G.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi, 2/2000, 1-20

Çok Değişkenli Tek Faktör Varyans Analizi ve Bir Uygulama

Aydın ÜNSAL*

In this study, we investigate multivariate analysis of variance and an example is given.

Giriş

Bu araştırmada Çok Degişkenli Tek Faktor Varyans Analizi (MANOVA) Modeli inclendi ve her biri iki değişken içeren iki yığına ilişkin 15 gözlem değeri ile iki yığın ortalama vektörüleri karşılaştırılarak çok değişkenli tek faktör varyans analizine bir örnek verildi.

1. ÇOK DEĞİŞKENLİ TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZİ (MANOVA)

Varyans Analizi (ANOVA), tek bir bağımlı değişken olduğunda, bu bağımlı değişkendeki değişkenliği faktör seviyeleri aracılığıyla açıklamaya çalışır. Eğer bağımlı değişken sayısı birden fazla ise çok değişkenli varyans analizi (Multivariate Analysis of Variance) MANOVA modeli ile bağımlı değişkenlerdeki değişkenlik açıklanır.

Bu nedenle, bu bölümde önce tek faktör varyans analizi modelinin bir özeti yapılıp, ANOVA ile MANOVA arasındaki ilişki kurulduktan sonra çalışmamız için gerekli olan tek faktör MANOVA modelinin çözümlemesi yapılıp bir örnek verileçektir.

1.1 TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZİ (ANOVA)

Ortalamaları sırasıyla μ_1, μ_2 ,....., μ_p ve varyansları σ^2 olan normal dağılıma sahip P yığından, birbirlerinden bağımsız ve rassal olarak elde edilen Yij gözlem değerlerini dikkate alalım. P yığın bir faktörün düzeyleri olarak ele alındığfında j. faktör düzeyinde (j = 1, 2 ,..., p) yapılan i. gözlem değerini (i = 1, 2 ,.., n_j) Y_{ij} ile

---

* Doç. Dr., G.Ü. İ.İ.B.F., Ekonometri Bölümü Öğretim Üyesi.

göstermek olanaklıdır. Bu anlamda, y_{ij} gözlem değeri aşağıdaki doğrusal modelle tanımlanabilir. *(Jeremy, 1974, s : 207)*

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \qquad (1.1)$$

Burada;

y_{ij} : j. faktörde yapılan i. gözlem değerini, (j = 1, 2 ,..., p; i = 1, 2 ,..., n_j)

μ : Genel ortalamayı,

a_j : j. faktör düzeyinin etkisi,

e_{ij} : j. faktörde yapılan i. gözlem değerindeki hata miktarını ifade eder.

Hata terimi e_{ij}'ler ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip rassal değişkenlerdir.

(1.1) nolu modelde yer alan, p faktör düzeyinin bağımlı değişken Y_{ij}'ye etkilerinin birbirlerinden farklı olup olmadıkları, " faktör düzeyi etkileri arasında fark yoktur. " anlamındaki aşağıdaki H_0 hipotezinin testi ile anlaşılır.

$$Ho: \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p \qquad (1.2)$$

H_0 boş hipotezine karşın araştırma hipotezi H_A ,

H_A : en az iki faktör düzeyinin etkisi birbirinden farklıdır

şeklinde kurulur.(1.1) modeline alternatif olarak aşağıdaki modeli kurmak olanaklıdır.

$$y_{ij} = \mu j + e_{ij} \qquad (1.3)$$

Eğer model (1.3)'de olduğu gibi kurulmuş ise parametrelerin anlamı da doğal olarak değişir. Bu nedenle, μ_j. j. faktör düzeyinin etkisi ile birlikte genel ortalamayı içerir. Modelin (1.3)'de olduğu gibi kurulması nedeniyle (1.2)'deki boş hipotezide aşağıdaki gibi oluşturma gereği ortaya çıkar.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_p \qquad (1.4)$$

H_A : En az iki ortalama arasında fark vardır.

Şimdi de (1.1) ve (1.3) modellerine ilişkin matris notasyonunu geliştirelim. j. faktör düzeyinde yapılan gözlem sayısının n_j olduğunu daha önce belirtmiştik. Toplam gözlem sayısı n, faktör düzeylerinde (j = 1 ,..., p) yapılan gözlem sayılarının toplamına eşittir. Yani,

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ dir.

O halde, gözlem, hata terimleri ve parametre vektörlerinin devriklerini sırasıyla aşağıda olduğu gibi göstermek olanaklıdır.

$$y' = [y_{11}, y_{21},\dots,y n_1, 1, y_{21}, y_{22},\dots,y n_2 2,\dots\dots, y_1 p, y_2 p,\dots,y n_p p],$$
$$e' = [e_{11}, e_{21},\dots,e n_1, 1, e_{21}, e_{22},\dots,e n_2 2,\dots\dots, e_1 p, e_2 p,\dots,e n_p p], \qquad (1.5)$$

$$\mu' = [\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_p] \qquad (1.6)$$

(1.5) ve (1.6)'daki eşitliklerden yararlanılarak (1.1)'deki tek faktör varyans analizi modeline ilişkin tasarım matrisi X aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$X = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 0 & .. & 0 \\
1 & 1 & & 0 & .. & 0 \\
1 & . & & . & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & 1 & & 0 & & . \\
. & 0 & & 1 & & . \\
. & 0 & & 1 & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & 1 & & . \\
. & . & & 0 & & 1 \\
. & . & & . & & 1 \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & . & & . \\
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}$$

X matrisinin 1. sütunu (1.1)'deki modelde μ olması nedeniyle 1'lerden, j. sütunu ise j. faktör seviyesinde n_j gözlem yapılmış olması nedeniyle $n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$'ci satırına kadar sıfırlardan, bundan sonra gelen n_j satırda 1'lerden ve geri kalan satırlarda tekrar sıfırlardan oluşur. p faktör seviyesinde toplam n - gözlem yapılmış olması nedeniyle de, X - tasarım matrisi n x p boyutlu bir matristir.

(1.1) tek faktör varyans analizi modelini, (1.5) ve (1.6) eşitlikleriyle (1.7)'deki tasarım matrisi X'den yararlanarak aşağıdaki gibi matris notasyonu ile yeniden yazmak olanaklıdır. *(Jeremy,1974, s : 209)*

$$
\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n_1 1} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n_2 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1p} \\ y_{2p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n_p p} \end{bmatrix}_{NX1}
=
\begin{bmatrix} 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1 \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1. \end{bmatrix}_{NX(P+1)}
\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_p \end{bmatrix}_{(P+1)X1}
+
\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n_1 1} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n_2 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{1p} \\ e_{2p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n_p p} \end{bmatrix}_{NX1}
\quad (1.8)
$$

$$Y_{nx1} \quad = \quad X_{nxp+1} \quad \alpha_{(p+1)x1} \quad + \quad e_{nx1}$$

Eğer model (1.3)'de olduğu üzere kurulmuş ise X - tasarım matrisi (1.8)'de olduğundan farklıdır. Bu modele ilişkin tasarım matrisi aşağıdaki gibidir.

$$
X = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}
$$

(1.1) ve (1.3) tek faktör varyans analizi modellerinde parametre tahminleri en küçük kareler yöntemi ile yapılır. Parametrelerin tahmin değerleri (1.1) modeli için

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{y_{ji}}{n}$$

$$= y_{..} \qquad (1.8a)$$

$y_{..}$: (Genel ortalama)

$$\hat{\alpha}_j = y_{.j} - y_{..} \qquad (1.8b)$$

$y_{.j}$: j. faktör düzeyinin ortalamasıdır.

(1.3) modeli için parametrelerin tahmin değerleri,

$$\hat{\mu}_j = y_{.j}$$

olarak elde edilir.

(1.8a) ve (1.8b)'deki parametre tahminlerinden sonra (1.1) nolu tek faktör varyans analizi modelini aşağıdaki gibi yazmak olanaklıdır.

$$y_{ij} = y_{..} + (y_{.j} - y_{..}) + (y_{ij} - y_{.j}) \qquad (1.1.a)$$

(gözlemler) = (tüm örnek ortalaması)+(j.faktör düzeyinin etkisi)+(Hata terimi)

Burada;

$y_{..}$: Model (1.1)'deki μ'nun tahmin edicisidir.

$\hat{\alpha}_j = y_{.j} - y_{..}$: j. faktör düzeyi a_j'nin tahmin edicisidir.

$y_{ij} - y_{.j}$: e_{ij} hata teriminin tahmin edicisidir.

(1.2) ve (1.4) hipotezlerinin test edilmesi için gerekli olan F - istatistiğinin elde edilebilmesi için toplam kareler toplamı (TKT):

$$TKT = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - y_{..})^2 \qquad (1.8c)$$

gruplar arası kareler toplamı (GAKT) :

$$GAKT = \sum_{j=1}^{p} n_j (y_{.j} - y_{..})^2 \qquad (1.8d)$$

ve grup içi kareler toplamı (GİKT):

$$GİKT = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - y_{.j})^2 \qquad (1.8e)$$

olarak iki parçaya ayrılır. Daha sonra gruplar arası ortalama kare toplamı (GAOK) ve grup içi ortalama kareler toplamı (GİOK) sırasıyla (GAKT) ve (GIKT)'nin serbestlik dereceleri (p - 1) ve (n – p)'ye bölünerek elde edilir.

(1.2) veya (1.4) H_0 boş hipotezinin testi için gerekli F istatistiği gruplar arası ortalama karesinin (GAOK), grup içi ortalama karesine (GİOK) bölünerek aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\alpha\, F_{n-p}^{p-1} = \frac{GAOK}{GİOK} \qquad (1.8f)$$

Araştırmacının ilgilendiği α - anlamlılık düzeyine karşılık gelen F - tablo değeri, yukarıda hesaplanan F - hesaplanan değerden küçük ise (1.2) ve (1.4) boş hipotezleri red edilir.

Tek faktör varyans analizi modeli için bu aşamaya kadar olan adımları Tablo (1.1)'de olduğu üzere özetlemek olanaklıdır. *(Ünsal,1993, s: 48)*

TABLO : 1.1. TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZİ (ANOVA)

Kaynak	Tanımsal Formüller	Hesaplama Formülleri	S.D.	Ortalama Karelerin Beklenen Değeri	Ortalama Kareler	F
GAKT (Gruplar arası kareler toplamı)	$\sum_{i=1}^{p} n_j(y_{i.}-y_{..})^2$	$\sum_{j-1}^{p} \frac{(\Sigma y_{ij})^2}{n_{ij}} - (\frac{\Sigma\Sigma y_{ij}}{n})^2$	p-1	$\sigma^2 + \frac{n_j \Sigma \alpha_i^2}{p-1}$	$\frac{GAKT}{(p-1)}$	$\frac{GAO}{GIOK}$
GİKT (Grup içi kareler toplamı)	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij}-y_{i.})^2$	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\Sigma y_{ij})^2}{n}$	n-p	s^2	$\frac{GİKT}{(n-p)}$	
TKT (Toplam kareler toplamı)	$\sum_{j-1}^{p}\sum_{i-1}^{n_j} (y_{ij}-y_{..})^2$	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\Sigma\Sigma y_{ij})^2}{n}$	n-1	$\sigma^2 + \frac{\sum_{i-1}^{p} \alpha_i^2}{(n-1)}$	$\frac{TKT}{(n-1)}$	

H_0 boş hipotezlerinin reddinden sonra hangi faktör düzeylerinin birbirlerinden farklı olduğunun belirlenmesi için araştırmaya uygun ikili karşılaştırma yöntemi seçilerek ikili karşılaştırmalar yapılır.

(1.1) nolu tek faktör varyans analizi modeli,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}\text{'de}$$

eğer j = 2 , yani faktörün iki düzeyi varsa (1.2) ve (1.4) H_0 boş hipotezleri,

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ veya $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

şeklinde ifade edilir. Bu boş hipotezlerin testi için, (1.2) ve (1.4) boş hipotezlerinin testinde kullanılan (1.8.f)'deki F - istatistiği yerine t - istatistiği de kullanılabilir.

Buraya kadar tek faktör varyans analizi modeli incelendi. Tek faktör varyans analizi modelinde, herhangi bir faktör düzeyinde tek bir bağımlı değişken dikkate alınarak bu bağımlı değişkene ilişkin varyans çözümlemesi yapıldı. Eğer aynı faktör düzeyinde birden fazla bağımlı değişkene ilişkin gözlem yapılmış ve bu bağımlı değişkenlerdeki değişimin kaynağı araştırılacak ise tek faktör çok değişkenli varyans analizi (MANOVA) modeline gereksinme vardır.

Bu bölümde, tek faktör çok değişkenli varyans analizi (MANOVA) modeli, tek faktör varyans analizi modelinde uygulanan adımlar doğrultusunda incelenip, bağımlı değişkenlerdeki değişimin kaynağı ortaya çıkarılacak.

1.2.ÇOK DEĞİŞKENLİ TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZİ (MANOVA)

Tek faktör çok değişkenli varyans analizi (MANOVA) , g - yığından (gruptan) elde edilen p - değişkene ilişkin yığın ortalama vektörlerinin birbirine eşit olup olmadığını araştırır. Eğer yığın ortalama vektörleri birbirlerinden farklı ise ortalama vektörlerin birbirlerinden istatistiksel olarak farklı olduğunu ortaya çıkarır.

g - yığında p - değişkenin herbirine ilişkin n_j gözlemin yapıldığı varsayıldığında aşağıdaki veri kümesi elde edilir.

Değişkenler	I.Yığın(Grup)	II.Yığın(Grup)	....	g.Yığın(Grup)
Bireyler	$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_p$	$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_p$	....	$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_p$
1	$y_{111}\ y_{121} \cdots y_{1p1}$	$y_{211}\ y_{221} \cdots y_{2p1}$		$y_{g11}\ y_{g21} \cdots y_{gp1}$
2	$y_{112}\ y_{122} \cdots y_{1p2}$	$y_{212}\ y_{222} \cdots y_{2p2}$		$y_{g12}\ y_{g22} \cdots y_{gp2}$
J	... ...	... ...		... ...
...	$y_{11n1}\ y_{12n2} \cdots y_{1pnp}$	$y_{21n1}\ y_{22n2} \cdots y_{2pnp}$	....	$y_{g2n1}\ y_{g2n2} \cdots y_{gpnp}$
Ortalama vektör	$\mu_{11}\ \mu_{12} \ldots \mu_{1p}$	$\mu_{21}\ \mu_{22} \ldots \mu_{2p}$	....	$\mu_{g1}\ \mu_{g2} \ldots \mu_{gp}$

Burada;

y_{ijk}: i. (i =1, 2 ,....., g) yığında j. (j = 1, 2 ,....., p) değişkene ilişkin
k. (k = 1, 2 , ..., $n_{p)}$ gözlem değerini ifade eder.

(1.9)'daki veri kümesini aşağıdaki gibi matris formunda göstermek olanaklıdır.

Değişkenler	Yığınlar / Birimler	I. yığın	II. yığın	....	g. yığın
	1	Y_{111}	y_{211}	....	y_{g11}
	2	Y_{112}	y_{212}	....	y_{g12}
α_1	.				
	.				
	n_1	y_{11n1}	y_{21n1}	....	y_{g1n1}
	1	y_{121}	y_{221}	....	y_{g21}
	2	y_{122}	y_{222}	....	y_{g22}
α_2	.				
	.				
	n_2	y_{12n2}	y_{22n2}	....	y_{g2n2}
	.				
	.				
	1	y_{1p1}	y_{2p1}	....	y_{gp1}
	2	y_{1p2}	y_{2p2}	....	y_{gp2}
α_p	.				
	.				
	n_p	y_{1pnp}	y_{2pnp}	....	y_{gpnp}

(1.10)

(1.10)'daki gözlem kümesini oluşturan y_{ijk}'ların aşağıdaki sayıltıları sağladığı varsayılır.

1) g yığının ortalama vektörleri μ_1 , μ_2 ,..., μ_g dir. Farklı yığınlarda elde edilen n_j çaplı rassal örnekler birbirlerinden bağımsızdır.
2) Tüm yığınların kovaryans matrisleri birbirlerine eşittir yani, $\Sigma_1=\Sigma_2=..=\Sigma_g$
3) Herbir yığın çoklu normal dağılıma sahiptir.

1.3 ÇOK DEĞİŞKENLİ TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZİ (MANOVA) MODELİ

g - yığın ortalama vektörünün karşılaştırılmasına ilişkin MANOVA modelini

$$y_{ijk} = \mu+\alpha_{ij} + e_{ijk} \qquad (1.11)$$

şeklinde yazmak olanaklıdır. Burada;

y_{ijk} : i.yığında j. değişkene ilişkin k.gözlem değeri (i = 1, 2 ,...., g; j =1, 2, ..., p; k = 1, 2 ,....., n_j)

α_{ij} : i. yığındaki j. değişkenin etkisini,

e_{ijk} : i. yığındaki j. değişkenin k. gözlemindeki yapılan hatayı ifade eder.

e_{ijk}'lar birbirlerinden bağımsız ve ortalamaları sıfır, kovaryans matrisi Σ olan normal dağılıma sahiptir.

Tek faktör varyans analizi modeli (1.1)'e karşılık çok değişkenli tek faktör varyans analizi modeli (1.11)'de olduğu üzere ifade edilir.

(1.8)'deki tek faktör varyans analizi modeline karşılık gelen çok değişkenli varyans analizi modelini $N = n_1 + n_2 + ... + n_p$ olmak üzere,

$$Y_{Nxg} = X_{N\,x\,(p+1)}\,\alpha_{(p+1)\,x\,g} + e_{Nxg} \qquad (1.12)$$

şeklinde matris notasyonu ile yazmak olanaklıdır. (1.12) açık formda da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} y_{111}\ y_{211}\ y_{g11} \\ y_{112}\ y_{212}\ y_{g12} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_{11n_1}\ y_{21n_1}\ y_{g1n_1} \\ y_{121}\ y_{221}\ y_{g22} \\ y_{122}\ y_{222}\ y_{g22} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_{12n_2}\ y_{22n_2}\ y_{g2n_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1p1}\ y_{2p1}\ y_{gp1} \\ y_{1p2}\ y_{2p2}\ y_{gp2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_{1pn_p}\ y_{2pn_p}\ y_{gpn_p} \end{bmatrix}_{Nxg} = \begin{bmatrix} 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ \cdot \\ 1\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1 \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1 \\ \cdot \\ 1\ 0\ 0 \ldots 1 \end{bmatrix}_{NX(P+1)} \begin{bmatrix} \mu_1\ \mu_2 \ldots \mu_g \\ \alpha_{11}\ \alpha_{21} \ldots \alpha_{g1} \\ \alpha_{12}\ \alpha_{22} \ldots \alpha_{g2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{1p}\ \alpha_{2p} \ldots \alpha_{gp} \end{bmatrix}_{(P+1)xg} + \begin{bmatrix} e_{111}\ e_{211}\ e_{g11} \\ e_{112}\ e_{212}\ e_{g12} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ e_{11n_1}\ e_{21n_1}\ e_{g1n_1} \\ e_{121}\ e_{221}\ e_{g22} \\ e_{122}\ e_{222}\ e_{g22} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ e_{12n_2}\ e_{22n_2}\ e_{g2n_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{1p1}\ e_{2p1}\ e_{gp1} \\ e_{1p2}\ e_{2p2}\ e_{gp2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ e_{1pn_p}\ e_{2pn_p}\ e_{gpn_p} \end{bmatrix}_{Nxg}$$

$$Y_{N\,x\,g} \quad = \quad X_{N\,x\,(p+1)} \quad \alpha_{(p+1)\,x\,g} \quad + \quad e_{N\,x\,g}$$

Gerek (1.12) gerekse (1.13)'deki X - tasarım matrisi (1.7)'de olduğu üzere (1.8)'deki X - tasarım matrisi ile aynıdır. *(Jeremy,1974, s : 211)*

Tek faktör varyans analizi modelinde H_0 boş hipotezi (1.2)'ye karşılık MANOVA'da H_0 hipotezi aşağıdaki gibi oluşturulur. *(Jabson,19926, s : 215)*

$$Ho=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ .\\ .\\ \alpha_{1p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{22}\\ .\\ .\\ \alpha_{2p}\end{bmatrix}=.....=\begin{bmatrix}\alpha_{g1}\\ \alpha_{g2}\\ .\\ .\\ \alpha_{gp}\end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

Burada;

α_{ij} :i. yığındaki j. değişkenin (veya j.faktör düzeyinin) etkisi olarak tanımlanır.

H_0 boş hipotezinin fiziki anlamı; i. (i = 1, 2 ,...., g) yığın ortalama vektörü ile *l*. (*l* = 1, 2 ,....., g) (i ≠ *l*) yığın ortalama vektörü arasında fark yoktur. Araştırma hipotezi de, en az iki yığın ortalama vektörü birbirinden farklıdır şeklinde kurulur. Bir başka ifade ile yığın (grup) ortalamaları birbirinden farklıdır. *(Bray, Maxwell, s: 14 -15)*

Paramatrelerin tahmin değeri olan (1.8a) ve (1.8b)'ye karşılık MANOVA'da

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_p} y_{ijk}}{N} \qquad (1.15)$$

= y...(Genel ortalama)

ve,

i. yığındaki j. değişkenin (veya faktör düzeyinin) etkisi $\hat{\alpha}_{ij}$,

$$\hat{\alpha}_{ij}=y_{ij\cdot}-y_{..} \qquad (1.16)$$

olarak elde edilir.Burada;

$Y_{ij.}$: i. yığındaki j. değişkende yapılan gözlemlerin ortalamasını ifade eder.

(1.15) ve (1.16)'daki parametre tahminlerinden yararlanarak, (1.11)'deki çok değişkenli tek faktör varyans analizi modelini aşağıda olduğu üzere yeniden yazmak olanaklıdır.

$$y_{ijk}=y_{...}+(y_{ij.}-y_{...})+(y_{ijk}-y_{ij.}) \qquad (1.17)$$

Burada;

Y_{ijk} : i.yığındaki j.değişkenin (veya faktör düzeyinin) k.gözlem değerini

$y_{...}$: Genel örnek ortalaması $\hat{\mu}$'yı

$\hat{\alpha}_{ij}=y_{ij.}-y_{...}$: i.yığındaki j.faktör düzeyinin etkisini

$y_{ijk}-y_{...}$: i.yığının j.değişkenin k.gözlem değerindeki hatayı ifade eder.

Hipotez testi :

Şimdi de, (1.14) boş hipotezinin testi için gerekli olan, tek faktör varyans analizi modeli için H_0 hipotezinin testini sağlayan (1.8f)'de verilen F istatistiğine karşılık gelen, istatistiği araştıralım.

Bu nedenle, toplam kareler toplamını ifade eden aşağıdaki matris çarpımında, gruplar arası kareler toplamına karşılık gelen B matrisi ve gruplar içi kareler toplamı (veya hata terimleri kareleri) toplamına karşılık gelen W matrisi olmak üzere ikiye ayıralım.

Tek faktör varyans analizi modelinde TKT'ını ifade eden (3.8c)'ye MANOVA'da aşağıdaki matris çarpımı karşılık gelir.

$$(y_{ijk} - y_{...})\,(y_{ijk} - y_{...})'$$

Bu matris çarpımı da

$$(y_{ijk} - y_{...})\,(y_{ijk} - y_{...})' = [(y_{ijk} - y_{ij.}) + (y_{ij.} - y_{...})][(y_{ijk} - y_{ij.}) + (y_{ij.} - y_{...})]'$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki çarpım açıldığında,

$$(y_{ijk}-y_{...})(y_{ijk}-y_{...})'-(y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})'+(y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ij.}-y_{...})'+(y_{ij.}-y_{...})(y_{ijk}-y_{ij.})+(y_{ij.}-y_{...})(y_{ij.}-y_{...})'$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafı i = 1, 2 ,..., g; j = 1, 2 ,...., p; k = 1, 2 ,...., n_p üzerinden toplanırsa,

$$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{...})(y_{ijk}-y_{...})' \sum_i^g \sum_j^p \sum_k^{n_p} (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})' + \sum_i^g \sum_j^p \sum_k^{n_p} (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ij.}-y_{...})'$$

$$+ \sum_i^g \sum_j^p \sum_k^{n_p} (y_{ij.}-y_{...})(y_{ijk}-y_{ij.})' + \sum_i^g \sum_j^p \sum_k^{n_p} (y_{ij.}-y_{...})(y_{ij.}-y_{...})'$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki 2. ve 3. terimler incelendiğinde her ikisininde sıfır matrise eşit olduğu görülür. Çünkü, k üzerinden bir toplama yapıldığında

$$\sum_{k=1}^{n_p} (y_{ijk}-y_{ij.}) = 0$$

elde edilir. Bu değer yerine konulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{...})(y_{ijk}-y_{...})' = \sum_i \sum_j n_p (y_{ij.}-y_{...})(y_{ij.}-y_{...})' + \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})'$$

$$\begin{bmatrix}\text{Toplam kareler toplamı ve çapraz} \\ \text{çarpımlar}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Gruplar arası kareler toplamı} \\ \text{ve çaprazçarpımlar}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Gruplar içi kareler toplamı} \\ \text{ve çapraz çarpımlar}\end{bmatrix}$$

$$T \quad = \quad B \quad + \quad W$$

Gruplar içi kareler ve çapraz çarpımlar,

$$W = \sum_i^g \sum_j^p \sum_k^{n_p} (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})' \tag{1.18a}$$

$$= (n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2 + \ldots\ldots + (n_p - 1)S_g$$

şeklinde yazılabilir. Burada S_g , g. yığının örnek kovaryans matrisidir. (1.18a) eşitliği g grup için (i :1, 2 ,....., p) açıldığında,

$$W = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_p} (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})' + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_p} (y_{2jk}-y_{2j.})(y_{2jk}-y_{2j.})' + \ldots + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_p} (y_{gjk}-y_{gj.})(y_{gjk}-y_{gj.})'$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki herbir terim (i :1, 2 ,....., g) için W_i ile gösterildiğinde,

$$W = W_1 + W_2 + \ldots\ldots + W_g \tag{1.18b}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

W_i : i. grubun grup içi varyansını ifade eder.

Buraya kadar olan hesaplamaları, aşağıdaki MANOVA tablosu ile özetlemek olanaklıdır.

TABLO : 1.2. ÇOK DEĞİŞKENLİ TEK FAKTÖR VARYANS ANALİZ (MANOVA)

Varyans Kaynağı	Kareler Toplamı Matrisi ve Çapraz Çarpımlar	Serbestlik Derecesi
Gruplar Arası Kareler Toplamı ve Çapraz Çarpımlar	$B = \sum_i \sum_j n_p(y_{ij.}-y_{...})(y_{ij.}-y_{...})'$	g–1
Gruplar İçi Kareler Toplamı ve Çapraz Çarpımlar	$W = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})'$	$\sum_{i=1}^{g} n_i - g$
Toplam Kareler Toplamı ve Çapraz Çarpımlar	$B + W = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{...})(y_{ijk}-y_{...})$	$\sum_{i=1}^{g} n_i - 1$

Yığın ortalama vektörlerinin karşılaştırılmasını sağlayan MANOVA tablosu, Tablo (1.2), faktör düzeyi ortalamasının karşılaştırılmasını sağlayan tek faktör varyans analizi tablosu (1.1)'e karşılık gelir. Tablo (1.1)'deki $(y_{i.} - y_{..})^2$ 'ye Tablo (1.2)'de

$$(y_{ijk} - y_{...})(y_{ijk} - y_{...})'$$

karşılık gelir.

1.4 HİPOTEZLERİN TESTLERİ

Tek faktör varyans analizi modeli için (1.2)'de oluşturulan H_0 boş hipotezinin (1.8f)'de oluşturulan F - istatistiği aracılığıyla test edileceğine değinilmişti. Tek faktör çok değişkenli varyans analizi modeli için (1.14)'de oluşturulan H_0 boş hipotezini de aşağıda tanımlanan Wilks'ın lamdası aracılığıyla test edilir. *(Jabson,1982 , s : 216)*

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|B + W|} \qquad (T = B + W)$$

$$\Lambda^* = \frac{\left|\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{ij.})(y_{ijk}-y_{ij.})'\right|}{\left|\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-y_{...})(y_{ijk}-y_{...})'\right|} \tag{1.19}$$

Wilks'in Lamda değeri Λ^* eğer çok küçük ise (1.14)'de oluşturulan H_0 hipotezi red edilir. (1.19)'da tanımlanan Λ^* değeri çok değişkenli tek faktör varyans analizinde, tek faktör varyans analizi modelindeki H_0 hipotezinin testi için oluşturulan (1.8f)'deki F istatistiği gibi kullanılır.

Λ^* istatistiğinin, bazı g (yığın sayısı) ve p (değişken sayısı veya faktör düzeyi sayısı) değerleri için kesin dağılımları (exact distribution) Tablo (1.3)'de verilmiştir.

TABLO: 1.3. WİLKS LAMDASININ DAĞILIMI $\Lambda^* = \dfrac{|W|}{|B+W|}$

Değişken Sayısı	Yığın Sayısı	Λ^*'ın Dağılımı
P = 1	g ≥ 2	$\left(\dfrac{\Sigma n_p - g}{g-1}\right)\left(\dfrac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1,\,\Sigma n_p - g}$
P = 2	g ≥ 2	$\left(\dfrac{\Sigma n_p - g - 1}{g-1}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1),2(\Sigma n_p - g - 1)}$
P ≥ 2	g = 2	$\left(\dfrac{\Sigma n_p - p - 1}{p}\right)\left(\dfrac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p,\Sigma n_p - p - 1}$
P ≥ 2	g = 3	$\left(\dfrac{\Sigma n_p - p - 2}{p}\right)\left(\dfrac{1-\Lambda^*}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p,2(\Sigma n_p - p - 2)}$

Tablo (1.3)'deki p ve g'in kombinasyonları dışında kalan kombinasyonlar ve büyük örnek çapı ($\Sigma n_p = n$) için (1.14)'deki boş hipotezin testi için Barlett İstatistiği (V) kullanılır. Barlett , (1.14) boş hipotezinin doğruluğu varsayımı ve geniş örnek çapı için,

$$V - (n - 1 - \frac{(p+g)}{2}\ln \Lambda^* - -(n - 1 - \frac{p+g}{2})\ln\left(\frac{|W|}{|B+W|}\right) \qquad (1.20)$$

istatistiğinin, yaklaşık olarak serbestlik derecesi (pg – p) olan χ^2 - dağılımına sahip olduğunu göstermiştir. *(Jonson, Wichern, 1982 , s: 248)*

$$-(n - 1 - \frac{p+g}{2})\ln\left(\frac{|W|}{|B+W|}\right) > \chi^2_{(pg-p)}(\alpha) \qquad \text{ise}$$

(1.14) H_0 hipotezi α - anlamlılık düzeyinde red edilir. *(6 , s : 218)*

(1.19) veya (1.20)'de tanımlanan istatistikler aracılığıyla (1.14)'de oluşturulan H_0 hipotezi red edildiğinde, hangi faktör düzeylerinin etkilerinin birbirlerinden farklı olduğunun bulunması sorunuyla karşışaşılır. Bu sorunun aşılmasını sağlayan ikili karşılaştırmaların yapılabilmesi için gerekli güven aralıkları aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Yukarıda sözü edilen H_0 hipotezi aynı zamanda, iki yığın için, Hotelling T^2 istatistiği aracılığıyla da test edilir. *(Kshirsagar,19767 , s : 121)*

1.5 FAKTÖR DÜZEYİ ETKİLERİ İÇİN EŞANLI GÜVEN ARALIKLARI

Faktör düzeyi etkilerinin eşit olduğu hipotezi reddedildiğinde, hangi faktör düzeyi etkilerinin bu hipotezin reddine neden olduğuyla ilgilenir. Bu nedenle, Bonferrani yaklaşımıyla ikili karşılaştırmaların yapılmasına olanak sağlayan $\alpha_{ij} - \alpha_{i'j}$ parametreleri için eşanlı güven aralıkları oluşturulur. *(Johnson,Wıchern, s : 253)*

(1.16)'da i.yığındaki j.faktör düzeyinin (değişkenin) etkisi

$$\hat{\alpha}_{ij} = y_{i.} - y_{...}$$

olarak tahmin edilmişti. Benzer şekilde i. yığındaki j. faktör düzeyinin (değişkenin) etkiside

$$\hat{\alpha}_{ij} = y_{i'j.} - y_{...}$$

olarak tahmin edilir. O halde;

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{ij} - \hat{\alpha}_{i'j} &= (y_{ij.} - y_{...}) - (y_{i'j.} - y_{...}) \\ &= y_{ij.} - y_{i'j.}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilirki bu da birbirlerinden bağımsız iki örnek ortalamasına eşittir. $\alpha_{ij} - \alpha_{i'j}$ parametre değeri için eşanlı güven aralığı oluşturabilmek için t-dağılımından yararlanılır. Söz konusu güven aralığının oluşturulabilmesi için $V(\hat{\alpha}_{ij} - \hat{\alpha}_{i'j})$ değerine gereksinme duyulur. Bu değer de,

$$V\,(\hat{\alpha}_{ij.} - \hat{\alpha}_{i'j.}) = (y_{ij.} - y_{i'j.}) = \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\sigma_j^2$$

şeklinde ifade edilir.

Burada; σ_j^2: Varyans kovaryans matrisi Σ'nin j. köşegen elemanına eşittir.

$Var\ (y_{ij.} - y_{i'j.})$ değeri (1.18a)'daki W'in ilgili elemanının serbestlik derecesine bölünerek aşağıdaki gibi tahmin edilir.

$$\widehat{Var}\ (y_{ij.} - y_{i'j.}) = \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\frac{w_j}{n-g}$$

Burada;

W_j : W'in j. köşegen elemanını

n : $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ ·yi ifade eder.

Şimdi de güven aralığı için hata oranının ne olacağını saptayalım. p - değişken ve g yığın olması nedeniyle, g (g – 1) / 2 tane ikili fark $\hat{\alpha}_{ij} - \hat{\alpha}_{i'j}$ oluşur.

Herbir güven aralığına a - güven katsayısında, isabet eden hata oranıda, a güven katsayısında, eşanlı oluşturulan güven aralığı sayısına bölümü ile elde edilir. Eşanlı oluşturulan güven aralığı sayısıda pg (g – 1) / 2 tanedir. O halde, güven aralıkları için gerekli t - kritik değeri t_{n-g} (α / 2m) dir. (m = pg (g - 1) / 2).

O halde, $\hat{\alpha}_{ij} - \hat{\alpha}_{i'j}$ için güven aralığı

$$\alpha_{ij.} - \alpha_{i'j.} \in \left[(y_{ij.} - y_{i'j.}) \pm t_{n-g}\left(\frac{\alpha}{pg\ (g-1)}\right) \sqrt{\frac{w_j}{n-g}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)} \right] \qquad (1.21)$$

şeklinde oluşturulur.

i : 1, 2 ,....., g ; j : 1, 2 ,....., p

w_j : W'in j.köşegen elemanıdır.

(3.21)'de $(\alpha_{ij} - \alpha_{i'j})$ için oluşturulan güven aralığı sıfırı içerirse,

$$H_o : \alpha_{ij} - \alpha_{i'j} - 0$$

şeklinde kurulan H_o hipotezi red edilemez. Aksi takdirde, yani söz konusu güven aralığı sıfırı içermezse H_o hipotezi red edilir. H_o'nın red edilmesi, i. yığındaki j. değişken ile *i'*. yığındaki j. değişken ortalamalarının birbirlerinden farklı olduğu sonucu doğurur.

ÖRNEK :

Aşağıda, her biri 2 değişken içeren 2 yığına ilişkin 15 gözlem değeri verilmiştir.

Değişkenler	I. Yığın		II. Yığın	
Bireyler	α_1	α_2	α_1	α_2
1	180	278	185	282
2	186	277	195	285
3	206	308	183	276
4	184	290	202	308
5	177	273	177	254
6	177	284	177	268
7	176	267	170	260
8	200	281	186	274
9	191	287	177	272
10	193	271	178	266
11	212	302	192	281
12	181	254	204	276
13	195	297	191	290
14	187	281	178	265
15	190	284	177	275

g - yığın ortalama vektörünün karşılaştırılmasına ilişkin MANOVA modeli (1.11)'de verildiği gibi

yijk = μ + aij + eijk dır. i = 1 ... g ; j = 1, 2 , ..., p ; k = 1, 2 ,..., n

Bu örnekte, g = 2 ; p = 2 ve n = 15 ve Ho hipotezi,

$$H_o\!:\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{22}\end{bmatrix}$$

(1.14'e göre) şeklinde kurulur. Söz konusu hipotezin testi için MANOVA tablosu aşağıdaki adımların arkasından oluşturulur. Parametrelerin tahmin değerleri aşağıdaki hesaplamalarla bulunur;

$$\mu = \frac{\sum_{i-1}^{g} \sum_{j-1}^{p} \sum_{k-1}^{n} y_{ijk}}{N} = y\ldots \text{ (genel ortalama)} \tag{1.15}$$

Gruplar arası haneler toplamını ifade eden B matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{B} = \sum_i \sum_j n_p \,(yij. - y\ldots)\,(yij. - y\ldots)'$$

$$B = \left\{ 15 \begin{bmatrix} -46 \\ -45.3 \end{bmatrix} [-46 \;\; -45.3] + 15 \begin{bmatrix} 39.9 \\ 52.2 \end{bmatrix} [39.9 \;\; 52.2] \right\} = \begin{bmatrix} 55620.15 & 62.499 \\ 62.499 & 71653.5 \end{bmatrix}$$

Grup içi karaler toplamını ifade eden ifade **W** matrisinde aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$W - \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - y_{ij.})\,(y_{ijk} - y_{ij.})' \tag{1.18a}$$

$$= (n_1 - 1)\, S_1 + \ldots. + (np - 1)\, Sg$$

Bu örnekte g = 2 olduğundan, W = $(n_1 - 1)\, S_1 + (n_2 - 1)\, S_2$ olur. S_1 ve S_2 aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$S_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_i \sum_j (y_{1jk} - y_{1j.})\,(y_{1jk} - y_{1j.})' \qquad S_1 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1396 & 1208 \\ 1208 & 2651 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_i \sum_j (y_{2jk} - y_{2j.})\,(y_{2jk} - y_{2j.})' \qquad S_2 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1418.4 & 1426 \\ 1426 & 2403.4 \end{bmatrix}$$

Buradan da

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2814.4 & 2634 \\ 2634 & 5054.4 \end{bmatrix} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Bu durumda, B + W matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{B} + \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 58434.55 & 65133 \\ 65133 & 76709.9 \end{bmatrix}$$

W ve **B** + **W** matrislerinin determinantları

$|\mathbf{W}| = 7287147.4$ ve

$|\mathbf{B} + \mathbf{W}| = 242.904.913.3$

olarak elde edilir,

Şimdi (1.2)'de verilen tabloya göre, örneğimiz için MANOVA tablosu oluşturalım;

Varyans Kaynağı	Kareler Toplamı Çapraz Çarpımlar	Serbestlik Derecesi
GAKT ve Çapraz Çarpımlar	$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 55620.15 & 62499 \\ 62499 & 71653.5 \end{bmatrix}$	1
GIKT ve Çapraz Çarpımlar	$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2814.4 & 2634 \\ 2634 & 5054.4 \end{bmatrix}$	28
TKT ve Çapraz Çarpımlar	$\mathbf{B+W} = \begin{bmatrix} 58434.55 & 65133 \\ 65133 & 76707.9 \end{bmatrix}$	29

Yukarıda oluşturalan Ho hipotezinin testi için gerekli olan ve (1.19)'da verilen Λ^* test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|B + W|} = 0.03$$

olarak bulunur.

Bu durumda, yığınların normallik ve ortak kovaryans matrisi varsayımı altında, Λ^* değeri çok küçük olduğu için, yığınların eşitliği anlamını taşıyan Ho hipotezi red edilir.

(1.21)'de verilen formülden yararlanarak gerekli güven aralıkları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\alpha_{ij.} - \alpha_{i'j.} \in \left[(y_{ij.} - y_{i/j.}) \pm t_{n-g}\left(\frac{\alpha}{pg\,(g-1)}\right) \sqrt{\frac{w_j}{n-g}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i/}}\right)} \right]$$

$$\alpha_{11} - \alpha_{21} \in \left[(y_{11} - y_{21}) \pm t_{58}\,(0.0125) \sqrt{\frac{w_{11}}{28}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)} \right]$$

$$\alpha_{11} - \alpha_{21} \in \left[(4.2) \perp t_{58}\,(0.0125) \sqrt{\frac{2814.4}{28}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)} \right]$$ ve

$$\alpha_{12} - \alpha_{22} \in \left[(y_{12.} - y_{22.}) \pm t_{58}\ (0.0125) \sqrt{\frac{w_{22}}{28} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)} \right]$$

$$\alpha_{12} - \alpha_{22} \in \left[(6.8) \pm t_{58}\ (0.0125) \sqrt{\frac{5054.4}{28} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)} \right]$$

Bunlardan da, aşağıdaki güven aralıkları a = 0.05 güven katsayısında elde edilir.

(i) $0.06 < \alpha_{11} - \alpha_{21} < 8.3$ ve

(ii) $1.28 < \alpha_{12} - \alpha_{22} < 12.32$

(i) ve (ii)'deki aralıklar sıfırı içermediği için

Ho: $\alpha_{11} = \alpha_{21}$ ve Ho : $\alpha_{12} = \alpha_{22}$ hipotezleri ilgili aralıklar sıfırı içermedikleri için reddedilir. Bu sonuçlar MANOVA tablosu ile elde edilen sonucu destekler

Sonuç ve Değerlendirme

Bu araştırmada çok değişkenli tek faktör varyans analizi modeli tek faktör varyans analizi modeli ile karşılaştırmalı olarak anlatıldı. Daha sonra, çok değişkenli tek faktör varyans analizine ilişkin adımlar uygulamacılara ışık tutmak amaçı ile miyatür bir örnek üzerinde uygulandı.

KAYNAKÇA

Bray, H.J., Maxwell, S.E. Multivatiate Analysis of Variance, Sage Publucations, Newbury Park, 1990

Jobson, J.D. Applied Multivariate Data Analysis Vol.II, Springer-Verlag Inc. New-York,1992

Jeremy, D.F A General Model For Multivariate Analysis, Holt, Rinehartand Winston, Inc. USA,1974

Johnson, R.A, Wichern D.W, Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall International, Inc. USA, 1982

Kshirsagar, A.M. Multivariate Analysis Vol.II, Marcel Dekker, Inc, New-York,1992

Ünsal. Aydın Varyans Analizi, (Tek Faktör-İki Faktör) G.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, !993, Ankara