ULUBORLU MESLEKİ BİLİMLER DERGİSİ (UMBD)
Uluborlu Journal of Vocational Sciences

http://dergipark.gov.tr/umbd

SÜREKLİ ORTAMLAR MEKANİĞİNİN BÜNYE DENKLEMLERİNİN BELİRLENMESİNDE İNVARYANTLARIN KULLANILMASI

Bekir AKSOY[1*], Mustafa Reşit USAL [2]

[1*]Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye.
[2] Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye.

[*]Sorumlu Yazar: bekiraksoy@isparta.edu.tr

(**Geliş/Received:** 13.01.2023; **Kabul/Accepted:** 20.02.2023)

ÖZET: Mühendislik malzemelerinin bünye denklemleri ve bu bağıntılardaki invaryant parametreler çağdaş sürekli ortamlar mekaniğine önemi gün geçtikçe artan bir öneme sahiptir. Bir sürekli ortamın davranışını matematiksel olarak ifade edebilmek için serbest enerjisinin bağlı olduğu argümanlar ifade edildikten sonra, argümanların invaryant formlarının tespit edilmesi gerekmektedir. Bu argümanlar genellikle simetrik ve/veya anti simetrik matrisler ya da polar vektörler şeklindedir. Gerçekleştirilen çalışmada vektörlerin ve tensörün invaryantları, indirilebilen ve indirgenemeyen invaryantların yanında tamlık bazları da incelenmiştir. Çalışmada Cayley-Hamilton teoreminin invaryantlar teorisine uygulamaları incelenmiştir. Uygun ortogonal grup için tamlık bazlarını oluşturan matris çarpımlarının trace değerleri dört adet simetrik matris için çizelge halinde verilmiştir. Son aşamada ise simetrik matrislerin invaryant değerleri MATLAB programı aracılığıyla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Anizotropi, Bünye Denklemleri, İnvaryantlar, İzotropi, MATLAB Programlama, Ortogonal Gruplar, Tamlık Bazları.

INVARIANTS TO DETERMINE CONSTITUTIVE EQUATIONS OF CONTINUUM MECHANICS

ABSTRACT: The constitutive equations of engineering materials and the invariant parameters in these relations have an increasing importance in contemporary continuum mechanics. In order to express the behavior of a continuum mathematically, after the arguments on which the free energy depends, the invariant forms of the arguments must be determined. These arguments are usually in the form of symmetric and/or antisymmetric matrices or polar vectors. In this study, invariants of vectors and tensors, in addition to reducing and irreducible invariants, were also investigated. In this study, the applications of Cayley-Hamilton theorem to the theory of invariants are examined. The trace values of the matrix multiplications that form the completeness bases for the appropriate orthogonal group are tabulated for four symmetrical matrices. In the last stage, invariant values of symmetric matrices were obtained through the MATLAB program

Keywords: Anisotropy, Constitutive Equations, Invariants, Isotropy, MATLAB Programming, Orthogonal Groups, Completeness Bases.

1.GİRİŞ

Bilimsel araştırmalarda invaryant parametrelerin belirlenmesi oldukça önemlidir. İnvaryant parametre incelenen proses için değişmeyen parametre anlamına gelmektedir. Mühendislik problemlerinde değişen parametreler değişmeyen parametreleri dikkate alarak belirlenmektedir. Örneğin bir matriste köşegen elemanlarının toplamı invaryant bir parametredir. Farklı alan büyüklükleri arasında geçerli olan malzemenin yapısal özeliklerinden kaynaklanan bünye denklemlerinin belirlenmesinde önemli olan konulardan birisi de izotrop ortamlar için invaryant parametrelerin belirlenmesidir. İnvaryant; bir vektör veya tensörün bileşenlerinden meydana gelen ve koordinat dönüşümünden etkilenmeyen büyüklüklülere verilen bir isimdir. Literatürde tamlık bazları, invaryantlar ve jeneratörlere ait bir çizelge ile vektörel ve tensörel formların invaryantları matematiksel olarak detaylı bir şekilde verilmiştir [1]. Matematiksel olarak elde edilen invaryant parametrelerinin bulunduğu vektör ve tensör değerli fonksiyonların temsilinde ise polinomlardan yararlanılmaktadır [2-3].

1.1. Vektörlerin ve Tensörlerin İnvaryantları

Gerçekleştirilen çalışmada üç boyutlu öklid uzayında kullanılan vektörler ve tensörler incelenmiştir. Bu nedenle de çalışmada ikinci dereceden simetrik ve anti simetrik tensörler kullanılmıştır. Çalışmada özel vektör olarak $\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{W}$ ve dik kartezyen koordinat sisteminde (X_i, $i = 1,2,3$) bileşenleri ise U_i, V_i, W_i ile ifade edilecektir. Vektör cümlesi ise o vektör ailesine ait bir jenerik olarak U_r ile ifade edilecektir. Bu jenerik vektörün X_i sistemindeki bileşenleri ise $U_i^{(r)}$şeklinde gösterilecektir. $\widetilde{U}$ vektörü ile ilişkili bir anti simetrik matris $\underset{=}{u}$ matrisi denklem 1a ve denklem 1b'de tanımlanmıştır.

$$\underset{=}{u} = \left[u_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} \\ -u_{12} & 0 & u_{23} \\ -u_{13} & -u_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

$$u_{ij} = e_{ijk} U_k \tag{1b}$$

Denklemde e_{ijk} üçüncü dereceden permütasyon tensörü olup i, j, k indisleri için çift permütasyonlarında $e_{ijk} = 1$, tek permütasyonlarında $e_{ijk} = -1$ iken diğer tüm durumlarda ise $e_{ijk} = 0$ olmaktadır. Denklem 1'de verilen matematiksel ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} (U_{ij})e_{ijl} &= (e_{ijk}U_k)e_{ijl} \\ U_{ij}e_{ijl} &= 2\delta_{kl}U_k \\ U_l &= \tfrac{1}{2}U_{ij}e_{ijl} \end{aligned} \tag{2}$$

Benzer bir biçimde anti simetrik bir $\underset{=}{U}_r$ matrisin elemanları $U_{ij}^{(r)}$ ve bileşene ait vektör ise $\underset{\sim}{U}_r$ ile gösterilecektir. Matrislerin simetrik ya da anti simetrik olmasına bakmaksızın X_i sistemindeki ikinci dereceden tensör bileşenleri; $m_{ij}, n_{ij}, \dots, t_{ij}$, simetrik tensör bileşenleri

$a_{ij}, b_{ij}, \ldots, f_{ij}$, antisimetrik tensör bileşenleri x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} ile gösterilirken genel simetrik ve antisimetrik tensörlerin bileşenleri ise $p_{ij}^{(r)}, a_{ij}^{(r)}, x_{ij}^{(r)}$ sembolleri ile ifade edilmiştir. Bu notasyonu kullanarak yukarıda belirtilen tensörlerin $3x3$ boyutundaki matris formları da denklem 3 de verilmiştir.

$$\underline{\underline{m}} = [m_{ij}], \underline{\underline{a}} = [a_{ij}], \underline{\underline{x}} = [x_{ij}], \underline{\underline{p}}_r = [p_{ij}^{(r)}], \underline{\underline{a}}_r = [a_{ij}^{(r)}], \underline{\underline{x}}_r = [x_{ij}^{(r)}] \quad (3)$$

1.1.2 İndirgenebilen ve İndirgenemeyen İnvaryantların Tamlık Bazları

İnvaryantlar teorisinde başlıca problemlerden birisi de değişkenler cümlesi vektörler ve tensörler olan bir grup transformasyon için invaryant cümlelerini tespit edebilmektir. Bu cümle kullanılarak diğer invaryantlar tespit edilebilir ve fazladan tekrarlanan hiçbir eleman içermez. Bu çalışmada bağımsız değişkenleri invaryantlar olan polinomsal invaryantlar kullanılmıştır. Verilen cümle elemanlarında polinom olarak ifade edilebilen herhangi bir polinomsal invaryantın cümlesi tamlık bazı olarak adlandırılmaktadır. En az sayıda eleman içeren tamlık bazlarına ise minimal tamlık bazı adı verilir ve elemanları indirgenemez.

İlk olarak tensörel hesabın matris cebri ve invaryantlar ile olan ilgisinden dolayı matris cebrine ait temel tanımlar verilerek matris polinomları Cayley-Hamilton teoremi ile ifade edilmiştir. İkinci aşamada ise vektör ve tensörlerin invaryantlarına ait indirgenebilen ve indirgenemeyen invaryantların tamlık bazları belirlenmiştir. Üçüncü aşamada ise ortogonal gruplar için belirli alt gruplara göre izotropi, transvers izotropi ve kristal sınıfları ifade edilmiştir. Bir sonraki aşamada ise matris polinomlarının tracelerini (izlerini) ilgilendiren sonuçlar vektörel, simetrik ikinci dereceden tensörlerin invaryantları belirlenmiştir. Beşinci aşamada vektörlerin ve tensörlerin polinomsal fonksiyonları açıklandıktan sonra sürekli ortamlar mekaniği içerisinde oluşturulan formların bünye denklemlerinde nasıl kullanıldığı MATLAB programında uygulamalı olarak verilmiştir.

Gerçekleştirilen çalışmada da invaryant parametrelerin özelliklerine ve kullanımına ait örnek bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışmada ilk olarak sürekli ortamlar mekaniğinde sıklıkla kullanılan simetrik matris formlara ait invaryant parametreler incelenmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında ise MATLAB programı kullanılarak simetrik olarak belirlenen bir, iki, üç ve dört matrise ait sembolik tanımlamalar yapılarak sembolik formda trace değerlerine ait sonuçlar verilmiştir.

2. İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Gerçekleştirilen çalışma ile ilgili akademik literatür incelendiğinde sürekli ortamlar mekaniği kapsamında invaryantlar teorisi ile ilgili ilk ve önemli çalışma Rivlin ve Ericksen tarafından gerçekleştirilmiştir. Çalışmada izotropik malzemelerin gerilme deformasyon bağıntıları, deformasyon kinematiği, izotropik malzemede gerilme kavramı ve transformasyonları yer değiştirme gradiyentlerine göre incelenerek matris cebri kullanılarak invaryantlar ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir [4]. Bir diğer çalışmada ise matris polinomları ve izotropik sürekli ortamlar mekaniğinde çoklu matrislere ait tamlık bazları ifade edilerek Peona teoreminin izotropik matris polinomlarına uygulanması incelenmiştir [5]. Adkins çalışmalarında sürekli ortamın mekaniğinde ortotropik ve izotropik malzemelerin simetri ilişkilerini inceleyerek gerilme ve deformasyon tensörlerine dayalı sürekli ortamlarının mekanik davranışlarını tanımlamada polinomsal bağıntıları kullanmıştır [6,7]. Korkmaz, tek fiber ailesi ile takviye edilmiş elastik ve mikro boşluklu malzemenin lineer olmayan davranışı modern sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. İnvaryantlar teorisini kullanarak fiber takviyeli mikro boşluklu elastik bir malzemenin lineer olmayan mekanik davranışını belirleyen bünye denklemleri elde edilmiştir. invaryantlarına göre türevlerinin hesabında deformasyon tensörünün birinci ve ikinci merteben terimleri alınarak gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemlerinin daha somut bir şekli ortaya konmuştur [8]. Usal, elastik dielektrik hasarlı malzemelerin bünye denklemlerine ait genel ifadeler sürekli ortam hasar mekaniğinin temel yasalarından türetilmiştir. Sonuç olarak, gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinat sisteminde elde edilmiştir [9].

3. MATERYAL ve METOT

Çalışmanın materyal matris polinomlarının trace yapıları ve simetrik ikinci mertebeden tensörlerin invaryantları başlıklarından oluşmaktadır.

3.1. Materyal

3.1.1 Matris polinomlarının trace yapıları

Çalışmada indirgeme işlemlerinde kullanılacak olan matris ve polinomlar için sonuçlar ifade edilecektir (Spencer, 1971). Çalışmada sıklıkla simetrik ve anti simetrik olmayan 3x3 boyutlu matrisler kullanılmıştır. $\underline{\underline{m}}=[m_{ij}],\ \underline{\underline{n}}=[n_{ij}]\ ...\ [t_{ij}]$ 3x3 boyutlu matris olmak üzere bu matrislerin herhangi bir matris çarpım sonuçların ait matematiksel ifade denklem 4'de verilmiştir.

$$\underline{\underline{\prod}}=\underline{\underline{m}}^{\alpha_1}\underline{\underline{n}}^{\beta_1}...\underline{\underline{t}}^{\delta_1}\underline{\underline{m}}^{\alpha_2}\underline{\underline{n}}^{\beta_2}...\underline{\underline{t}}^{\delta_2}...\underline{\underline{m}}^{\alpha_r}\underline{\underline{n}}^{\beta_r}...\underline{\underline{t}}^{\delta_r} \tag{4}$$

Yukarıda verilen denklemde herhangi bir dereceden matrisin sonlu sayıda ardışık çarpımıyla elde edilmiştir. Denklemdeki $\alpha_1, \beta_1, ...\ , \delta_r$ indisleri pozitif tamsayılar veya sıfırdır ayrıca hiçbir zaman iki komşu faktörün aynı matris kuvveti şeklinde yazılmamıştır. $\underline{\underline{\prod}}$ çarpımın derecesi; $\underline{\underline{m}},\underline{\underline{n}},...,\underline{\underline{t}}$ matrislerine göre denklem 5'de verilen matematiksel ifade kullanılmaktadır.

$$\alpha_1+\beta_1+...+\delta_1+\alpha_2+\beta_2+...+\delta_2+\alpha_r+\beta_r+...+\delta_r \tag{5}$$

$\underline{\underline{m}}$ matrisine göre $\underline{\underline{\prod}}$'nin derecesi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r$ 'dir. $\underline{\underline{n}}$ matrisine göre ise $\beta_1+\beta_2+...+\beta_r$ 'dir. $\underline{\underline{m}},\underline{\underline{n}},...,\underline{\underline{t}}$'ye göre matris polinomlarının skaler katsayıları $\underline{\underline{m}},\underline{\underline{n}},...,\underline{\underline{t}}$ matrislerinin elemanlarına göre polinomlar olan ve denklem 4'de verilen sonlu sayıdaki elemanların toplamına eşittir. Polinom derecesi ise en yüksek dereceli terim olan $\underline{\underline{m}}$ 'li terimin derecesidir.

Bir matris ya da polinomun tracesi onun ana köşegeni üzerindeki elemanların toplamına eşittir. Denklem 6'da $\underline{\underline{P}}$ matrisinin trace değeri için matematiksel eşitlik verilmiştir.

$$\underline{\underline{P}}=P_{ij}$$
$$tr\underline{\underline{P}}=[P_{ii}] \tag{6}$$

Şeklinde ifade edilmektedir. $\underline{\underline{P}}$ matrisinin trace değeri ise skaler bir değerdir. Eğer matris çarpımı olarak ifade edilen $\underline{\underline{\prod}}$ ifadesi dikkate alınarak denklem 7'de verilen matematiksel ifade elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{\prod}} = \underline{\underline{m}}\ \underline{\underline{n}}\ \underline{\underline{p}} \ldots \underline{\underline{s}}\ \underline{\underline{t}}, \\ &\prod_{ij} = m_{ik}\ n_{kl}\ p_{lq} \ldots s_{bc}\, t_{cj} \end{aligned} \tag{7}$$

Olarak ifade edilebilmektedir. Denklem 7'de verilen matrisin trace değeri denklem 8'de verilmiştir.

$$tr\underline{\underline{\prod}} = \prod_{ii} = m_{ik}\ n_{kl}\ p_{lq} \ldots s_{bc}\, t_{ci} \tag{8}$$

Şeklinde ifade edilmektedir. Denklemde verilen $\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, \ldots, \underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}$ değerlerinin farklı olması şart değildir. Denklem 8'in sağ tarafında ifade olan $\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, \ldots, \underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}$ matrislerin dairesel permütasyonu ile değişmemektedir. Bu durum denklem 9'da verilen matematiksel ifade ile gösterilmiştir.

$$tr\underline{\underline{\prod}} = tr\, \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}} \ldots \underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}} = tr\, \underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}} \ldots \underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{m}} = tr\, \underline{\underline{p}} \ldots \underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}} \tag{9}$$

Matris çarpımlarının ve polinom tracelerini daha düşük dereceden matris çarpımlarının traceleri türünden polinomlar şeklinde ifade edilip edilemediği araştırılmıştır. Birçok durumda kesin bir form kullanılmamakla beraber böyle bir ifadenin mevcut olduğunu bilmek çalışma için yeterli olacaktır. Bu durum denklem 10'da verilen notasyon ile ifade edilmektedir.

$$tr\,\underline{\underline{P}} = 0 \tag{10}$$

Denklem 10'da ifade edilen notasyonu $tr\,\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{P}}$ 'nin derecesinin daha düşük dereceden matris çarpımlarının traceleri cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilmektedir. Denklem 9'da verilen matematiksel ifade de indirgenebilir bir invaryant olan $tr\,\underline{\underline{P}}$ olarak ifade edilmektedir.

Bir çarpım matris çarpımın tracesi çarpım faktörlerini dairesel bir değişim ile değiştirilemez. Aynı zamanda transpoze alma işlemi matrisin ana köşegenindeki yer alan elemanları etkilemez. Denklem 6’da verilen tanımın bir sonucu olarak şunu ifade edebiliriz: bir matris çarpımının tracesi bu çarpımın transpozesinin tracesine eşittir.

Matris çarpımların ve polinomların tracelerini daha düşük dereceden matris çarpımların traceleri cinsinden polinomlar şeklinde ifade etmenin mümkün olup olmadığını araştıracağız. Birçok durumda böyle bir ifadenin alınan veya elde edilen kesin bir form ile ilgilenmeyeceğiz; genellikle böyle bir ifadenin mevcut olduğunu bilmek bizim için yeterli olacaktır. Böylece, denklem 11’de verilen form elde edilecektir.

$$tr\,\underline{\underline{P}} \equiv 0 \tag{11}$$

Notasyonunu ifade edecek duruma gelmiş oluruz. Bu notasyonuna daha açık anlamını şöyle ifade edebiliriz: $tr\,\underline{\underline{P}} = 0$, $\underline{\underline{P}}$’nin derecesinden daha düşük dereceden matris çarpımlarının traceleri cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir. Eğer matris çarpımların traceleri tartışma konusu olan içerikteki invaryantlar ise denklem 11'de verilen indirgenebilir bir invaryant olan $tr\,\underline{\underline{P}}$ bir ifade halini alır. Eğer $\underline{\underline{P}}_1$ ve $\underline{\underline{P}}_2$ aynı dereceden matris polinomları ise denklem 12'de verilen matematiksel eşitlikte de görüldüğü gibi bu iki matrisin trace değerleri birbirine eşittir.

$$tr\,\underline{\underline{P}}_1 - tr\,\underline{\underline{P}}_2 = 0 \tag{12}$$

Denklem 12'de verilen matematiksel eşitlik çoğunlukla cebirsel invaryantlar teorisinde kullanılmaktadır. Cayley-Hamilton teoremine göre $3x3$ boyutundaki bir $\underline{\underline{m}}$ matrisi için denklem13'te verilen eşitlik kullanılmaktadır.

$$\underline{\underline{m}}^3 - \underline{\underline{m}}^2\, tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{m}}\left[\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^2 - tr\underline{\underline{m}}^2\right] - \underline{\underline{I}}\det\underline{\underline{m}} = 0 \tag{13}$$

Olarak ifade edilmektedir. Denklemde $\underline{\underline{I}}$ $3x3$ boyutlu birim matrisini $\det\underline{\underline{m}}$ ise $\underline{\underline{m}}$ matrisinin determinantını ifade etmektedir. Denklem 14'de, denklem 13'de verilen eşitliğin trace hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} &tr\underline{\underline{m}}^3 + tr\underline{\underline{m}}^2\, tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{m}}\right)\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{m}}\right)tr\underline{\underline{m}}^2 - tr\underline{\underline{I}}\det\underline{\underline{m}} = 0 \\ &tr\underline{\underline{m}}^3 - \frac{3}{2}tr\underline{\underline{m}}^2\, tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^3 - 3\det\underline{\underline{m}} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Denklemde $\det\underline{\underline{m}}$, $tr\underline{\underline{m}}$, $tr\,\underline{\underline{m}}^2$ ve $tr\,\underline{\underline{m}}^3$ ifadeleri de birer polinom olarak ifade edilebilir. Denklem 15'te denklem 14'de verilen matematiksel ifade kullanılarak $\det\underline{\underline{m}}$ elde edilmiştir.

$$\det\underline{\underline{m}} = \frac{1}{3}\left\{tr\underline{\underline{m}}^3 - \frac{3}{2}tr\underline{\underline{m}}^2\, tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^3\right\} \tag{15}$$

Denklem 13'te verilen ifade $\underline{\underline{p}}$ matrisi ile çarpılıp trace alınarak denklem 16'da verilen matematiksel eşitlik elde edilmiştir.

$$\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}} - \underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\left[\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^2 - tr\underline{\underline{m}}^2\right] - \underline{\underline{p}}\det\underline{\underline{m}} = 0$$

$$tr\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}} + tr\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,tr\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}tr\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\left[\left(tr\underline{\underline{m}}\right)^2 - tr\underline{\underline{m}}^2\right] - \underline{\underline{p}}\det\underline{\underline{m}} = 0 \qquad (16)$$

Denklem 16'da verilen notasyonda denklem 17'de verilen eşitlik yazılabilir.

$$tr\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}} \equiv 0 \qquad (17)$$

Denklem 17'den elde edilen sonuç denklem 10'da verilen bir terim diğerleri cinsinden ifade edilebilir yaklaşımı ile ifade edilebilir. Aynı mantıksal yaklaşımı kullanarak denklem 16 verilen eşitliği $\underline{\underline{q}}$ ile çarpıp ifadenin trace alınırsa denklem 18'de verilen eşitlik bulunur.

$$tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}) \equiv 0 \qquad (18)$$

Denklemi elde edilir. Denklem 18 kısaca özeti denklem 19'da verilmiştir.

$$\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}} = \sum \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}} \qquad (19)$$

Denklem 18'de verilen ifade denklem 20'de olduğu gibi genel bir formda yazılabilmektedir.

$$tr\left(\sum \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\right)\underline{\underline{q}} \equiv 0 \qquad (20)$$

3.1.2. Simetrik ikinci mertebeden tensörlerin invaryantları

Simetrik ikinci mertebeden bir $\underline{\underline{a}}$ matrisin invaryantlarını denklem 21'de verilmiştir.

$$tr\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^3 \qquad (21)$$

Şeklinde ifade edilmekte ve bunların hiçbiri diğer matrislerin terimleri ile açıklanamamaktadır. Simetrik ikinci mertebeden $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}$ matrislerinin invaryantları ise denklem 22'de verilmiştir.

$$tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},\ tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2,\ tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2,\ tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2,\ tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2 \tag{22}$$

Olarak ifade edilmektedir. Denklem 22'de verilen sonuncu terim olan, $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2$ değerini dairesel permütasyonu göz önüne alarak $tr\underline{\underline{b}}^2\left(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\right)$ formunda yazılabilmektedir. Dairesel permütasyona bağlı kalmadan sadece parantez içeresindeki terimin sırasına ters çevrilirse denklem 23’te de görüldüğü gibi invaryantın sadece işareti değişmektedir.

$$tr\underline{\underline{b}}^2\left(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\right) = -tr\underline{\underline{b}}^2\left(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\right) \tag{23}$$

Denklem 23’te verilen negatif işaretli terim dairesel permütasyon gereğince denklem 24’te gösterildiği gibi yazılabilmektedir.

$$-tr\underline{\underline{b}}^2\left(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\right) = -tr\left(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\right)\underline{\underline{b}}^2 = -tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \tag{24}$$

$tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2$ teriminde yer alan matrislerin transpozeleri alındıktan sonra trace değerlerini denklem 25’te gösterilmiştir.

$$tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 = tr\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}} = tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \tag{25}$$

Denklem 24 ve denklem 25 ifadeleri dikkate alınarak denklem 26'da verilen eşitlikler oluşturulabilmektedir.

$$tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2 = -tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 = tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \tag{26}$$

Denklem 26'da dikkat edilecek olursa matematiksel bir tutarsızlık olduğu görülmektedir. Pozitif bir değer kendi kendine negatif bir değere eşit olamayacağı için bu belirsizliği ortadan kaldırmanın tek yolu $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2$ değerini sıfıra eşitlemektir. Bu durumda ikinci mertebeden iki simetrik matris için geriye kalan terimler denklem 27'de verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&tr\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^3 \\
&tr\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}^3 \\
&tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Simetrik ikinci mertebeden $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ matrislerinin invaryantlar için denklem 27'de verilen iki matris için invaryant değerlerine ek olarak denklem 28'de verilen matris sonuçlarının da trace değerlerinin dikkate alınması gerekmektedir.

$$
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\; tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\; tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}},\; tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}},\; tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2,\; tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}
\tag{28}
$$

Denklem 28'de verilen değerlere ek olarak matris çarpımlarının dairesel permütasyonundan elde edilen trace değerlerini de değerlendirmek germektedir. Denklem 28'de verilen $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$ ifadesini dikkate alarak bu terimin hem dairesel permütasyonunu hem de transpozesini denklem 29'da verilen eşitlik ile gösterebiliriz.

$$
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}} = tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}} = tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} = tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}} = tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}
\tag{29}
$$

Denklem 29'dan da görüldüğü gibi yalnızca $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$ ifadesinin alınması yeterli olacaktır. Benzer şekilde $tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}} = tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}$ yazılabileceğinden yalnızca $tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$ teriminin alınması, $tr\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}$ ve $tr\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$ terimlerinin eklenmesi yeterli olacaktır. Aynı yaklaşım kullanılarak $tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}$ ve $tr\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}$ invaryantlarının da tamlık bazına eklenmesi diğer invaryantların ise sadeleştirilmesi gerekmektedir. Matris çarpımında yer alan faktörlerin dairesel permütasyona göre değiştirilmesi ve faktörlerin ters sırada yazılması (transpozesi alınarak) sonucu değiştirmemesi düşüncesiyle denklen 30'da verilen eşitlik yazılabilir.

$$
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}} = -tr\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} = -tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}} = -tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}
\tag{30}
$$

İfadesi yazılabilmektedir. Buradan $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}} \equiv 0$ ve bu terimle $\underline{\underline{b}}$'nin yerine $\underline{\underline{b}}^2$ yazılırsa $tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}} \equiv 0$ ifadesi elde edilebilmektedir. Sonuç olarak çarpım faktörlerinin değişimleri ve transpozelerinden faydalanılarak denklem 31'de verilen sonuç elde edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} 2tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2 &= tr\left(\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2+\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\right)\equiv -tr\underline{\underline{a}}^2\left(\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}\right) \\ &=-tr\left(\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2\right)\underline{\underline{b}}^2\equiv 0 \end{aligned} \tag{31}$$

İfadesi elde edilmektedir. Böylece tamlık bazında alınması gereken invaryantları denklem 32'deki gibi yazılabilmektedir.

$$tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}} \tag{32}$$

Denklem 32'de yer alan $tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$ terimleri dairesel permütasyona göre değişmektedir. Matematiksel ifadeleri kısaltabilmek adına bu üç terim yerine $tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^*$ yazılacaktır. Burada $\underline{\underline{c}}$ matrisinin üzerinde yer alan "*" üst indisi dairesel permütasyona göre değiştirilip yazıldığını ifade etmektedir. Aynı mantığa göre $tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}$ terimlerinin yerine de $tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^*$ ile gösterilecektir. Denklem 33'de üç simetrik matrise ait tüm invaryantların listesi verilmiştir.

$$\begin{aligned} &tr\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{a}}^2,tr\underline{\underline{a}}^3 \\ &tr\underline{\underline{b}},tr\underline{\underline{b}}^2,tr\underline{\underline{b}}^3 \\ &tr\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{c}}^2,tr\underline{\underline{c}}^3 \\ &tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2,tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2,tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2 \\ &tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2,tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2,tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2 \\ &tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}^2,tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2,tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2 \\ &tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}} \end{aligned} \tag{33}$$

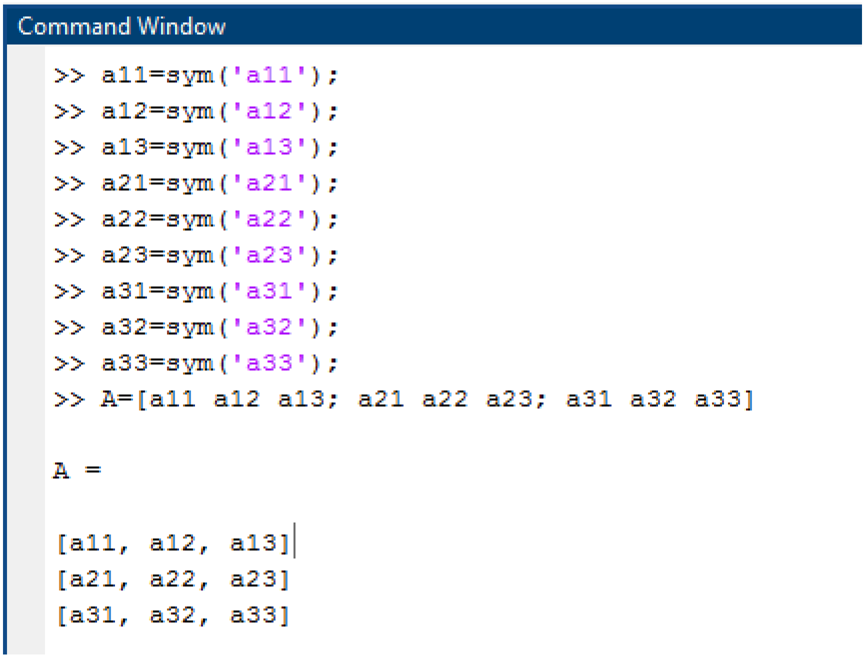
Denklem 33’te verilen üç matris için belirlenen invaryant değerlerini, dört matris için listesi denklem 34'de verilmiştir.

$$
\begin{gathered}
tr\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^3 \\
tr\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}^3 \\
tr\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{c}}^2, tr\underline{\underline{c}}^3 \\
tr\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{d}}^2, tr\underline{\underline{d}}^3 \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2 \\
tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2, tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2 \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}^2, tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2 \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}^2, tr\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}^2, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{d}}^2 \\
tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}^2, tr\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}^2 \\
tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}^2, tr\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}^2 \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}} \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}} \\
tr\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}} \\
tr\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}, tr\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{b}}, tr\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}} \\
tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}} \\
tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}} \\
tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}} \\
tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} \\
tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}
\end{gathered}
\tag{34}
$$

4. BULGULAR

Çalışmanın bulgular kısmında Spencer 1971 kullanılarak elde edilen teorik olarak temelleri verilmiş olan invaryant parametrelerinin MATLAB programı ile uygulamalarına ait sonuçlar verilmiştir [1]. Simetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi için MATLAB programında denklem 35'de verilen sembolik tanımlamalar yapılarak MATLAB programında $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi için elde edilen sonuçlar şekil 1'de gösterilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a21');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
a31=sym('a31');
a32=sym('a32');
a33=sym('a33');
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
```
(35)



```
Command Window
>> a11=sym('a11');
>> a12=sym('a12');
>> a13=sym('a13');
>> a21=sym('a21');
>> a22=sym('a22');
>> a23=sym('a23');
>> a31=sym('a31');
>> a32=sym('a32');
>> a33=sym('a33');
>> A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]

A =

[a11, a12, a13]
[a21, a22, a23]
[a31, a32, a33]
```

Şekil 1. MATLAB programında $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$ matrisinin sembolik olarak tanımı için kod ekranı.

Şekil 1'de sembolik oluşturulan $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$ matrisinin sembolik formda trace değerlerine ait MATLAB komutları ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
>> trA=trace(A)

trA =

a11 + a22 + a33

>> trkareA=trace(A*A)

trkareA =
```

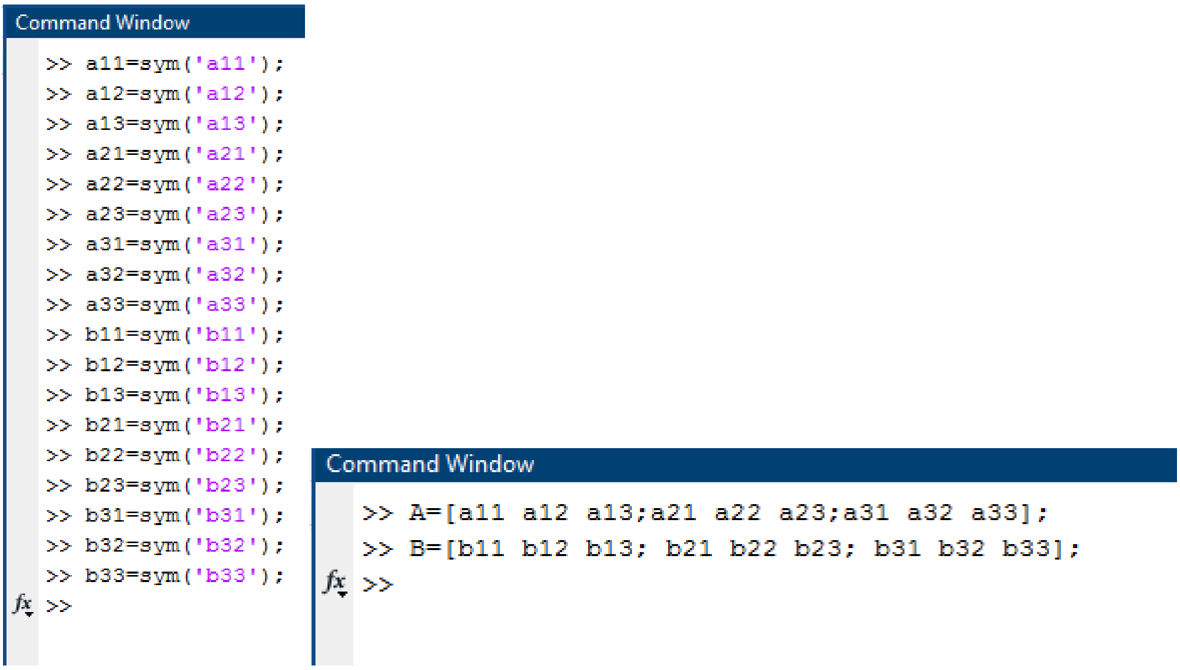
a11^2 + a22^2 + a33^2 + 2*a12*a21 + 2*a13*a31 + 2*a23*a32

>> trkupA=trace(A*A*A)

trkupA =

a11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + a22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + a33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + a21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + a31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33) + a12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + a32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33) + a13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + a23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)

Şekil 2'de de görüldüğü gibi $3x3$ boyutlu simetrik $\underline{\underline{A}}$ ve $\underline{\underline{B}}$ matrisleri için MATLAB programında aşağıda sembolik tanımlamalar yapılmıştır.



Şekil 2. MATLAB programında $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$ ve $\underline{\underline{B}}$ matrisinin sembolik olarak tanımı için kod ekranı

Bir önceki sonuçlarda elde edilen $tr\,\underline{\underline{A}},\ tr\,\underline{\underline{A}}^2$ ve $tr\,\underline{\underline{A}}^3$ sonuçlarına ek olarak $tr\,\underline{\underline{B}}, tr\,\underline{\underline{B}}^2, tr\,\underline{\underline{B}}^3, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2, tr\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2$ ve $tr\,\underline{\underline{A}}^2\,\underline{\underline{B}}^2$ değerleri aşağıda verilmiştir.

>> trB=trace(B)

trB =

b11 + b22 + b33

>> trkareB=trace(B*B)

trkareB =

b11^2 + b22^2 + b33^2 + 2*b12*b21 + 2*b13*b31 + 2*b23*b32

>> trkupB=trace(B*B*B)

trkupB =

b11*(b11^2 + b12*b21 + b13*b31) + b22*(b22^2 + b12*b21 + b23*b32) + b33*(b33^2 + b13*b31 + b23*b32) + b21*(b11*b12 + b12*b22 + b13*b32) + b31*(b11*b13 + b12*b23 + b13*b33) + b12*(b11*b21 + b21*b22 + b23*b31) + b32*(b13*b21 + b22*b23 + b23*b33) + b13*(b11*b31 + b21*b32 + b31*b33) + b23*(b12*b31 + b22*b32 + b32*b33)

>> trAB=trace(A*B)

trAB =

a11*b11 + a12*b21 + a21*b12 + a13*b31 + a22*b22 + a31*b13 + a23*b32 + a32*b23 + a33*b33

>> trABkare=trace(A*B*B)

trABkare =

b11*(a11*b11 + a12*b21 + a13*b31) + b21*(a11*b12 + a12*b22 + a13*b32) + b31*(a11*b13 + a12*b23 + a13*b33) + b12*(a21*b11 + a22*b21 + a23*b31) + b22*(a21*b12 + a22*b22 + a23*b32) + b32*(a21*b13 + a22*b23 + a23*b33) + b13*(a31*b11 + a32*b21 + a33*b31) + b23*(a31*b12 + a32*b22 + a33*b32) + b33*(a31*b13 + a32*b23 + a33*b33)

>> trBAkare=trace(B*A*A)

trBAkare =

a11*(a11*b11 + a21*b12 + a31*b13) + a21*(a12*b11 + a22*b12 + a32*b13) + a31*(a13*b11 + a23*b12 + a33*b13) + a12*(a11*b21 + a21*b22 + a31*b23) + a22*(a12*b21 + a22*b22 + a32*b23) + a32*(a13*b21 + a23*b22 + a33*b23) + a13*(a11*b31 + a21*b32 + a31*b33) + a23*(a12*b31 + a22*b32 + a32*b33) + a33*(a13*b31 + a23*b32 + a33*b33)

>> trAkareBkare=trace(A*A*B*B)

trAkareBkare =

b11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))

Şekil 3'de gösterildiği gibi $3x3$ boyutlu simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ ve $\underline{\underline{C}}$ matrisleri için MATLAB programında aşağıda sembolik tanımlamalar yapılmıştır.

```
Command Window
>> a11=sym('a11');
>> a12=sym('a12');
>> a13=sym('a13');
>> a21=sym('a21');
>> a22=sym('a22');
>> a23=sym('a23');
>> a31=sym('a31');
>> a32=sym('a32');
>> a33=sym('a33');
>> b11=sym('b11');
>> b12=sym('b12');
>> b13=sym('b13');
>> b21=sym('b21');
>> b22=sym('b22');
>> b23=sym('b23');
>> b31=sym('b31');
>> b32=sym('b32');
>> b33=sym('b33');
>> c11=sym('c11');
>> c12=sym('c12');
>> c13=sym('c13');
>> c21=sym('c21');
>> c22=sym('c22');
>> c23=sym('c23');
>> c31=sym('c31');
>> c32=sym('c32');
>> c33=sym('c33');
```

```
Command Window
>> A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]

A =

[a11, a12, a13]
[a21, a22, a23]
[a31, a32, a33]

>> B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]

B =

[b11, b12, b13]
[b21, b22, b23]
[b31, b32, b33]

>> C=[c11 c12 c13; c21 c22 c23; c31 c32 c33]

C =

[c11, c12, c13]
[c21, c22, c23]
[c31, c32, c33]
```

Şekil 3. MATLAB programında $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ ve $\underline{\underline{C}}$ matrisinin sembolik olarak tanımı için kod ekranı.

Simetrik $3x3$ boyutlu olarak verilen $\underline{\underline{A}}$ ve $\underline{\underline{B}}$ matrislerine ek olarak $tr\underline{\underline{C}}, tr\underline{\underline{C}}^2, tr\underline{\underline{C}}^3, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$ ve $tr\,\underline{\underline{A}}^2\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$ değerleri aşağıda verilmiştir.

```
>> trC=trace(C)

trC =

c11 + c22 + c33

>> trkareC=trace(C*C)

trkareC =

c11^2 + c22^2 + c33^2 + 2*c12*c21 + 2*c13*c31 + 2*c23*c32

>> trkupC=trace(C*C*C)

trkupC =
```

c11*(c11^2 + c12*c21 + c13*c31) + c22*(c22^2 + c12*c21 + c23*c32) + c33*(c33^2 + c13*c31 + c23*c32) + c21*(c11*c12 + c12*c22 + c13*c32) + c31*(c11*c13 + c12*c23 + c13*c33) + c12*(c11*c21 + c21*c22 + c23*c31) + c32*(c13*c21 + c22*c23 + c23*c33) + c13*(c11*c31 + c21*c32 + c31*c33) + c23*(c12*c31 + c22*c32 + c32*c33)

>> trAC=trace(A*C)

trAC =

a11*c11 + a12*c21 + a21*c12 + a13*c31 + a22*c22 + a31*c13 + a23*c32 + a32*c23 + a33*c33

>> trABC=trace(A*B*C)

trABC =

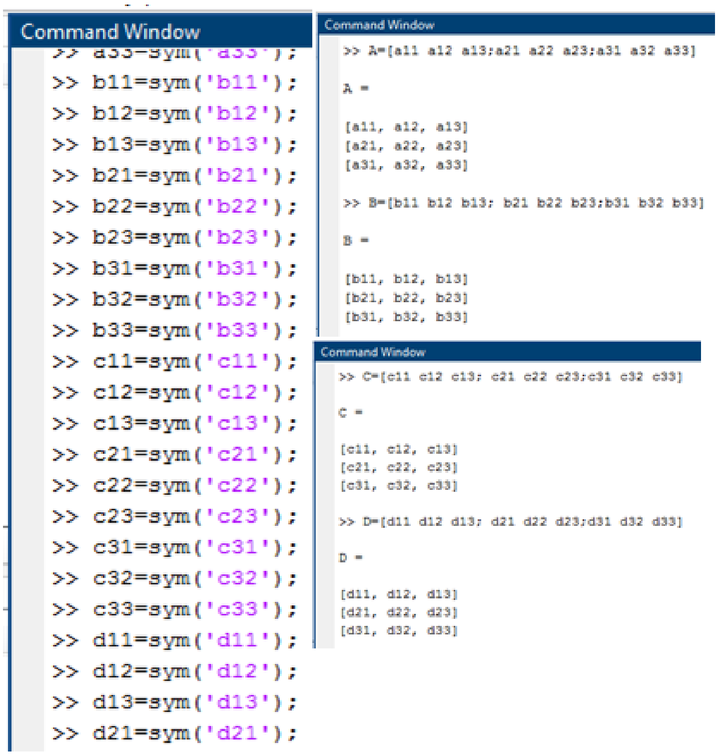
c11*(a11*b11 + a12*b21 + a13*b31) + c21*(a11*b12 + a12*b22 + a13*b32) + c31*(a11*b13 + a12*b23 + a13*b33) + c12*(a21*b11 + a22*b21 + a23*b31) + c22*(a21*b12 + a22*b22 + a23*b32) + c32*(a21*b13 + a22*b23 + a23*b33) + c13*(a31*b11 + a32*b21 + a33*b31) + c23*(a31*b12 + a32*b22 + a33*b32) + c33*(a31*b13 + a32*b23 + a33*b33)

>> trAkareBC=trace(A*A*B*C)

trAkareBC =

c11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + c23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + c33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))

Şekil 4'de gösterildiği gibi $3x3$ boyutlu simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ matrisleri için MATLAB programında aşağıda sembolik tanımlamalar yapılmıştır.



Şekil 4. MATLAB programında $3x3$ boyutlu bir $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ matrisinin sembolik olarak tanımı için kod ekranı.

Simetrik $3x3$ boyutlu olarak verilen $\underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{B}}$ ve $\underline{\underline{C}}$ matrislerine ek olarak $tr\,\underline{\underline{D}}, tr\,\underline{\underline{D}}^2, tr\,\underline{\underline{D}}^3, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}^2, tr\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{A}}^2, tr\,\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{D}}^2, tr\,\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}$ ve $tr\,\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}$ değerleri aşağıda verilmiştir.

```
>> trD=trace(D)

trD =

d11 + d22 + d33

>> trkareD=trace(D*D)

trkareD =

d11^2 + d22^2 + d33^2 + 2*d12*d21 + 2*d13*d31 + 2*d23*d32

>> trkupD=trace(D*D*D)

trkupD =

d11*(d11^2 + d12*d21 + d13*d31) + d22*(d22^2 + d12*d21 + d23*d32) + d33*(d33^2 + d13*d31 + d23*d32) + d21*(d11*d12 + d12*d22 + d13*d32) + d31*(d11*d13 + d12*d23 + d13*d33) + d12*(d11*d21 + d21*d22 + d23*d31) + d32*(d13*d21 + d22*d23 + d23*d33) + d13*(d11*d31 + d21*d32 + d31*d33) + d23*(d12*d31 + d22*d32 + d32*d33)

>> trAD=trace(A*D)

trAD =
```

a11*d11 + a12*d21 + a21*d12 + a13*d31 + a22*d22 + a31*d13 + a23*d32 + a32*d23 + a33*d33

>> trADkare=trace(A*D*D)

trADkare =

d11*(a11*d11 + a12*d21 + a13*d31) + d21*(a11*d12 + a12*d22 + a13*d32) + d31*(a11*d13 + a12*d23 + a13*d33) + d12*(a21*d11 + a22*d21 + a23*d31) + d22*(a21*d12 + a22*d22 + a23*d32) + d32*(a21*d13 + a22*d23 + a23*d33) + d13*(a31*d11 + a32*d21 + a33*d31) + d23*(a31*d12 + a32*d22 + a33*d32) + d33*(a31*d13 + a32*d23 + a33*d33)

>> trDAkare=trace(D*A*A)

trDAkare =

a11*(a11*d11 + a21*d12 + a31*d13) + a21*(a12*d11 + a22*d12 + a32*d13) + a31*(a13*d11 + a23*d12 + a33*d13) + a12*(a11*d21 + a21*d22 + a31*d23) + a22*(a12*d21 + a22*d22 + a32*d23) + a32*(a13*d21 + a23*d22 + a33*d23) + a13*(a11*d31 + a21*d32 + a31*d33) + a23*(a12*d31 + a22*d32 + a32*d33) + a33*(a13*d31 + a23*d32 + a33*d33)

>> trAkareDkare=trace(A*A*D*D)

trAkareDkare =

d11*(d11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + d21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + d31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + d21*(d12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + d22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + d32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + d31*(d13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + d23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + d33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + d12*(d21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + d11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + d31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + d22*(d22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + d12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + d32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + d32*(d23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + d13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + d33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + d13*(d31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + d11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + d21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + d23*(d32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + d12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + d22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + d33*(d33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + d13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + d23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))

>> trAkareBC=trace(A*A*B*C)

trAkareBC =

c11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + c12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + c13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + c23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + c33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))

```
>> trABCD=trace(A*B*C*D)

trABCD =

d11*(c11*(a11*b11 + a12*b21 + a13*b31) + c21*(a11*b12 + a12*b22 + a13*b32) + c31*(a11*b13 + a12*b23 + a13*b33)) + d21*(c12*(a11*b11 + a12*b21 + a13*b31) + c22*(a11*b12 + a12*b22 + a13*b32) + c32*(a11*b13 + a12*b23 + a13*b33)) + d31*(c13*(a11*b11 + a12*b21 + a13*b31) + c23*(a11*b12 + a12*b22 + a13*b32) + c33*(a11*b13 + a12*b23 + a13*b33)) + d12*(c11*(a21*b11 + a22*b21 + a23*b31) + c21*(a21*b12 + a22*b22 + a23*b32) + c31*(a21*b13 + a22*b23 + a23*b33)) + d22*(c12*(a21*b11 + a22*b21 + a23*b31) + c22*(a21*b12 + a22*b22 + a23*b32) + c32*(a21*b13 + a22*b23 + a23*b33)) + d32*(c13*(a21*b11 + a22*b21 + a23*b31) + c23*(a21*b12 + a22*b22 + a23*b32) + c33*(a21*b13 + a22*b23 + a23*b33)) + d13*(c11*(a31*b11 + a32*b21 + a33*b31) + c21*(a31*b12 + a32*b22 + a33*b32) + c31*(a31*b13 + a32*b23 + a33*b33)) + d23*(c12*(a31*b11 + a32*b21 + a33*b31) + c22*(a31*b12 + a32*b22 + a33*b32) + c32*(a31*b13 + a32*b23 + a33*b33)) + d33*(c13*(a31*b11 + a32*b21 + a33*b31) + c23*(a31*b12 + a32*b22 + a33*b32) + c33*(a31*b13 + a32*b23 + a33*b33))
>> trAkareBkareCD=trace(A*A*B*B*C*D)

trAkareBkareCD =

d11*(c11*(b11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c21*(b12*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b22*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b32*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c31*(b13*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b23*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b33*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)))) + d21*(c12*(b11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c22*(b12*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b22*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b32*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c32*(b13*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b23*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b33*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)))) + d31*(c13*(b11*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b21*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b31*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c23*(b12*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b22*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b32*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) +
```

b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33))) + c33*(b13*(b11*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b21*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b31*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b23*(b12*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b22*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b32*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)) + b33*(b13*(a11^2 + a12*a21 + a13*a31) + b23*(a11*a12 + a12*a22 + a13*a32) + b33*(a11*a13 + a12*a23 + a13*a33)))) + d12*(c11*(b11*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b21*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b31*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c21*(b12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c31*(b13*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b23*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b33*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)))) + d22*(c12*(b11*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b21*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b31*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c22*(b12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c32*(b13*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b23*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b33*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)))) + d32*(c13*(b11*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b21*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b31*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c23*(b12*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b22*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b32*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33))) + c33*(b13*(b21*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b11*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b31*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b23*(b22*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b12*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b32*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)) + b33*(b23*(a22^2 + a12*a21 + a23*a32) + b13*(a11*a21 + a21*a22 + a23*a31) + b33*(a13*a21 + a22*a23 + a23*a33)))) + d13*(c11*(b11*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b21*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b31*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c21*(b12*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b22*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b32*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c31*(b13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))

+ b23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)))) + d23*(c12*(b11*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b21*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b31*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c22*(b12*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b22*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b32*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c32*(b13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)))) + d33*(c13*(b11*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b21*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b31*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c23*(b12*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b22*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b32*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))) + c33*(b13*(b31*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b11*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b21*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b23*(b32*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b12*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b22*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33)) + b33*(b33*(a33^2 + a13*a31 + a23*a32) + b13*(a11*a31 + a21*a32 + a31*a33) + b23*(a12*a31 + a22*a32 + a32*a33))))

5.SONUÇ

Gerçekleştirilen çalışmada sürekli ortamlar mekaniğinin bünye denklemlerini modellerken ortaya çıkan invaryant değerler hakkında açıklayıcı bilgiler verilmiştir. Bünye denklemleri bağımsız değişkenler olarak karşımıza çıkan parametreler vektörel veya tensörel formlarda göründüğünden vektörlerin ve tensörlerin invaryantları hakkında detaylı bilgiler ele alınmıştır. Çalışmada kullanılan tensörler ikinci mertebeden simetrik tensörlerdir. Çalışmada simetrik ikinci mertebeden bir, iki, üç ve dört matrise ait invaryant değerleri belirli bir sıra ve sistematik içerisinde verilmiştir. Ayrıca bu invaryantlar için MATLAB programında sembolik olarak uygulama gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen çalışmanın temel amaçlarından birisi de MATLAB programı kullanılarak matrislere ait invaryant parametrelerinin sembolik olarak da kolayca elde edilebileceğini göstermektir.

İlerleyen çalışmalarda sembolik olarak dört matris için yapılan uygulamaların 3x3 boyutlu matrislerden farklı boyutlardaki matrisler için hem sembolik hem de sayısal uygulamalarının yapılması hedeflenmektedir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI

Yazarlar, bilinen herhangi bir çıkar çatışması veya herhangi bir kurum/kuruluş ya da kişi ile ortak çıkar bulunmadığını onaylamaktadırlar.

YAZAR KATKISI

Çalışma, Bekir AKSOY'un Mustafa Reşit USAL danışmanlığında yapmış olduğu yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Spencer, A. J. M. (1971). Theory of invariants. Continuum Physics, Vol. I, Ed. A. Cemal Eringen. Academic Press. New York. s.239-353.
[2] Eringen, A.C. (1980). Mechanics of continua. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York. s.606
[3] Şuhubi, E.S. (1994) Sürekli Ortamlar Mekaniği Giriş, İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayını. S.243.
[4] Rivlin, R. S., Ericksen, J. L. (1997). Stress-deformation relations for isotropic materials. Collected Papers of RS Rivlin Minneapolis. s.911-1013.
[5] Spencer, A. J. M., Rivlin, R. S. (1959). Further results in the theory of matrix polynomials. Archive for rational mechanics and analysis, 4(1), 214-230.
[6] Adkins, J. E. (1960). Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 4(1), 193-213.
[7] Adkins, J. E. (1960). Further symmetry relations for transversely isotropic materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 5(1), 263-274.
[8] Korkmaz, A. H. (2009). Fiber takviyeli elastik malzemelerin sürekli ortam hasar mekaniğine dayalı bünye denklemlerinin modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, 106.
[9] Usal, M.R. (2006). Elastik Dielektrik Malzemelerin Sürekli Ortam Hasar Mekaniği. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(3), 465-475.