



ELASTİK ZEMİN ve MANYETİK ALAN ETKİSİ ALTINDAKİ KADEMELİ KİRİŞİN DOĞRUSAL TİTREŞİM ANALİZİ

Burak Emre YAPANMIŞ^{1*}

¹ Ege Üniversitesi, Aliğa Meslek Yüksekokulu, Makine ve Metal Teknolojileri Bölümü, İzmir, Türkiye

Anahtar Kelimeler	Öz
<i>Elastik Zemin, Kademeli Kiriş, Manyetik Alan, Pertürbasyon Tekniği, Sürekli Ortam Mekaniği.</i>	Teknolojideki gelişmelerle birlikte farklı kiriş türlerine olan gereksinim artmaktadır. Yaygın olarak kullanılan farklı kiriş türlerinden bir tanesi de kademeli kirişlerdir. Sunulan bu çalışmada önemli yapısal elemanlardan birisi olan kirişin kademeli olması durumu ele alınmıştır. Kademe sayısı olarak tek kademeli durum dikkate alınmış olup kademe oranı ve konumu irdelenmiştir. Çalışmanın temel motivasyon kaynağı kademeli kirişin elastik zemin üzerinde olması ve manyetik alana maruz kalmasıdır. Kademeli kiriş üzerine doğrusal elastik zemin katsayısının ve manyetik alan kuvvetinin etkilerini içeren kapsamlı bir çalışma yürütülmüştür. Farklı mesnet durumları da incelenerek çalışmanın zenginliği artırılmıştır. Belirtilen değişken parametrelerin doğal frekanslar üzerine etkileri üç boyutlu grafikler halinde sunulmuştur. Manyetik alan ve elastik zemin etkisinin doğal frekanslar üzerine önemli bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Kademe oranı ve konumunun etkisi serbest serbest sınır şartlarında en etkili olmasına karşın manyetik alan ve elastik zemin etkisi ankastre serbest sınır şartına sahip durumda daha belirgin olmaktadır.

LINEAR VIBRATION ANALYSIS OF STEPPED BEAM UNDER THE EFFECT OF ELASTIC FOUNDATION AND MAGNETIC FIELD

Keywords	Abstract
<i>Continuum Mechanics, Elastic Foundation, Magnetic Field, Perturbation Technique, Stepped Beam.</i>	The necessity of different beam types is increasing with the advances in technology. One of the different types of beams commonly used is stepped beams. In this context, the presented study deals with the stepped beam, which is one of the essential structural elements. The one-stage situation was taken into account and the stage ratio and position were examined. The main source of motivation for the study is that the stepped beam is on the elastic ground and exposed to a magnetic field. A comprehensive study was carried out on the effects of linear elastic foundation coefficient and magnetic field on the stepped beam. The richness of the study has been increased by examining different support situations. The effects of the specified variable parameters on natural frequencies are presented in three-dimensional graphics. It has been observed that the magnetic field and elastic ground effect have a significant effect on natural frequencies. Although the effect of step ratio and position is most effective in the free-free boundary conditions, the magnetic field and elastic ground effect are more explicit in the case of fixed-free boundary conditions.

Alıntı / Cite

Yapanmış, B. E., (2023). Elastik Zemin ve Manyetik Alan Etkisi Altındaki Kademeli Kirişin Doğrusal Titreşim Analizi, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 11(3), 1109-1119.

Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)

B. Emre YAPANMIŞ, 0000-0003-0499-6581

Makale Süreci / Article Process

Başvuru Tarihi / Submission Date 10.01.2023

Kabul Tarihi / Accepted Date 18.07.2023

Yayın Tarihi / Published Date 28.09.2023

* İlgili yazar / Corresponding author: burak.emre.yapanmis@ege.edu.tr, +90-323-616-0671

LINEAR VIBRATION ANALYSIS OF STEPPED BEAM UNDER THE EFFECT OF ELASTIC FOUNDATION AND MAGNETIC FIELD

Burak Emre YAPANMIŞ^{1†}

Department of Machine and Metal Technologies, Aliğa Vocational and Training School, Ege University, Izmir, Turkey

Highlights

- Magnetic force, elastic foundation and boundary conditions have significant effects on beams.
- The change of natural frequencies does not have a linear relationship with the step positions and ratios.
- The step ratio and position are most effective in the free-free boundary conditions however the magnetic field and elastic ground effect are more explicit in the case of fixed-free boundary conditions.

Graphical Abstract

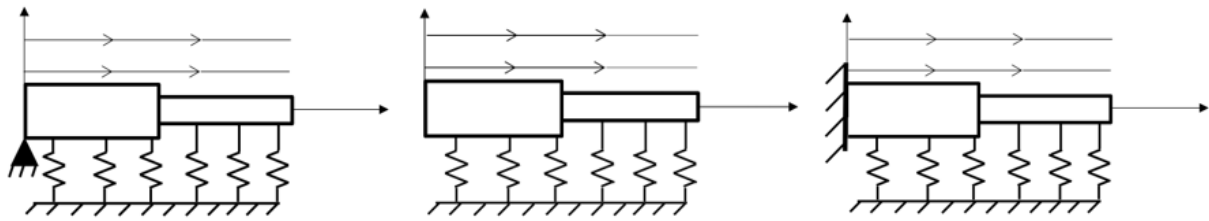


Figure. Stepped Beams with Different Boundary Conditions

Purpose and Scope

This study reveals the significance of magnetic force, stepped ratio and location, elastic foundation and boundary conditions on macro beams. The article's primary purpose is to examine the linear vibration of a stepped beam according to variable parameters.

Design/methodology/approach

The equation of motion is created based on Hamilton's principle. The perturbation method is used to obtain linear equations from the main equations. Before the perturbation technique, the nondimensionalization process is performed. The results are shown in three-dimensional graphs according to variable parameters. A comparison study was conducted to validate the current methods.

Findings

The increase in the magnetic field and elastic foundation coefficient values increases the natural frequencies for simple-free boundary conditions. This trend is the same for free-free boundary conditions. Besides, it is seen that better impact is observed for fixed-free boundary conditions. The natural frequency values decreased by moving the stepped position from the simple support to the free support. This trend is also the same from fixed support to free support. However, the variation of the curve is quite different for free-free boundary conditions.

Originality

There is very much work on stepped beams in literature. However magnetic field effect and elastic foundation impact on stepped beam have not been studied yet. In addition, different boundary conditions have enriched the study.

[†] Corresponding author: burak.emre.yapanmis@ege.edu.tr, +90-323-616-0671

1. Giriş (Introduction)

Yapısal elemanların titreşim analizleri mühendislik çalışmalarının tasarım kriterlerinde dikkate alınması gereken önemli bir parametredir. Yapıların doğal frekanslarının bilinmesi rezonans durumlarından kaçınılması açısından hayati öneme sahiptir. Yapısal eleman olarak mühendislik uygulamalarında kiriş, plaka, çubuk, kabuk vd. türler sıklıkla kullanılmaktadır. Bahsedilen yapısal elemanlar kendi aralarında farklı uygulama alanlarına göre alt başlıklara ayrılmaktadır. Örneğin; kirişler kademeli, makro, mikro, değişken kesitli olarak kendi içerisinde sınıflandırılmaktadırlar. Bu çalışmada kademeli kiriş formu ele alınmıştır. Kademeli kirişler köprüler, uzun binalar, robot kolları, şaft ve miller gibi dönen elemanlarda yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Kademeli kirişler gibi süreksizliğe sahip kirişler düzgün kirişlere göre kuvvetin daha iyi dağıtılması vb. nedenlerden dolayı havacılık, mimari, robot teknolojisi gibi bazı uygulama alanlarında kendilerine sıklıkla yer bulabilmektedirler (Taşkın vd., 2021).

Mühendislik çalışmalarında kirişler ile ilgili incelemeler çok uzun yıllardır gerçekleştirilmektedir. Kademeli kirişler ile ilgili çalışmalar ise birkaç on yıldır yapılmaktadır. Bilinen ilk kademeli kiriş çalışması Taleb ve Suppiger (1961) tarafından gerçekleştirilmiştir. Kademeli kirişler ile ilgili yapılan öncü çalışmalardan bir tanesi de Bert ve Newberry (1986) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada farklı kademe oranları ve sınır şartları altında enerji yöntemleri kullanılarak elde edilen doğal frekanslar karşılaştırılmıştır. Lee ve Bergman (1994), kademeli Euler-Bernoulli kirişin serbest ve zorlamalı titreşim davranışlarını incelemiştir. Hareket denklemleri dinamik esneklik metodu kullanılarak elde edilmiş olup zorlamalı ve serbest titreşim durumlarına ait farklı modların doğal frekanslarını ve mod şekillerini belirlemiştir. Naguleswaran (2003), üç kademeli ve her kademe farklı aksel yüküne maruz kalan kademeli kirişin titreşim ve stabilite analizini gerçekleştirmiştir. Birim uzunluk başına kütle, eğilme rijitliğinin, kademe pozisyonunun ve aksel yükün doğal frekanslara etkisini sonlu elemanlar metodu kullanarak tablolar halinde sunmuştur. Lu vd. (2009), çok kademeli kompozit kiriş modelinin titreşim davranışını incelemiştir. Kompozit element metodunu kullanarak elde ettikleri doğal frekansları reseptör fonksiyon yöntemi, Rayleigh Ritz ve sonlu elemanlar yöntemleri ile kıyaslamışlardır. Kompozit element metodunun farklı kademe durumuna sahip kirişlere uygulanabilirliğini kanıtlamak çalışmalarının temel amacını oluşturmaktadır. Özkaya ve Tekin (2007) yapmış oldukları çalışmada farklı sınır şartları altındaki kademeli kirişin doğrusal olmayan titreşim davranışını incelemiştir. Kademe oranı ve konumunun, kademe sayısının, sınır şartlarının doğrusal olmayan doğal frekanslara etkisini araştırmışlardır. Bağdatlı vd. (2009), yapay sinir ağı programı kullanarak çok kademeli kirişin doğrusal olmayan davranışını incelemiştir. Tekin vd. (2009), çok kademeli kirişin üçe bir iç rezonans durumunu incelemiştir. Hareket denklemlerini pertürbasyon yöntemi ve Hamilton prensibini kullanarak elde etmişlerdir. İç rezonans modlarına ait kuvvet ve frekans eğri grafikleri analiz edilmiştir. Cheng vd. (2014), tekillik fonksiyonunu kullanarak kademeli kirişin titreşim, statik deplasman ve duyarlılık analizlerini yapmışlardır. Titreşim problemleri için sonlu elemanlar metodunu kullanmışlar ve tekillik fonksiyonu ile farklı sınır şartlarındaki doğal frekansları karşılaştırmışlardır. Taşkın vd. (2021), farklı sınır şartlarına sahip değişken kesitli kirişin doğal frekanslarını ve mod şekillerini incelemiştir. Hareket denklemlerini Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak Hamilton prensibi ile elde etmişlerdir. Farklı eğrilik katsayısı ve kiriş uzunluklarının doğal frekansa etkilerini incelemiştir. Nalbant vd. (2023) kademeli nano kirişi yerel olmayan elastisite teorisine göre modelleyerek doğrusal titreşim davranışını incelemiştir.

Elastik zemin ile ilgili literatürdeki çalışmalar ise şöyledir. Wang (1991), elastik zemin üzerindeki kademeli kirişleri incelemiştir. Farklı zemin katsayısına ait basit basit ve serbest serbest mesnete sahip kademeli kirişin ilk iki doğal frekanslarını elde etmişlerdir. Kural ve Özkaya (2015), akışkan taşıyan elastik zemin üzerindeki mikro kirişin titreşim hareketini araştırmışlardır. Klasik kiriş ve modifiye edilmiş gerilme çifti teorisini karşılaştırmışlardır. Akış hızı, zemin katsayısı, mikro kirişlik katsayısının doğal frekanslar üzerindeki etkilerini göstermişlerdir. Nesic vd. (2022), farklı sınır şartları altındaki Winkler zemin tipi üzerindeki iki kademeli kirişin farklı modlarını incelemiştir. Literatürde manyetik alan etkisi altındaki kirişlerin titreşim davranışları da incelenmiştir. Arani vd. (2015), iki boyutlu manyetik alan altındaki içerisinde nano ve mikro yapıları taşıyan Timoshenko kirişin doğrusal olmayan titreşim davranışını incelemiştir. Yüksek mertebeli yönetici denklemlerini Hamilton prensibi ile elde etmişler enerji ve diferansiyel kareleme metotları ile çözmüşlerdir. Doğrusal sonuçları Galerkin metodu ile karşılaştırmışlardır. Chang (2016), yerel olmayan elastisite teorisine dayalı olarak modellediği manyetik alan etkisi altındaki nano kirişin doğrusal olmayan serbest titreşim davranışını incelemiştir. Jandaghian ve Rahmani (2016), Pasternak zemin üzerindeki nano kirişin serbest titreşimini incelemiştir. Kiriş, yerel olmayan teori ve Timoshenko kiriş teorisine dayandırılarak modellenmiştir. Nano kirişin manyetik, elektrik, mekanik ve termal yükler altındaki titreşim karakterini irdelenmiştir. Tang vd. (2021), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş nano kirişin manyetik ve elektriksel alan altındaki dinamik davranışlarını incelemiştir. Timoshenko kiriş modelini kullanarak hareket denklemlerini Hamilton prensibiyle elde edip genelleştirilmiş diferansiyel kareleme metodu ile çözmüşlerdir. Esen vd. (2022), termal ve manyetik alana maruz bırakılmış fonksiyonel derecelendirilmiş nano kirişin serbest titreşim ve burkulma davranışı üzerinde

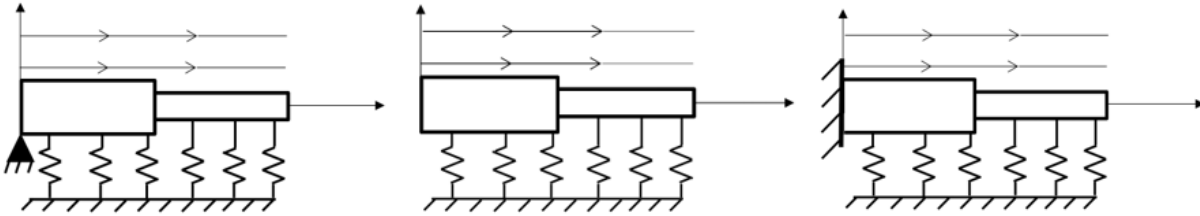
çalışmışlardır. Timoshenko nano kirişi gerinme gradyan ve yerel olmayan teoriye göre modelleyip hareket denklemlerini Navier tipi yaklaşım ile çözmüşlerdir.

Kirişler üzerine literatürde daha birçok farklı çalışma yer almaktadır. Atcı ve Bağdatlı (2017), ideal olmayan sınır şartlı akışkan taşıyan mikro kirişin titreşim hareketini araştırmışlardır. Hamilton prensibi ile elde ettikleri hareket denklemlerini çok ölçekli metot ile çözmüşlerdir. Frekans tepki eğrileri çizilerek ideal olmayan sınır şartı etkilerini incelemişlerdir. Kural (2018), akışkan taşıyan mikro kirişin üçe bir ve ikiye bir iç rezonanslarını inceleyen bir çalışma yapmıştır. Yapanmış (2022), farklı sınır şartları altında kütle taşıyan mikro kirişin doğrusal olmayan titreşim hareketini ve üçe bir iç rezonans durumunu incelemiştir. Atcı ve Bağdatlı (2018), ideal olmayan farklı sınır şartlarına sahip mikro kirişin temel parametrik rezonans frekansları üzerine çalışmışlardır. Kural (2020), ortadan yaylı aksel hareket eden sicim titreşim hareketini modellemiştir. Sicim rijitliğinin, hızının, yay katsayısının ve konumunun doğal frekansa etkilerini grafikler halinde sunmuştur. Atcı (2021), ideal olmayan sınır şartına sahip nano kirişin modifiye edilmiş gerilme teorisine göre modelleyerek serbest titreşimini incelemiştir. Yapanmış ve Bağdatlı (2022), çok mesnetli nano kirişin doğrusal olmayan titreşim hareketini ve iç rezonans durumunu araştırmışlardır.

Literatürde görüldüğü gibi kirişler üzerinde elastik zemin ve manyetik alan etkisinin aynı anda incelenmesi çok fazla rastlanan bir durum değildir. Özellikle kademeli kiriş üzerinde bu tarz bir çalışmanın yapılmaması yazar için büyük motivasyon kaynağı olmuştur. Bu doğrultuda sunulan çalışma kapsamında tek kademeli makro kirişin manyetik alan ve elastik zemin üzerindeki doğrusal titreşim davranışları incelenmiştir. Kademeli kiriş basit-serbest, serbest-serbest ve ankastre-serbest sınır şartları altında modellenerek farklı sınır şartlarının doğal frekansa etkileri irdelenmiştir. Sonuçlar değişken parametrelere göre üç boyutlu grafikler halinde sunulmuştur. Mevcut formülasyon ve çözümleri doğrulamak amacıyla karşılaştırma çalışması yapılmıştır.

2. Sayısal Hesaplamalar (Numerical Study)

Bu bölümde kademeli kirişin matematiksel modeli oluşturulmuş ve doğrusal hareket denklemleri elde edilmiştir. İlgilenilen farklı sınır şartlarına sahip elastik zemin ve manyetik alan içerisindeki kademeli kiriş görseli Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Farklı sınır şartlarına sahip elastik zemin ve manyetik alan etkisi altındaki kademeli kiriş görselleri a) Basit-Serbest, b) Serbest-Serbest, c) Ankastre-Serbest

Hareket denklemlerinin elde edilmesi için Hamilton prensibine başvurulmuştur. Hamilton prensibi Eşitlik 1'de gösterildiği gibi kinetik ve potansiyel enerji ilişkisine dayanmaktadır.

$$L = T - V \quad (1)$$

Sistemin kinetik ve potansiyel enerji terimlerinin Hamilton prensibi içerisinde yerlerine yazılmasıyla elde edilen ifade Eşitlik 2'de verilmiştir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_0^{x_1} \rho A (y_{1,t}^2) dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^L \rho A (y_{2,t}^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} EI_1 (y_{1,xx}^2) dx - \frac{1}{2} \int_{x_1}^L EI_2 (y_{2,xx}^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} EA_1 \left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x_1}^L EA_2 \left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} k_1 y_1^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x_1}^L k_2 y_2^2 dx \right) dt = 0 \quad (2)$$

Burada ρ yoğunluk, E elastisite modülü, A kesit alanı, I alan atalet modülü, k_1 doğrusal zemin katsayısı, y enine u ise boyuna uzama terimlerini, L kirişin tam boyunu, x_s kademe konumunu belirtmektedir. Denklemlerdeki, t ve x ifadeleri sırasıyla zamana ve konuma bağlı türevleri ifade etmektedir. Varyasyonel ifade (δ) Eşitlik 3'te olduğu gibi denklem içerisine dağıtılır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{x_s} \rho A y_{1,t} \delta y_{1,t} dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} k_l y_1 \delta y_1 dx - \int_0^{x_s} EI_1 y_{1,xxx} \delta y_{1,xxx} dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} EA_1 \left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right) \delta \left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right) dx \right. \\ \left. + \int_{x_s}^L \rho A y_{2,t} \delta y_{2,t} dx - \frac{1}{2} \int_{x_s}^L k_l y_2 \delta y_2 dx - \int_{x_s}^L EI_2 y_{2,xxx} \delta y_{2,xxx} dx - \frac{1}{2} \int_{x_s}^L EA_2 \left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right) \delta \left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right) dx \right) dt = 0 \quad (3)$$

Eşitlik 3'teki ifade de bulunan her bir terim esasen çift katlı integraldir. Varyasyonel ifadelerden kurtulmak için kısmi integrasyon işlemleri gerçekleştirilerek çift katlı integrallerden hareket denklemleri ve tek katlı integrallerden ise sınır şartları denklemleri elde edilir. Gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldıktan sonra tek kademeli manyetik alan ve elastik zemin üzerindeki kirişin hareket denklemleri Eşitlik 4'te olduğu gibi elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_s} \left(-\rho A_1 y_{1,tt} - EI_1 y_{1,xxxx} + EA_1 \left(\left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right) y_{1,x} \right)_x - \frac{1}{2} k_l y_1 \right) \delta y_1 dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_s}^L \left(-\rho A_2 y_{2,tt} - EI_2 y_{2,xxxx} + EA_2 \left(\left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right) y_{2,x} \right)_x - \frac{1}{2} k_l y_2 \right) \delta y_2 dx dt \quad (4) \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_s} EA_1 \left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right)_x \delta u_1 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_s}^L EA_2 \left(\left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right) \right)_x \delta u_2 dx dt = 0$$

Eşitlik 4 incelendiğinde enine uzama terimleri ile boyuna uzama terimlerinin ayrı ayrı incelenmesi gerektiği görülmektedir. Denklemlerin genel olarak irdelenmesiyle her bir çift katlı integrallerin sıfıra eşit olduğu görülecektir. Çift katlı integrallerden elde edilen boyuna uzama terimlerine sahip hareket denklemleri integre edilir. İntegre edilen terimlerden ve sınır şartlarından gelen süreklilik durumları dikkate alınarak

$$A_1 \left(u_{1,x} (x_s) + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 (x_s) \right) = A_2 \left(u_{2,x} (x_s) + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 (x_s) \right) \quad (5)$$

olduğu görülecektir. Eşitlik 5'te görüldüğü gibi kademe konumunda kesit alanlarının farklı olmasına rağmen enine ve boyuna yer değiştirme miktarları aynıdır. Eşitlik 5'teki ifadeler tekrar integre edilip taraf tarafa toplanması durumunda Eşitlik 6'daki gibi bir yapı elde edilir.

$$EA_1 \left(\left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right) y_{1,x} \right)_x = \frac{A_1}{2 \left((x_s) + \frac{(L-x_s)}{A_2/A_1} \right)} \left[\int_0^{x_s} y_{1,x}^2 dx + \int_{x_s}^L y_{2,x}^2 dx \right] \quad (6)$$

Eşitlik 6'daki ifadede bulunan kesit alanları arasındaki ifade $\frac{A_2}{A_1} = \psi^2$ olarak verilebilir. Hareket denklemindeki ifadeler malzeme özelliği ve geometrik parametrelerden arındırılmak için boyutsuzlaştırma işlemine tabi tutulur. Fakat öncelikle genel hareket denklemlerine manyetik alan terimi eklenir.

$$\rho A_1 y_{1,tt} + EI_1 y_{1,xxxx} + \frac{1}{2} k_l y_1 = EA_1 \left(\left(u_{1,x} + \frac{1}{2} y_{1,x}^2 \right) y_{1,x} \right)_x + q_1(x,t) \quad (7)$$

$$\rho A_2 y_{2,tt} + EI_2 y_{2,xxxx} + \frac{1}{2} k_l y_2 = EA_2 \left(\left(u_{2,x} + \frac{1}{2} y_{2,x}^2 \right) y_{2,x} \right)_x + q_2(x,t) \quad (8)$$

Eşitlik 7 ve 8'de verilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırma işlemine tabi tutulur. Burada yapılan dönüşümler $x^* = \frac{x}{L}$, $y_{1,2}^* = \frac{y_{1,2}}{r_{1,2}}$, $t^* = \beta t$, $\eta = \frac{x_s}{L}$, $K_l = \frac{k_l L^4}{2EI_1}$, $Q = \xi Q_x \frac{A_1 L^2}{EI_1}$ şeklindedir. Boyutsuzlaştırma işlemi uygulanan hareket denklemleri Eşitlik 9 ve 10'daki gibidir.

$$\rho A_1 r_1 \beta^2 y_{1,tt}^* + EI_1 \frac{r_1}{L^4} y_{1,xxxx}^* + \frac{1}{2} k_l r_1 y_1^* = \mu A_1 Q_x y_{1,xx}^* + \frac{EA_1}{2 \left((x_s) + \frac{(L-x_s)}{\psi^2} \right)} \left[\int_0^{x_s} \frac{r_1^2}{L} y_{1,x}^{*2} dx^* + \int_{x_s}^L \frac{r_2^2}{L} y_{2,x}^{*2} dx^* \right] \frac{r_1}{L^2} y_{1,xx}^* \quad (9)$$

$$\rho A_2 r_2 \beta^2 y_{2,tt}^* + EI_2 \frac{r_2}{L^4} y_{2,xxxx}^* + \frac{1}{2} k_l r_2 y_2^* = \mu A_2 Q_x y_{2,xx}^* + \frac{EA_1}{2 \left((x_s) + \frac{(L-x_s)}{\psi^2} \right)} \left[\int_0^{x_s} \frac{r_1^2}{L} y_{1,x}^{*2} dx^* + \int_{x_s}^L \frac{r_2^2}{L} y_{2,x}^{*2} dx^* \right] \frac{r_2}{L^2} y_{2,xx}^* \quad (10)$$

Gerekli sadeleştirilmeler yapıлып zorlama ve sönüm terimi eklenmiş hareket denklemleri Eşitlik 11 ve 12'deki gibi olmaktadır.

$$y_{1,tt}^* + y_{1,xxxx}^* + K_l y_1^* = Q y_{1,xx}^* + \bar{F}_1 \cos(\Omega t) - 2\bar{\mu} y_{1,x}^* + \frac{1}{2 \left((\eta) + \frac{(1-\eta)}{\psi^2} \right)} \left[\int_0^\eta y_{1,x}^{*2} dx^* + \psi^2 \int_\eta^1 y_{2,x}^{*2} dx^* \right] y_{1,xx}^* \quad (11)$$

$$y_{2,tt}^* + \psi^2 y_{2,xxxx}^* + \frac{1}{\psi^2} K_l y_2^* = Q y_{2,xx}^* + \bar{F}_2 \cos(\Omega t) - 2\bar{\mu} y_{2,x}^* + \frac{1}{2 \left((\eta) + \frac{(1-\eta)}{\psi^2} \right)} \psi^2 \left[\int_0^\eta y_{1,x}^{*2} dx^* + \int_\eta^1 y_{2,x}^{*2} dx^* \right] y_{2,xx}^* \quad (12)$$

Hareket denklemlerinden doğrusal hareket denklemlerinin elde edilmesi için pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Pertürbasyon metodu için $y_1^* = \varepsilon y_{11}^* + \varepsilon^3 y_{13}^*$ ve $y_2^* = \varepsilon y_{21}^* + \varepsilon^3 y_{23}^*$ açılımları yapılır. Zorlama ve sönüm terimlerinin doğrusal olmayan mertebede kalabilmesi için çok küçük yakınsama terimi ile çarpılması gerekmektedir. Gerekli matematiksel işlemler yapıldıktan sonra iki bölge için elde edilen doğrusal hareket denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$D_0^2 y_{11}^* + y_{11,xxxx}^* + K_l y_{11}^* - Q y_{11,xx}^* = 0 \quad (13)$$

$$D_0^2 y_{21}^* + \psi^2 y_{21,xxxx}^* + \frac{1}{\psi^2} K_l y_{21}^* - Q y_{21,xx}^* = 0 \quad (14)$$

Doğrusal hareket denklemlerini çözebilmek için her bir kademe durumu için $y_{11} = [Ae^{i\omega t_0} + ke] Y_1$ ve $y_{21} = [Ae^{i\omega t_0} + ke] Y_2$ şeklinde doğrusal çözüm kabulleri yapılır. Çözüm önerisinin hareket denklemlerinde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmelerin yapılması ile elde edilen denklemler;

$$Y_1^{iv}(x) - \omega^2 Y_1(x) + K_l Y_1(x) - Q Y_1''(x) = 0 \quad (15)$$

$$\psi^2 Y_2^{iv}(x) - \omega^2 Y_2(x) + \frac{1}{\psi^2} K_l Y_2(x) - Q Y_2''(x) = 0 \quad (16)$$

şekindedir. Eşitlik 15 ve 16 sadece konum değişkenlerine sahiptir. Bu durum için çözüm önerileri aşağıdaki gibi olabilir.

$$Y_1(x) = x_1 e^{ic_1 x} + x_2 e^{ic_2 x} + x_3 e^{ic_3 x} + x_4 e^{ic_4 x} \quad (17)$$

$$Y_2(x) = x_1 e^{ic_5 x} + x_2 e^{ic_6 x} + x_3 e^{ic_7 x} + x_4 e^{ic_8 x} \quad (18)$$

Çözüm önerileri ve konuma göre türevleri Eşitlik 15 ve 16'da yerlerine yazılması durumunda saçılma denklemleri Eşitlik 19 ve 20'deki gibi olmaktadır.

$$c_i^4 + Q c_i^2 + K_l - \omega^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

$$y^4 c_i^4 + \frac{Q}{\psi^2} y^2 c_i^2 + \frac{1}{\psi^4} K_l - \frac{\omega^2}{\psi^2} = 0 \quad i = 5, 6, 7, 8 \quad (20)$$

Burada c_i değerleri denklemlerin köklerini oluşturmaktadır. Sabit değerler ve sınır şartlarının yerlerine yazılması ile katsayılar matrisi elde edilir. Elde edilen bu matrisin determinantını sıfır yapan değerler sistemin doğrusal doğal frekans değerlerini verecektir.

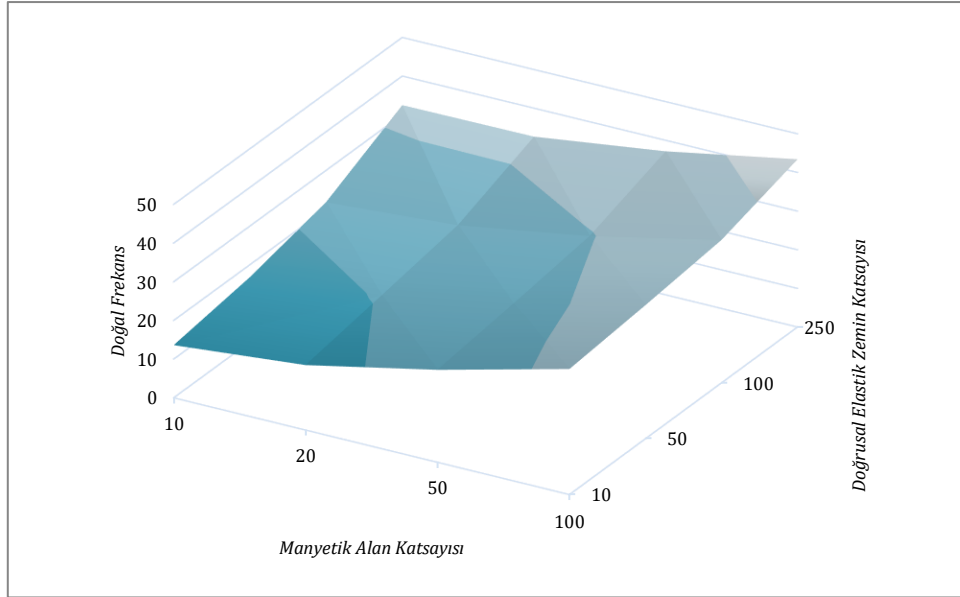
3. Bulgular (Results)

Bu bölümde kademeli kiriş örneğinin sayısal sonuçlarına yer verilmiştir. Sayısal sonuçlar sunulmadan önce kullanılan yöntemin güvenilirliğini kanıtlamak amacıyla doğrulama çalışması yapılmıştır. Tablo 1'de mevcut yöntemin ankastre serbest sınır şartlarına sahip makro kirişin farklı kademe oranlarına göre literatürde daha önceden yapılmış iki farklı çalışma ile karşılaştırmaları sunulmuştur. Karşılaştırma çalışmalarındaki kademe konumu 0.5'tir. Sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu Tablo 1'de açıkça görülmektedir.

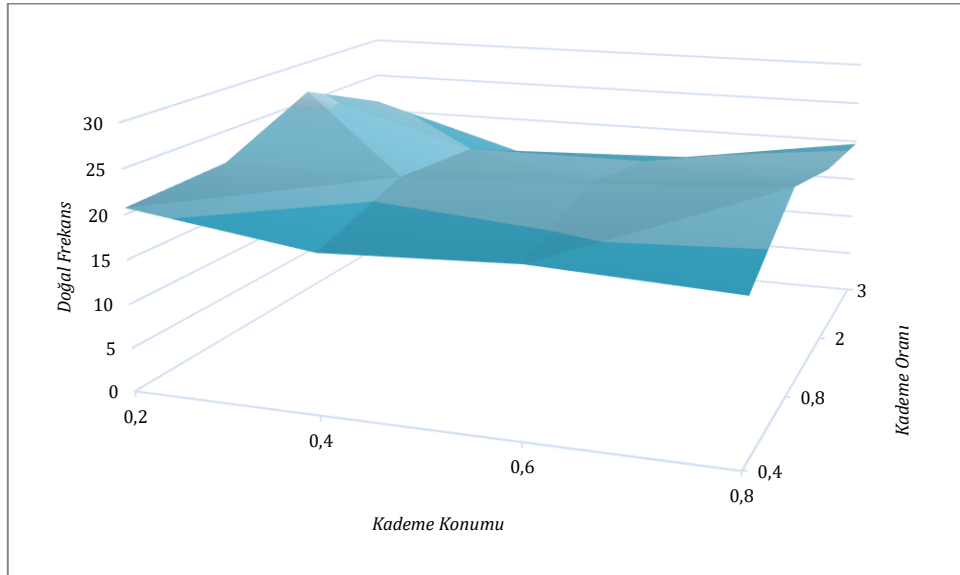
Tablo 1. Ankastre serbest sınır şartlarına sahip makro kirişin farklı kademe oranlarına göre doğrulama çalışması

Sınır Şartları	Kademe Oranı	Jang ve Bert (1989)	Chicurel ve Suppiger (1961)	Mevcut Çalışma
Ankastre-Serbest	1	3.516	3.5173	3.5160
	1.778	2.0629	2.0630	2.0632
	2.114	1.7418	1.7418	1.742

Sunulan çalışmadaki değişken parametreler olarak kademe konumu ve oranı kademeli kirişin temel değişkenleridir. Bunların yanı sıra manyetik alan ve doğrusal elastik zemin etkilerinin doğrusal doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. Sınır şartları için basit serbest (B-S), ankastre serbest (A-S), ve serbest serbest (S-S) olmak üzere üç farklı durum irdelenmiştir. Şekil 2 ve 3'te B-S sınır koşullarına ait değişken parametrelere göre doğal frekanslardaki değişimler gösterilmiştir.

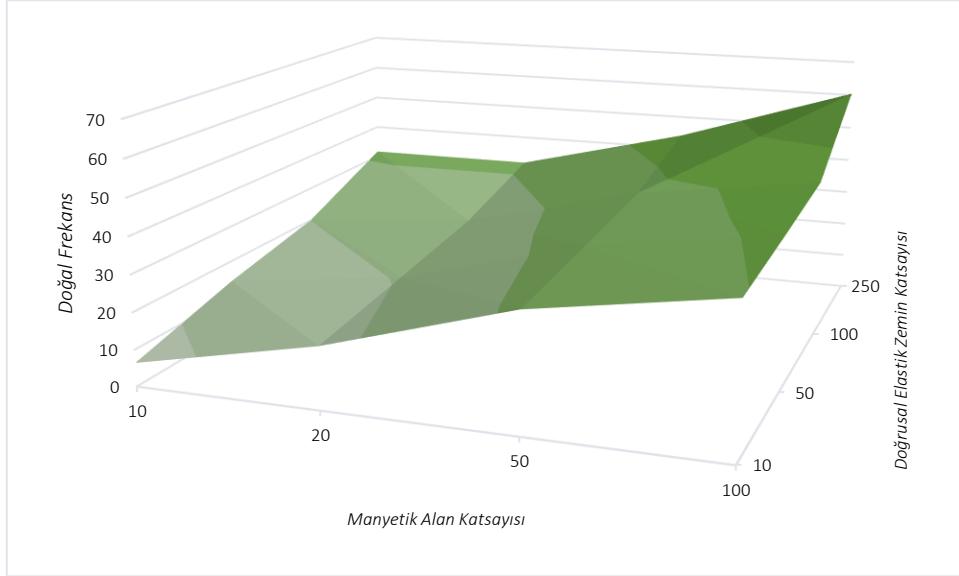


Şekil 2. Farklı manyetik alan ve elastik zemin katsayılarına göre B-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri

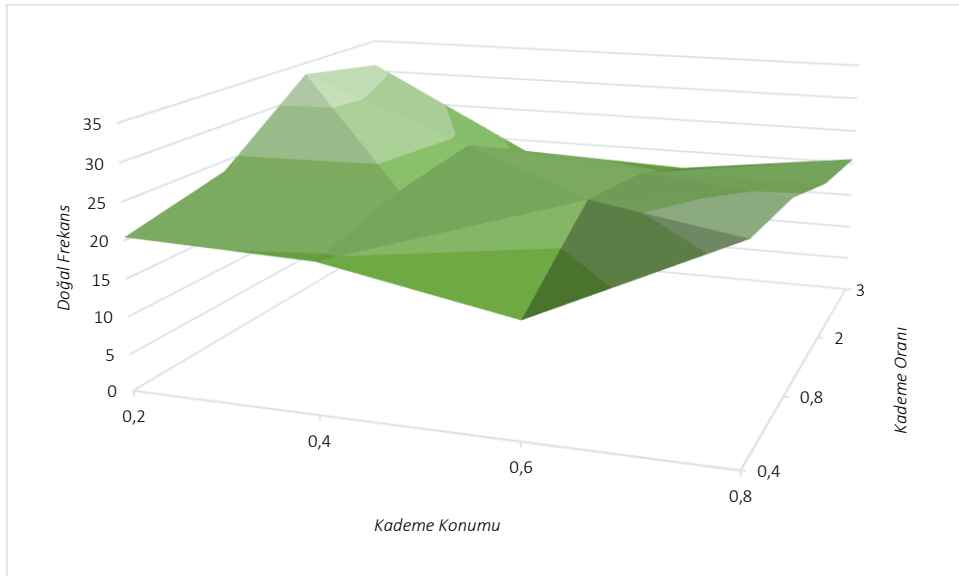


Şekil 3. Farklı kademe konumu ve oranlarına göre B-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri

Şekil 2 incelendiğinde kademeli kiriş için doğrusal elastik zemin ve manyetik alan katsayılarının doğal frekanslar üzerinde belirgin bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Şekil 2’de net bir şekilde görülmektedir ki manyetik alan ve elastik zemin katsayı değerlerindeki artış doğal frekans değerlerini arttırmaktadır. Şekil 3’te kademe konumunun ve oranının doğal frekanslar üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Kademe konumunun basit mesnetten serbest mesnete doğru ilerletilmesiyle doğal frekans değerlerinde düşüşler meydana gelmiştir. Kademe oranı incelendiğinde kademe oranında artması ya da azalmasıyla doğal frekanslarda düşüş görülmektedir. Şekil 4 ve 5’te ankastre serbest sınır koşullarına sahip kirişin değişken parametrelere göre doğal frekanslardaki değişimlerine yer verilmiştir.

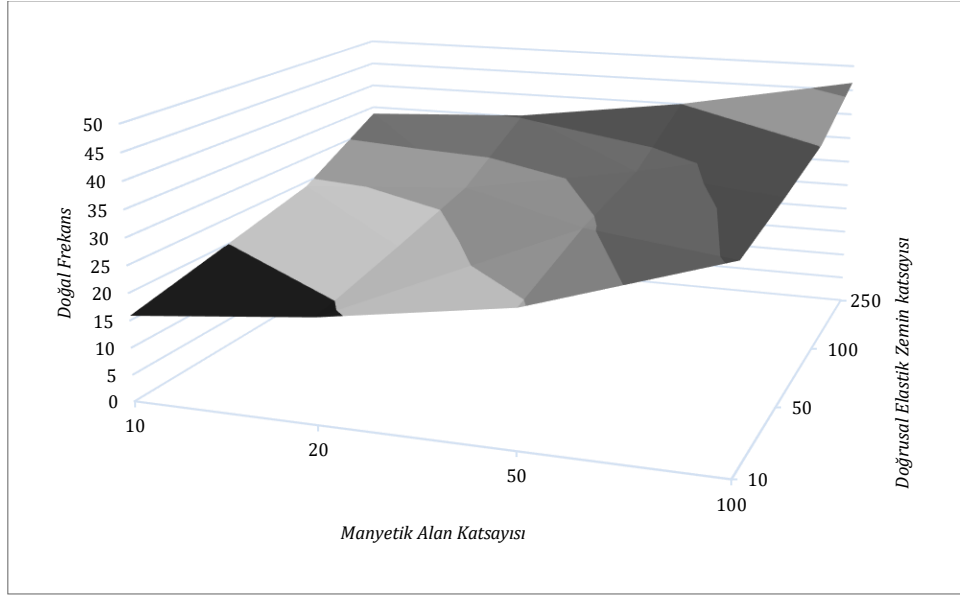


Şekil 4. Farklı manyetik alan ve elastik zemin katsayılarına göre A-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri

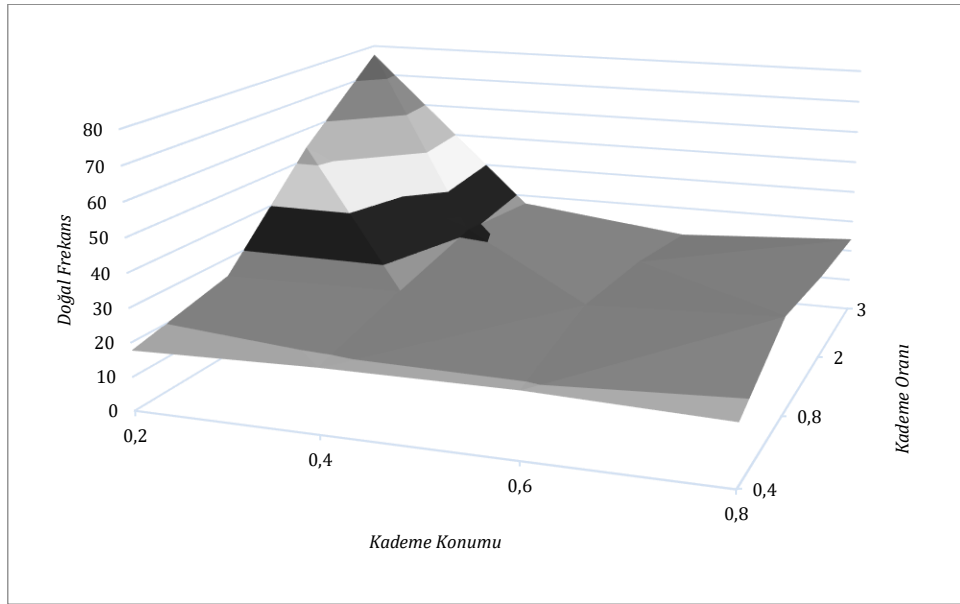


Şekil 5. Farklı kademe konumu ve oranlarına göre A-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri

Şekil 4’te A-S mesnetlere sahip tek kademeli kirişteki manyetik alan ve elastik zemin etkileri gösterilmiştir. İncelendiğinde manyetik alan ve elastik zemin katsayılarının artmasıyla doğal frekanslar üzerindeki artışların B-S serbest sınır şartlarına sahip kirişin doğal frekans değerlerindeki artışlardan daha fark edilebilir olduğu görülmüştür. Şekil 5’te ise A-S sınır şartına sahip kirişin kademe konumu ve oranının doğal frekanslar üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Kademe konumu incelendiğinde ankastre mesnetten serbest mesnete doğru olan geçişte doğal frekans değerlerinde bir azalma olduğu fakat kademe durumunun serbest uç kısma yakın olması durumunda doğal frekansların az miktarda arttığı fark edilmiştir. Kademe oranları incelendiğinde kademe oranındaki artışın doğal frekanslarda artışa sebep olduğu yorumlanabilmektedir. Şekil 6 ve 7’de S-S sınır koşullarına sahip kirişin değişken parametrelere göre doğal frekanslardaki değişimleri gösterilmektedir.



Şekil 6. Farklı manyetik alan ve elastik zemin katsayılarına göre S-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri



Şekil 7. Farklı kademe konumu ve oranlarına göre S-S sınır şartı altındaki doğal frekans değişimleri

Şekil 6'da S-S sınır şartları altındaki kirişin manyetik alan ve elastik zemin katsayılarındaki değişimler irdelenmiştir. Görüldüğü gibi manyetik alan ve elastik zemin katsayılarındaki artışların doğrusal doğal frekans değerlerinin artışına sebep olmaktadır. Kademe konumu ve oranı ise Şekil 7'de sunulmuştur. İki ucunda serbest sınır şartına sahip olması etkilerin daha net fark edilmesini sağladığı yorumlanmaktadır. Şekil 7'de görüldüğü gibi kademe konumu kiriş uçlarına yaklaşması durumunda doğal frekans değerleri artmakta orta konuma yakın durumlarda ise azaldığı görülmektedir. Bu durumun özellikle yüksek kademe oranına sahip kademe konumunun 0.2 olduğu değerinde çok daha belirgin olduğu fark edilmiştir. Söz konusu durum literatürdeki çalışmalara Bağdatlı vd. (2009), Özkaya ve Tekin (2007) paralellik göstermektedir. Ayrıca kademe oranlarındaki artışın doğal frekansları arttırdığı görülmüştür.

4. Sonuç ve Tartışma (Result and Discussion)

Sunulan çalışmada tek kademeli kirişin doğrusal titreşim davranışları üzerinde durulmuştur. Kademeli kirişin manyetik alan içerisinde olduğu ve doğrusal elastik zemin üzerine yerleştirildiği simüle edilmiştir. Ayrıca kirişin farklı kademe oranları ve konumlarına sahip olduğu modellenmiştir. Çalışmanın zenginliğinin artırılması adına farklı mesnet türlerinin etkileri irdelenmiştir. Sonuçlar genel olarak yorumlandığında manyetik alan etkisinin artması doğal frekanslar üzerinde net bir artışa sebep olmaktadır. Benzer durumun doğrusal elastik zemin katsayısı için geçerli olduğu grafikler incelendiğinde söylenebilmektedir. Açıklanan iki durumun A-S sınır koşullarına sahip kiriş modelinde daha belirgin olduğu belirtilmiştir. Kademe konumu ve oranları incelendiğinde

doğal frekansların değişimi bu iki değişken parametre ile doğrusal bir ilişkiye sahip olmadığı görülmüştür. Kademe oranındaki değişikliğin doğal frekanslar üzerinde kademe konumundaki değişiklikten daha etkili olduğu yorumlanmaktadır. Genel olarak incelendiğinde kademelerin serbest uca yakın olunması durumunda doğal frekans değerlerinde düşüş olduğu görülmüştür. Fakat her üç durum içinde en yüksek doğal frekans değerleri kademe oranının en yüksek kademe konumunun en düşük olduğu değerlerde elde edilmiştir.

Tesekkür (Acknowledgement)

Bu çalışma herhangi bir kurum ya da kuruluş üzerinden desteklenmemektedir. This research is not supported by any institution or organization.

Çıkar Çatışması (Conflict of Interest)

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir. No conflict of interest was declared by the authors.

Kaynaklar (References)

- Arani, A. G., Dashi, P., Amir, S., Yousefi, M., 2015. Nonlinear vibration of coupled nano- and microstructures conveying fluid based on Timoshenko beam model under two-dimensional magnetic field. *Acta Mech*, 226, 2729–2760. doi:10.1007/s00707-015-1342-2
- Atcı, D., 2021. Free vibrations of nanobeams under non-ideal supports based on modified couple stress theory. *Z Naturfr. A*, 76(5), 427–434. <https://doi.org/10.1515/zna-2020-0335>
- Atcı, D., Bağdatlı, S. M., 2017. Vibrations of fluid conveying microbeams under non-ideal boundary conditions. *Microsyst Technol.*, 23, 4741–4752. <https://doi.org/10.1007/s00542-016-3255-y>
- Atcı, D., Bağdatlı, S. M., 2018. Principle parametric resonance of fluid conveying microbeams under non-ideal boundary conditions. *El-Cezerî J Sci Eng*, 5(2), 671–680.
- Bağdatlı, S. M., Özkaya, E., Özyiğit, H. A., Tekin A., 2009. Nonlinear vibrations of stepped beam systems using artificial neuralnetworks. *Structural Engineering And Mechanics*, 33(1), 15-30. doi: 10.12989/sem.2009.33.1.015
- Bert, C.W., Newberry, A.L., 1986. Improved finite element analysis of beam vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 105(1), 179-183.
- Chang, T-P., 2016. Nonlinear free vibration analysis of nanobeams under magnetic field based on nonlocal elasticity theory. *Journal of Vibroengineering*, 18(3). ISSN 1392-8716 <http://dx.doi.org/10.21595/jve.2015.16751>
- Cheng, P., Davila, C., Hou, G., 2014. Static, Vibration Analysis and Sensitivity Analysis of Stepped Beams Using Singularity Functions, 234085. <https://doi.org/10.1155/2014/234085>
- Chicurel R. and Suppiger E., 1961. A tabular collocation method for beam vibration. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME* 83, 373-376. <https://doi.org/10.1115/1.3664534>
- Esen, I., Abdelrhmaan, A.A., Eltaher, M.A., 2022. Free vibration and buckling stability of FG nanobeams exposed to magnetic and thermal fields. *Engineering with Computers* 38, 3463–3482. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01389-5>
- Jandaghian A. A., Rahmani O., 2016. Free vibration analysis of magneto-electro-thermoelastic nanobeams resting on a Pasternak foundation. *Smart Mater. Struct.*, 25, 035023.
- Jang, S. K., and Bert, C. W., 1989. Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 130(2), 342–346. doi:10.1016/0022-460x(89)90561-0
- Kural, S., 2018. Investigation of 3:1 and 2:1 internal resonances in fluid conveying microbeam. *Tech J.*, 12(1), 18–26. <https://doi.org/10.31803/tg-20180131225708>
- Kural, S., 2020. Effect of spring mid-support condition on the vibrations of the axially moving string. *Int Adv Res Eng J.*, 4(3), 191–199. <https://doi.org/10.35860/iaej.757503>
- Kural, S., Özkaya, E., 2015. Size-dependent vibrations of a micro beam conveying fluid and resting on an elastic foundation. *J Vib Control*, 23(7), 1106–1114. <https://doi.org/10.1177/1077546315589666>
- Lee, J., Bergman, L. A., 1994. The vibration of stepped beams and rectangular plates by an elemental dynamic flexibility method. *Journal of Sound and Vibration*, 171(5), 617–640. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1145>
- Lu Z. R., Huang M., Liu, J. K., Chen, W. H., Liao, W. Y., 2009. Vibration analysis of multiple-stepped beams with the composite element model. *Journal of Sound and Vibration*, 322 (4-5), 1070–1080.
- Naguleswaran, S., 2003. Vibration and stability of an Euler–Bernoulli beam with up to three-step changes in cross-section and in axial force. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(9), 1563-1579.
- Nalbant, M. O., Bağdatlı, S. M., Tekin, A. 2023. Free Vibrations Analysis of Stepped Nanobeams Using Nonlocal Elasticity Theory. *Scientia Iranica*. 10.24200/sci.2023.61602.7395.
- Nešić N., Kozić P., Janevski G., 2022. Modes Of Non-Homogeneous Damped Beams On A Winkler-Type Elastic Layer. *Innovative Mechanical Engineering*, 2(1), 130-152.
- Özkaya, E., Tekin, A., 2007. Nonlinear vibrations of stepped beam system under different boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 27 (3), 333–345. <https://doi.org/10.12989/SEM.2007.27.3.333>
- Taleb, N. J., Suppiger, E. W., 1961. Vibrations of stepped beams. *Journal of Aerospace Engineering*, 28, 295-298.
- Tang, Y., Ma, Z-S, Ding, Q., Wang, T., 2021. Dynamic interaction between bi-directionally functionally graded materials and magneto-electro-elastic fields: A nano-structure analysis. *Composite Structures*. 264, 113746. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113746>

- Taşkın, V., Varserin, İ., Demirhan, P. A., 2021. Değişken Kesitli Kirişlerin Genel Sınır Şartları İçin Titreşim Analizi. Trakya Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 22(2), 73-86.
- Tekin, A., Özkaya, E., Bağdatlı, S. M., 2009. Three-to-one internal resonance in multiple stepped beam systems. Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. 30(9), 1131-1142. doi: 10.1007/s10483-009-0907-x
- Wang, J., 1991. Vibration of stepped beams on elastic foundations. Journal of Sound and Vibration, 149(2), 315-322. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90640-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90640-6)
- Yapanmış, B. E., Bagdatlı S. M., 2022. Investigation of the nonlinear vibration behaviour and 3:1 internal resonance of the multi supported nanobeam. Z Naturfr A. <https://doi.org/10.1515/zna-2021-0300>.
- Yapanmış, B. E., 2022. Nonlinear Vibration and Internal Resonance Analysis of Microbeam with Mass Using the Modified Coupled Stress Theory. Journal of Vibration Engineering and Technologies, <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00694-7>