Eğrilik denklemi, Spinor, Self−Dualite

SEIBERG−WITTEN EQUATIONS ON 8 −DIMENSIONAL HYPERBOLIC SPACES

ABSTRACT

Seiberg−Witten equations, which are used to investigate the structure of 4 −dimensional manifds, consist of two equations. The first item is Dirac equation and the latter is Curvature equation. According to choosing of the self−duality concept, the generalized of these equations were done in higher dimensions [1, 2,6,9]. In this paper, at first the classical Seiberg−Witten equations are written on 4 −dimensional Hiperbolic space. Then, the generalized Seiberg−Witten equations are written on 8 −dimensional Hiperbolic space by using the method given in [1].

Keywords: Seiberg−Witten equations, Hiperbolik space, Curvature equation, Spinor, Self−Duality

1. GİRİŞ

M, n −boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $Spin^c$ −yapısı aşağıdaki gibi verilir:

M, n −boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldunun yapı grubu $SO(n)$ dir. O halde M nin $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsüne bağlı olarak TM tanjant demedinin $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)\}$ demet kartları vardır. Bu kartlara karşılık gelen geçiş fonksiyonları da $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(n)$$

şeklindeki düzgün fonksiyonlardır. Buna ilaveten $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c(n)$$

düzgün fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde mevcut olsun.

*Sorumlu Yazar: serhane@anadolu.edu.tr

1.
$$\begin{array}{rcl} \lambda\colon Spin^c(n) & \longrightarrow & SO(n) \\ ([g,z]) & \longmapsto & \lambda([g,z]) \coloneqq \lambda(g) \end{array}$$

Burada $\lambda\colon Spin(n) \longrightarrow SO(n)$ *2:1* örtü dönüşümüdür.

Buna göre

$$\begin{tikzcd} & Spin^c(n) \arrow[d, "\lambda"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\tilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir, yani $\lambda \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ dir.

2. $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ iken $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ için

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \tilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \tilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$$

dir.

Bu durumda M ye $Spin^c(n)$ manifoldu denir (Bazen M manifoldu $Spin^c(n)$ −yapısına sahiptir denir [3]). M $Spin^c$ manifoldu ise asli lif demeti kurma teoremini kullanarak M üzerinde aşağıdaki gibi üç tane asli lif demeti inşaa edilebilir [5]:

1. Eğer $g_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{SO(n)} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times SO(n)/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:
$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = g_{\alpha\beta}(x)g.$$

Bu durumda geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta}$ lar olan bir $P_{SO(n)}$ asli $SO(n)$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

2. Eğer $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{Spin^c(n)} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times Spin^c(n)/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:
$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x)\, g.$$

Bu durumda geçiş fonksiyonları $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ lar olan bir $P_{Spin^c(n)}$ asli $Spin^c(n)$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

3.
$$\begin{array}{rcl} l\colon Spin^c(n) & \longrightarrow & S^1 \\ [g,z] & \longmapsto & l([g,z]) \coloneqq z^2 \end{array}$$

olmak üzere
$$l_{\alpha\beta} = l \circ \tilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \overset{\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} Spin^c(n) \overset{l}{\rightarrow} S^1$$
geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{S^1} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times S^1/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:
$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = l_{\alpha\beta}(x)g.$$

Bu durumda geçiş fonksiyonları $l_{\alpha\beta}$ lar olan bir P_{S^1} asli S^1 lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

M manifoldu üzerinde spinor demedi

$$\kappa_n : Spin^c(n) \longrightarrow Aut(\Delta_n)$$

spinor temsili yardımıyla $S = P_{Spin^c(n)} \times \Delta_n/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(p, v) \sim (p', v') \Leftrightarrow \ p' = p.g, v' = \left(\kappa_n(g)\right)^{-1}(v).$$

Bu durumda $S = P_{Spin^c(n)} \times \Delta_n/\sim$ bölüm uzayı, asosye vektör demedi olarak tanımlanır ve

$$S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$$

ile gösterilir. S ye Spinor demedi ve S nin kesitlerine de M üzerinde spinor alanları denir.

M çift boyutlu iken S spinor demedi, $S = S^+ \oplus S^-$ şeklinde ayrışır [10]. κ_n spinor temsili yardımıyla elde edilen $S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ kompleks spinor demedidir. $\kappa_n^+ : Spin^c(n) \longrightarrow Aut(\Delta_n^+)$, $\kappa_n^- : Spin^c(n) \longrightarrow Aut(\Delta_n^-)$ temsilleri ile $S^+ = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n^+} \Delta_n^+$ ve $S^- = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n^-} \Delta_n^-$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca n çift iken $k = \frac{n}{2}$ ve n tek iken $k = \frac{n-1}{2}$ olmak üzere S kompleks spinor demetinin kesitleri üzerinde aşağıdaki gibi $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$ boyutlu hermityen iç çarpım tanımlanabilir [10].

$$\begin{array}{rcl} <,>: \Gamma(S) \times \Gamma(S) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ([p, \Psi], [p, \Phi]) & \longmapsto & <\Psi, \Phi> \end{array}$$

$\forall [p.g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p.g, \kappa(g^{-1})\Phi] \in \Gamma(S)$ için

$$\begin{array}{rcl} <[p.g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p.g, \kappa(g^{-1})\Phi]> & = & <\kappa(g^{-1})\Psi, g, \kappa(g^{-1})\Phi> \\ & = & <\Psi, \Phi> \end{array}$$

temsilciden bağımsız olduğundan S spinor demedi üzerinde tanımlanan iç çarpım iyi tanımlıdır.

2. BİR VEKTÖR ALANI İLE SPİNOR ALANININ ÇARPIMI

$$\begin{array}{ccccccc} \kappa: \mathbb{R}^n & \longrightarrow & End(\Delta_n) & & & & \\ v & \longmapsto & \kappa(v): \Delta_n & \longrightarrow & \Delta_n & & \\ & & \Psi & \longmapsto & \kappa(v)\Psi & := & v.\Psi \end{array}$$

κ temsili için $\kappa(v): \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ $\mathbb{R}-$lineer olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca κ dönüşümü $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\kappa(v)^* + \kappa(v) = 0$
2. $\kappa(v)^* \kappa(v) = |v|^2$

κ dönüşümü demed üzerindeki κ: TM $\longrightarrow End(S)$ dönüşümüne genişletmek için

$$\begin{tikzcd} & Spin^c(n) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\rho_{st}\circ\lambda=\rho"] & \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\tilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n) \arrow[r, "\rho_{st}"'] & Aut(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Diyagramında

$$\rho_{st}: SO(n) \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\rho: Spin^c(n) \xrightarrow{\lambda} SO(n) \xrightarrow{\rho_{st}} Aut(\mathbb{R}^n)$$

temsiller olmak üzere, $TM = P_{Spin^c(n)} \times_\rho \mathbb{R}^n$ olduğundan tanjant vektörleri denklik sınıfları şeklinde de düşünülebilir.

$$\begin{array}{llllll} \kappa: TM & \longrightarrow & End(S) & & & \\ ([p,v]) & \longmapsto & \kappa([p,v]): S & \longrightarrow & S & \\ & & ([p,\Psi]) & \longmapsto & \kappa([p,v])([p,\Psi]) & = [p, v.\Psi] \end{array}$$

dönüşümü iyi tanımlıdır [10].

Bazı kaynaklarda bu koşulları sağlayan

$$\kappa: TM \longrightarrow End(S)$$

dönüşümü M manifoldu üzerinde $Spin^c$ −yapısı olarak adlandırılır [3]. $\kappa: TM \longrightarrow End(S)$ dönüşümü yardımıyla

$$\rho: \Lambda^2(T^*M) \longrightarrow End(S)$$

dönüşümü çatılar üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı olmak üzere

$$\eta = \sum_{i<j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j \longrightarrow \rho(\eta) = \sum_{i<j} \eta_{ij} \kappa(e_i)\kappa(e_j)$$

dir. Bu dönüşüm aynı şekilde kompleks değerli 2 −formlara genişletilebilir [3]. Buna göre

$$\rho: \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow End(S)$$

her bir $\eta \in \Lambda^2(T^*M)$ için S^+ ve S^- alt demedleri $\rho(\eta)$ altında invaryanttır. Yani,

$$\forall \Psi \in S^+ \text{ için } \rho(\eta)(\Psi) \in S^+,$$
$$\forall \Psi \in S^- \text{ için } \rho(\eta)(\Psi) \in S^-$$

Bu nedenle $\rho^+(\eta) = \rho(\eta)|_{S^+}$, $\rho^-(\eta) = \rho(\eta)|_{S^-}$ dönüşümleri indirgenir. Buna göre

$$\rho^+: \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow End(S^+)$$

Dönüşümü

$$\rho^+(\eta) = \rho^+\left(\sum_{i<j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j\right) = \sum_{i<j} \eta_{ij} \kappa(e_i)\kappa(e_j)$$

şeklinde ifade edilir.

3. *S* SPİNOR DEMEDİ ÜZERİNDE KOVARYANT TÜREV

(M,g) Riemann manifoldundaki ∇ Levi−Civita yardımıyla $P_{SO(n)}$ asli lif demedinin üzerinde ω konneksiyon 1 −formunu belirlendikten sonra, P_{S^1}üzerindeki sabit $A \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ konneksiyon

$1-$formu yardımıyla $P_{Spin^c(n)}$ üzerinde, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde Z^A konneksiyon $1-$formu aşağıdaki gibi tanımlanabilir [6]:

$$\begin{tikzcd} T_pP_{Spin^c(n)} \arrow[r, "Z^A"] \arrow[d, "d\pi"] & \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \arrow[d, "\lambda_* \times l_*"] \\ T_{\pi(p)}\left(P_{SO(n)} \times P_{S^1}\right) \arrow[r, "\omega \times A"'] & \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$p \in P_{Spin^c(n)}$ ve $v \in T_pP_{Spin^c(n)}$ için

$$Z^A(v) = (\lambda_* \times l_*)^{-1} \circ (\omega \times A) \circ d\pi(v).$$

Z^A konneksiyon 1-formu yardımıyla $S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ spinor demedi üzerindeki ∇^A kovaryant türev operatörü $\forall\Psi \in \Gamma(S),\ X \in \chi(M)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla_X^A\Psi = d\Psi(X) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}(X)e_i.e_j.\Psi + \frac{1}{2}A(X)\Psi.$$

Bazı kaynaklarda $\frac{1}{2}A$ yerine A alarak formül ifade edilir [1].

4. DİRAC OPERATÖRÜ D_A

$\kappa: \mathbb{R}^n \longrightarrow End(\Delta_n)$ lineer dönüşümü $\mu_0: \mathbb{R}^n \times \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ bilineer dönüşümü belirler. μ_0 dönüşümü bilineer olduğundan bu dönüşüm tensor çarpımının evrensellik özelliğinden $\mu_0: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ şeklinde lineer dönüşüme genişler. Bu dönüşüm de

$$\begin{aligned} \mu: TM\otimes S &\longrightarrow S \\ ([p,v],[p,\Psi]) &\longmapsto [p,\mu_0(v\otimes\Psi)] \end{aligned}$$

Şeklinde demed dönüşümü belirler.

(M,g) Riemann manifold üzerindeki Dirac operatörü aşağıdaki gibi

$$D_A = \mu \circ \nabla^A: \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla^A} \Gamma(T^*M\otimes S) \cong \Gamma(TM\otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma(S)$$

bileşke işlemi ile tanımlanır. Burada T^*M ve TM arasındaki geçiş g metriği ile yapılır.

M manifoldu üzerinde $U \subset M$ açık alt kümesi olmak üzere, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$yerel ortonormal çatı verildiğinde Dirac operatörünün lokal ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$D_A\Psi = \sum_{i=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i}^A\Psi.$$

Dirac operatörü, M manifoldunun boyutunun çift olması durumunda

$$D_A = D_A^+ \oplus D_A^-$$

şeklinde dekompoze olur.

Özel olarak, $M = \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ manifoldu üzerinde tanımlanan

$$ds^2 = \frac{1}{(x_n)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2)$$

$(\mathbb{H}^n, ds^2)$ Hiperbolik uzayı tek kart ile verilebildiği için tanjant demedi aşikardır. Dolayısıyla Hiperbolik uzayın yapı grubu $SO(n)$' in $G = \{Id\}$ aşikar alt grubudur. Bu yüzden $\mathbb{H}^n$ Hiperbolik uzayı $Spin^c$ −yapısına sahiptir. $Spin^c$ −yapısına sahip Hiperbolik uzayı üzerinde de yukarıda tanımlan tüm yapılar inşa edilebilir. Biz bu çalışmada öncelikle 4-boyutlu Hiperbolik uzay üzerinde klasik Seiberg−Witten denklemleri yazacağız. Daha sonra [1,2,6,9] de verilen yöntem kullanılarak $8-$ boyutlu Hiperbolik uzay üzerinde genelleştirilmiş Seiberg-Witten denklemlerini ifade edeceğiz.

5. $\mathbb{H}^4$ ÜZERINDE SEIBERG-WITTEN DENKLEMLERİ

Hatırlanacağı üzere, n −boyutlu yönlendirilmiş bir M Rieamann manifoldu üzerinde dV, g metriği ile indirgenmiş hacim formu olmak üzere Hodge * operatörü

$$\begin{array}{rcl} *: \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^{n-k}(M) \\ F & \longmapsto & *(F) \end{array}$$

$F \wedge *(F) = < F, F >_g dV$ şeklinde verilen eşitlikle tanımlanmaktadır.
$n = 4$ ve $k = 2$ olması durumunda

$$\begin{array}{rcl} *: \Omega^2(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M) \\ F & \longmapsto & *(F) \end{array}$$

şeklinde ve $*^2 = Id$ olup özdeğerleri ± 1 olur. Bunun sonucu olarak 2 −formların uzayı

$$\Omega^2(M) = \Omega^{2,+}(M) \oplus \Omega^{2,-}(M)$$

şeklinde dekompoze olur, burada $\Omega^{2,+}(M) = \{F \in \Omega^2(M) | *F = F\}$ ve $\Omega^{2,-}(M) = \{F \in \Omega^2(M) | *F = -F\}$ dir. $\Omega^{2,+}(M)$ ya self-dual $2-$ formların uzayı, $\Omega^{2,-}(M)$ ya da anti self-dual $2-$ formların uzayı denir. Buna göre herhangi bir $F \in \Omega^2(M) = \Omega^{2,+}(M) \oplus \Omega^{2,-}(M)$ 2-formunu

$$F = F^+ + F^-$$

şeklinde ayrıştırabiliriz. F^+ ya F nin self-dual kısmı F^- yede F nin anti−self dual kısmı denir.
$U \subseteq M$ açığı üzerinde $\{e_1, \dots, e_4\}$ lokal orthonormal çatısı verildiğinde

$$\begin{aligned} f_1 &= e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \\ f_2 &= e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 \\ f_3 &= e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 \end{aligned}$$

2 −formları $\Omega^{2,+}(M)$ nin bir çatısı olur.

Bu dekompozisyon $i\mathbb{R}$ −değerli $2-$ formlar içinde

$$\Omega^2(M, i\mathbb{R}) = \Omega^{2,+}(M, i\mathbb{R}) \oplus \Omega^{2,-}(M, i\mathbb{R})$$

şeklinde olur. Benzer şekilde

$$F_A \in \Omega^2(M, i\mathbb{R}) = \Omega^{2,+}(M, i\mathbb{R}) \oplus \Omega^{2,-}(M, i\mathbb{R})$$

ayrışımında F_A nın $\Omega^{2,+}(M, i\mathbb{R})$ ye giren kısmı, F_A nın self-dual kısmı olarak adlandırılır ve F_A^+ ile gösterilir.

Seiberg-Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemi M manifoldu üzerindeki P_{S^1} demedi üzerindeki bir $i\mathbb{R}$ değerli A konneksiyon 1−formuna karşılık gelen F_A eğrilik 2-formunun self-dual kısmı ile bir spinor alanını eşler. Her bir $\Psi \in \Gamma(S)$ için $\Gamma(S)$ üzerindeki hermityen iç çarpımı yardımıyla

$$\begin{aligned} \Psi\Psi^*: \Gamma(S) &\longrightarrow \Gamma(S) \\ \tau &\longmapsto \Psi\Psi^*(\tau) = <\Psi, \tau> \Psi \end{aligned}$$

endomorfizmi tanımlanır. Bu dönüşümün ortonormal bir çatıya göre ifadesi de aşağıdaki gibidir: Bir Ψ spinoru $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}$ için $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$ şeklinde yazılabiliriz. Buna göre $\Psi^* = [\overline{\psi_1} \ \overline{\psi_2}]_{1\times 2}$ olur. O halde

$$\Psi\Psi^* = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} [\overline{\psi_1} \ \overline{\psi_2}] = \begin{bmatrix} |\psi_1|^2 & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_1} & |\psi_2|^2 \end{bmatrix}$$

dir. $\Psi\Psi^*$ dönüşümünün izsiz kısmı $(\Psi\Psi^*)_0$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned} (\Psi\Psi^*)_0 &= \Psi\Psi^* - \frac{1}{2} trace\,(\Psi\Psi^*)\mathbb{I}_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{2} & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_1} & \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir.

Yukarıda elde edilenlerle birlikte 4 −boyutlu M manifoldları üzerinde Seiberg−Witten denklemleri $\Psi \in \Gamma(S)$ ve P_{S^1} demedi üzerindeki $i\,\mathbb{R}$ değerli A konneksiyon 1−formu için

1. $D_A^+ \Psi = 0$
2. $\rho^+(F_A^+) = (\Psi\Psi^*)_0$

şeklinde ifade edilir [2,3,5,7]. Bu denklemlerin ilkine Dirac denklemi, ikincisine ise eğrilik denklemi denir. Literatürde çok iyi bilinen klasik Seiberg−Witten denklemleri [3,4,7,10] çalışılmıştır. Ayrıca $\mathbb{R}^4$ üzerinde standart metrik alınarak bu denklemlerin açık ifadeleri üzerinde de çalışılmıştır [salamon ve naberin 2.kitabı interaction].

6. 4 −BOYUTLU HİPERBOLİK UZAY ÜZERİNDE SEIBERG-WITTEN DENKLEMLERİ

Bu bölümde $M = \mathbb{H}^4 = \{(x_1, \dots, x_4) | x_4 > 0\} \subset \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde tanımlanan

$$ds^2 = \frac{1}{(x_4)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2)$$

Metriği göz önüne alınacaktır. $(\mathbb{H}^4, ds^2)$ çiftine Hiperbolik uzay denir. Amacımız $\mathbb{H}^4$ üzerinde ki ds^2 Hiperbolik metriğini kullanılarak Seiberg−Witten denklemlerini elde etmektir.

4 −boyutlu Riemannian manifoldları için kompleks 4 −spinorların vektör uzayı da 4 −boyutludur ve $\Delta_4 = \mathbb{C}^4$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_4 \cong End(\Delta_4)$ olduğundan $\mathbb{C}l_4$ kompleks Clifford cebrinin spin temsili κ aşağıdaki şekilde verilir.

$\kappa: \mathbb{C}l_4 \longrightarrow End(\Delta_4)$,

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -(\gamma_1)^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -(\gamma_2)^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad \kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -(\gamma_3)^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Burada $\mathbb{I}$, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ lik birim matris ve $i = 1,2,3$ için γ_i matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$\kappa_4: \mathbb{C}l_4 \longrightarrow End(\Delta_4)$ spinor temsili yardımıyla

$$\Delta_4^+ = \{(\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in \mathbb{C}^4 | \psi_3 = \psi_4 = 0)\} \cong \mathbb{C}^2$$

$$\Delta_4^- = \{(\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in \mathbb{C}^4 | \psi_1 = \psi_2 = 0)\} \cong \mathbb{C}^2$$

olmak üzere

$$\Delta_4 = \Delta_4^+ \oplus \Delta_4^-$$

dekomposizyonu elde edilir.

Böylece $\Psi \in \Gamma(\Delta_4^+)$ ve $A \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ konneksiyon 1 −formu için D_A^+ Dirac operatörü

$$\begin{array}{cccc} D_A^+: \Gamma(\Delta_4^+) & \longrightarrow & \Gamma(\Delta_4^-) \\ \Psi & \mapsto & D_A^+(\Psi) = \sum_{i=1}^4 e_i . \nabla_{e_i}^A \Psi \end{array}$$

olur. Lokal koordinatlarda A konneksiyon 1 −formu $A_i: \mathbb{H}^4 \longrightarrow i\mathbb{R}$ fonksiyonları düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{H}^4, i\mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir.

O halde A nın eğriliği F_A, $F_{ij} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leq i < j \leq 4$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2(\mathbb{H}^4, i\mathbb{R})$$

ifade edilir.

Hiperbolik uzay üzerindeki spinorlların kovaryant türevini hesaplamakta kullanılan ∇^A spinor konneksiyonunu, $\mathbb{R}^4$ Öklidyen durumundakinden oldukça farklıdır. Çünkü Öklid metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonun $\omega = (\omega_{ij})$konneksiyon 1 −formun tüm girdileri sıfır olmasına karşın Hiperbolik metriğe karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonun $\omega = (\omega_{ij})$konneksiyon 1 −formu sıfır değildir. Hiperbolik uzay üzerindeki $\Psi \in \Gamma(\Delta_4^+)$ spinorunun $\nabla^A \Psi$ kovaryant türevi

$$\nabla^A\Psi = \mathrm{d}\Psi + \frac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}\omega_{ij}e_i.e_j.\Psi + \frac{1}{2}A\Psi$$

Şeklindedir, buradaki ω_{ij} $1-$formları $\mathrm{g} = \mathrm{ds}^2$ Hiperbolik metriğine göre hesaplanır. Aşağıda $n-$boyutlu $\mathbb{H}^n$ uzayı üzerinde ds^2 ye karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonunun $\boldsymbol{\omega}$ konneksiyon $1-$formunun ω_{ij} girdileri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarda [8] da verilen yöntem esas alınmıştır. Hesaplamaları genel çerçevede tutma bakımından öncelikle $n-$boyutlu M Riemannian manifoldunu ele alalım. $\{\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_\mathrm{n}\}$ ve $\{\Theta^1, \dots, \Theta^n\}$ sırasıyla TM ve TM^* ın lokal orthonormal çatıları olsun. O halde ∇, M^n manifoldunu üzerindeki $Levi-Civita$ konneksiyonu olmak üzere ω_{ij} koneksiyon $1-$formu aşağıdaki gibi elde edilir : $\forall X \in X(M)$ için

$$\omega_{ij}(X) = \Theta^i(\nabla_X E_j)$$

Dahası

$$\nabla_X E_j = \sum_{m=1}^{n} \omega_{mj}(X)\, E_m$$

dir. Yukarıdaki eşitlik

$$d\Theta^i = -\textstyle\sum_{m=1}^{n} \omega_{im} \wedge \Theta^m$$

şeklinde de ifade edilebilir. Eğer $\omega = [\omega_{ij}]$ konneksiyon $1-$formu matris olarak düşünülürse

$$d\Theta = -\,\omega \wedge \Theta$$

dir [6].

Dikkat edilirse $\mathbb{R}^4$ üzerindeki standart metriğe bağlı olarak $\boldsymbol{\omega_{ij}}$ konneksiyon $\mathbf{1}-$formu sıfır olduğundan spinor kovaryant türevi

$$\nabla^{\mathrm{A}}\Psi = \mathrm{d}\Psi + \frac{1}{2}\mathrm{A}\Psi$$

şeklinde olur.

$$\mathbb{H}^4 = \{(x_1, \dots, x_4) | x_4 > 0\},$$

$$ds^2 = \frac{1}{(x_4)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2)$$

olmak üzere $(\mathbb{H}^4, ds^2)$ bir Riemannian manifoldudur. Bu şekilde tanımlanan Riemannian manifolduna Hiperbolik uzay denir. $\mathbb{H}^4$ uzayı tek bir kart ile verilebildiği için tanjant demedi aşikardır. Dolayısıyla Hiperbolik uzayın yapı grubu $SO(4)$' ün $G = \{Id\}$ aşikar alt grubudur. Dolayısıyla $\mathbb{H}^4$ Hiperbolik uzayı $Spin^c-$yapısına sahiptir. Riemannian metriğine karşılık gelen

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisler yardımıyla $\mathbb{H}^4$ üzerinde Spinor demedi inşa edilebilir ve inşa edilen bu Spinor demedi üzerinde $Seiberg - Witten$ denklemleri yazılabilir.

$\mathbb{H}^4$ üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerini yazmak için konneksiyon $\mathbf{1}-$formunun hesaplanması gerekir.

$\mathbb{H}^4 = \{(x_1, \ldots, x_4) | x_4 > 0\} \subset \mathbb{R}^4$ için

$$ds^2 = \frac{1}{(x_4)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2)$$

olmak üzere hiperbolik metriğe karşılık gelen matrisler $g = [g_{ij}] = [g(\partial_i, \partial_j)]$ ve $g^{-1} = [g^{ij}] = [(g_{ij})^{-1}]$ sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_4^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_4^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{bmatrix} \qquad g^{-1} = \begin{bmatrix} x_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{bmatrix}$$

g_{ij} ve g^{ij} matrisler, $g_{ij} = \frac{1}{x_4^2}\delta_{ij}$ ve $g^{ij} = x_4^2\delta_{ij}$ şeklinde ifade edilebilir. γ_{ij} ve γ^{ij} sırasıyla g_{ij} ve g^{ij} nin karekökü olmak üzere, $\gamma_{ij} = \frac{1}{x_4}\delta_{ij}$ ve $\gamma^{ij} = x_4\delta_{ij}$ olur. O halde $\Theta^i = \sum_{i=1}^{4}\gamma_{ij}dx^i$ ler Gram-Schmid ortonormalleştirme yöntemi ile elde edilen koframeler olur (detaylar için bakınız [6]).

Konneksiyon 1-formun tanımından

$$d\Theta = \frac{1}{(x_4)^2}(dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^4)$$

ve

$$\omega = \frac{1}{x_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -dx^1 \\ 0 & 0 & 0 & -dx^2 \\ 0 & 0 & 0 & -dx^3 \\ dx^1 & dx^2 & dx^3 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

${D_A}^+\Psi = 0$ Dirac denkleminin açık ifadesi $\mathbb{H}^4$ üzerinde Hiperbolik metriğe bağlı olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}x_4 + A_1\psi_1 x_4 = i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + A_2\psi_1\right)x_4 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}x_4 + A_3\psi_2 x_4 \\ +i\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} + A_4\psi_2\right)x_4 + 3i\psi_2 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}x_4 + A_1\psi_2 x_4 = -i\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + A_2\psi_2\right)x_4 - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}x_4 - A_3\psi_1 x_4 \\ +i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_4} + A_4\psi_1\right)x_4 - 3i\psi_1 \end{aligned}$$

Seiberg−Witten denklemlerinin ikinci denklemi olan eğrilik denklemi $\rho^+(F_A^+) = (\Psi\Psi^*)_0$

$$F_{12} + F_{34} = -\frac{i}{2x_4^2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2),$$

$$F_{13} - F_{24} = \frac{1}{2x_4^2}(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1}),$$
$$F_{14} + F_{23} = -\frac{i}{2x_4^2}(\psi_1\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_1}).$$

şeklinde elde edilir.

7. $\mathbb{H}^8$ ÜZERİNDE SEIBERG-WITTEN DENKLEMLERİ

Seiberg−Witten denklemlerinin ilki olan $D_A\Psi = 0$ Dirac denkleminin herhangi boyuttaki herhangi bir $Spin^c$ yapısı için anlamlı olmasına karşın, bu denklemlerden ikincisini ifade etmekte kullanılan Hodge anlamında kendine dualliğin yüksek boyutta doğal bir genellemesi yoktur. Biz bu çalışmada $Spin(7)$ yapısına sahip M manifoldu üzerinde ϕ temel 4 −formu yardımı ile 2−formların uzayının $\Omega^2(M) = \Omega^2_7(M) \oplus \Omega^2_{21}(M)$ 'nin

$$\Omega^2_7(M) = \{\omega \in \Omega^2(M) | *(\Phi \wedge \omega) = 3\omega\}$$
$$\Omega^{2,}_{21}(M) = \{\omega \in \Omega^2(M) | *(\Phi \wedge \omega) = -\omega\}$$

şeklindeki ayrışımından $\Omega^2_7(M)$ yi 2−formların self−dual uzayı olarak göz önüne alacağız (Bkz. [1,]). $U \subseteq M$ açığı üzerinde $\{e_1, \dots, e_8\}$ lokal orthonormal çatısı verildiğinde

$$f_1 = e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^7 + e^4 \wedge e^8$$
$$f_2 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 - e^5 \wedge e^6 - e^7 \wedge e^8$$
$$f_3 = e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^8 + e^4 \wedge e^7$$
$$f_4 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 - e^5 \wedge e^7 + e^6 \wedge e^8$$
$$f_5 = e^1 \wedge e^7 + e^2 \wedge e^8 - e^3 \wedge e^5 - e^4 \wedge e^6$$
$$f_6 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 - e^5 \wedge e^8 - e^6 \wedge e^7$$
$$f_7 = e^1 \wedge e^8 - e^2 \wedge e^7 - e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5$$

2 −formları $\Omega^{2,+}(M)$ nin bir çatısı olur.

Dahası bu şekilde verilen dekomposizyon aşağıdaki gibi $i\mathbb{R}$ değerli 2 −formların dekomposizyonu şeklinde de ifade edilebilir:

$$\Omega^2_7(M, i\mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^2(M, i\mathbb{R}) | *(\Phi \wedge \omega) = 3\omega\}$$
$$\Omega^2_{21}(M, i\mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^2(M, i\mathbb{R}) | *(\Phi \wedge \omega) = -\omega\}$$

F_A nın $\Omega^2_7(M, i\mathbb{R})$ ye düşen parçasına F_A nın self−dual kısmı denir ve F_A^+ ile gösterilir. Burada

$$F_A^+ = Proj_{\Omega^2_7(M, i\mathbb{R})} F_A$$

dır. Şimdi daha önce tanımlanan

$$\rho^+ : \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow End(S^+)$$

dönüşümü yardımı ile $\rho^+(\Omega^2_7(M, i\mathbb{R})) = W'$ alt demedini alalım. Ayrıca $\Psi\Psi^*$ ın W'üstüne dik izdüşümü $(\Psi\Psi^*)^+ = Proj_{W'}\Psi\Psi^*$ olsun. Buna göre 8 −boyutlu (M, g, ϕ) $Spin(7)$ −yapısına sahip M manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri

1. $D_A^+\Psi = 0$
2. $\rho^+(F_A^+) = (\Psi\Psi^*)^+$

şeklinde ifade edilmiştir [1]. [1] de ele alınan çalışmada özel olarak $M = \mathbb{R}^8$ durumunda standart metric alınarak Seiberg−Witten denklemlerinin açık ifadeleri verilmiştir. Bu çalışmada [1] de verilen yöntemle $M = \mathbb{H}^8 = \{(x_1, \dots, x_8) | x_8 > 0\} \subset \mathbb{R}^8$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$ds^2 = \frac{1}{(x_8)^2}\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \cdots + (dx^8)^2\right)$$

Hiperbolik metrik için Seiberg−Witten denklemleri elde edilecektir.

$\mathbb{H}^8$ uzayı tek bir kartla ifade edilebildiği için yapı grubu $G = \{Id\} \subseteq Spin(7) \subseteq SO(8)$ olduğundan $Spin(7)$ yapısına sahiptir. Bu sebeble$\mathbb{H}^8$ manifoldu hem $Spin^c$ −yapısına sahiptir, hemde 2 −formların uzayı $\Omega^2(\mathbb{H}^8) = \Omega^2_7(\mathbb{H}^8) \oplus \Omega^2_{21}(\mathbb{H}^8)$ şeklinde dekompoze olur. Bu durum $\mathbb{H}^8$ üzerinde Dirac ve eğrilik denklemlerini yazmamızı mümkün kılar.

8 −boyutlu uzaylarda kompleks spinorların vektör uzayı 16 −boyutludur ve $\Delta_8 = \mathbb{C}^{16}$ ile gösterilir. Hesaplamalarımızda $\mathbb{C}l_8$ kompleks Clifford cebirinin [6] da verilen aşağıdaki spinor temsilini kullanacağız:

$$\kappa : \mathbb{C}l_8 \longrightarrow End(\Delta_8)$$

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4 \\ -\gamma_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_7) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_6 \\ -\gamma_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_8) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_7 \\ -\gamma_7 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\mathbb{I}$, 8×8 lik birim matristir ve $i = 1, \dots 7$ için γ_i matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \gamma_6 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_7 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

γ_i matrisleri , $\mathbb{C}l_7 \cong End(\Delta_8) \oplus End(\Delta_8)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_7$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm altındaki görüntüleridir.

$\mathbb{R}^8$ üzerinde standart metriğe bağlı olarak $\omega_{ij} = g(\nabla e_i, e_j)$ konneksiyon 1 −formu sıfır olduğundan $\nabla^A \Psi = \mathrm{d}\Psi + \frac{1}{2} A\Psi$ olur. Fakat $\mathbb{H}^8$ üzerinde durum böyle değildir. $\mathbb{H}^8$ üzerinde konneksiyon 1 −formu sıfırdan farklıdır.

$\mathbb{H}^8 = \{(x_1, \dots, x_8) | x_8 > 0\} \subset \mathbb{R}^8$ Hiperboklik uzayı üzerinde verilen

$$ds^2 = \frac{1}{(x_8)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \cdots + (dx^8)^2)$$

Hiperbolik metrik ile ω_{ij} konneksiyon 1 −formu 4 −boyutta kullanılan metodla aşağıdaki gibi elde edilir [6]:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^1}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^2}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^3}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^4}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^5}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^6}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^7}{x_8} \\ \frac{dx^1}{x_8} & \frac{dx^2}{x_8} & \frac{dx^3}{x_8} & \frac{dx^4}{x_8} & \frac{dx^5}{x_8} & \frac{dx^6}{x_8} & \frac{dx^7}{x_8} & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm bu elde edilenlerle birlikte [6] da ele alınan $Spin^c$ −yapısı aşağıdaki Dirac denkleminde yerine yazılırsa

$$D_A^+ \Psi = \sum_{i=1}^{8} e_i . \nabla_{e_i}^A \Psi = d\Psi(e_i) + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij}(e_i) e_{.i}\, e_j . \Psi + A(e_i)\, \Psi$$

elde edilir. $\mathbb{H}^8$ üzerinde Hiperbolik metriğe bağlı olarak elde edilen Dirac denkleminin açık ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_5} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_7} + \frac{\partial \psi_5}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_6}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_7}{\partial x_6} + \frac{\partial \psi_8}{\partial x_8} \right) x_8 \\ +(-A_1\psi_1 + A_2\psi_5 + A_3\psi_2 + A_4\psi_6 + A_5\psi_3 + A_6\psi_7 + A_7\psi_4 + A_8\psi_8) x_8 + 5\psi_8 = 0$$

$$\left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_7} - \frac{\partial \psi_4}{\partial x_5} - \frac{\partial \psi_5}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_6}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_8}{\partial x_6} - \frac{\partial \psi_7}{\partial x_8} \right) x_8 \\ +(-A_1\psi_2 + A_2\psi_6 - A_3\psi_1 - A_4\psi_5 - A_5\psi_4 + A_6\psi_8 + A_7\psi_3 - A_8\psi_7) x_8 - 5\psi_7 = 0$$

$$\left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_5} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_7} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_5}{\partial x_6} + \frac{\partial \psi_7}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_8}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_6}{\partial x_8} \right) x_8 \\ +(-A_1\psi_3 + A_2\psi_7 + A_3\psi_4 - A_4\psi_8 - A_5\psi_1 - A_6\psi_5 - A_7\psi_2 + A_8\psi_6) x_8 + 5\psi_6 = 0$$

$$\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_7}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_5}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_4}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_6}{\partial x_6}+\frac{\partial\psi_7}{\partial x_4}+\frac{\partial\psi_8}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_5}{\partial x_8}\right)x_8 \\ +(-A_1\psi_4+A_2\psi_8-A_3\psi_3+A_4\psi_7+A_5\psi_2-A_6\psi_6-A_7\psi_1-A_8\psi_5)x_8-5\psi_5=0$$

$$\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_4}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_6}-\frac{\partial\psi_5}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_6}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_7}{\partial x_5}-\frac{\partial\psi_8}{\partial x_7}+\frac{\partial\psi_4}{\partial x_8}\right)x_8 \\ +(-A_1\psi_5-A_2\psi_1-A_3\psi_6+A_4\psi_2-A_5\psi_7+A_6\psi_3-A_7\psi_8+A_8\psi_4)x_8+5\psi_4=0$$

$$\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_4}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_4}{\partial x_6}+\frac{\partial\psi_5}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_6}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_7}{\partial x_7}+\frac{\partial\psi_8}{\partial x_5}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_8}\right)x_8 \\ +(-A_1\psi_6-A_2\psi_2+A_3\psi_5-A_4\psi_1+A_5\psi_8+A_6\psi_4-A_7\psi_7-A_8\psi_3)x_8-5\psi_3=0$$

$$\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_6}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_4}{\partial x_4}+\frac{\partial\psi_5}{\partial x_5}+\frac{\partial\psi_6}{\partial x_7}-\frac{\partial\psi_7}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_8}{\partial x_3}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_8}\right)x_8 \\ +(-A_1\psi_7-A_2\psi_3-A_3\psi_8-A_4\psi_4+A_5\psi_5-A_6\psi_1+A_7\psi_6+A_8\psi_2)x_8+5\psi_2=0$$

$$\left(-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_6}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_4}-\frac{\partial\psi_4}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_5}{\partial x_7}-\frac{\partial\psi_6}{\partial x_5}+\frac{\partial\psi_7}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_8}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_8}\right)x_8 \\ +(-A_1\psi_8-A_2\psi_4+A_3\psi_7+A_4\psi_3-A_5\psi_6-A_6\psi_2+A_7\psi_5-A_8\psi_1)x_8-5\psi_1=0$$

Eğrilik denklemi ise $F_A^+ = Proj_{\Omega^2(\mathbb{H}^8,i\mathbb{R})}F_A = \sum_{i=1}^{7}\frac{<f_i,F_A>}{<f_i,f_i>}f_i$ olmak üzere

$$F_{15}+F_{26}+F_{37}+F_{48}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}-\psi_5\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_5}-\psi_6\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_6})$$
$$F_{12}+F_{34}-F_{56}-F_{78}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_4})$$
$$F_{16}-F_{25}-F_{38}+F_{47}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_4})$$
$$F_{13}-F_{24}-F_{57}+F_{68}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_5\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_5}-\psi_7\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_7})$$
$$F_{17}+F_{28}-F_{35}-F_{46}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}-\psi_5\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_5}+\psi_6\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_6})$$
$$F_{14}+F_{23}-F_{58}-F_{67}=\frac{1}{4x^8}(\psi_6\overline{\psi_1}-\psi_1\overline{\psi_6}-\psi_2\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_4})$$
$$F_{18}-F_{27}-F_{36}-F_{45}=\frac{1}{4x^8}(\psi_1\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_3}-\psi_4\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_4})$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR

[1] Bilge AH, Dereli T, Koçak Ş. Monopole equations on 8-manifolds with $Spin(7)$ holonomy, Commun Math Phys 1999; 203(1): 21–30.

[2] Tian G. Gauge theory and calibrated geometry I, Annals of Math 2000; 151(1):193-268.

[3] Salamon D. Spin geometry and Seiberg−Witten invariants, Preprint.

[4] Witten E. Monopoles and four manifolds, Math Res Lett 1994; 1:769-796.

[5] Naber GL. Topology, Geometry, and Gauge Fields, Foundations, Springer−Verlag, New York, Berlin, 1997.

[6] Değirmenci N, Özdemir N. Seiberg−Witten like equations on 8-manifolds with structure group $Spin(7)$, Journal of Dynamical System and Geometric Theories 2009; 7(1): 21-39.

[7] Donaldson,SK, Kronheimer PB. The geometry of four-manifolds, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1990.

[8] Sternberg S. Curvature in Mathematics and Physics, Dover Publications, New York, 2012.

[9] Karapazar Ş. Seiberg−Witten equations on 8-dimensional $SU(4)$ −structure, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 2013; 10(3): 1220032.

[10] Friedrich T. Dirac operators in Riemannian geometry, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhlode Island, 25, 2000.