



8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt Şemalarının Matematiksel Bilgi Açısından İncelenmesi*

Examining Proof Schemes of 8th Grade in Terms of Mathematical Knowledge

Burhan KARAKAYA¹, Dr. Öğr. Üyesi Ahmet CİHANGİR²

Öz

Bu araştırmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin eşitlik kavramıyla ilgili baskın matematiksel bilgi türüne göre sergiledikleri kanıt şemaları durum çalışması modeliyle incelenmiştir. Çalışma grubunu, 2020-2021 eğitim öğretim yılında Afyonkarahisar merkezindeki iki ortaokulda öğrenim gören toplam 36 sekizinci sınıf öğrencisi arasından ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilen 6 öğrenci oluşturmaktadır. Verilerin betimsel analiz tekniğiyle çözümlendiği araştırmada, “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirle” sorularından elde edilen bulgular; kavramsal bilgi düzeyinin denklem çözme başarısını artırdığını, ancak katılımcıların çoğunun bu düzeye ulaşamadığını ortaya koymuştur. Yarı yapılandırılmış mülakatlar sonucunda, öğrencilerin denklem çözümlerini kanıtlamada yetersiz kaldığı ve gerekçelerinde büyük oranda otoriter kanıt şemalarına başvurdukları gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, bazı öğrenciler denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin kavramsal bilgiye sahip olsa bile, ispat aşamasında bu bilgiyi etkin biçimde kullanamadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin hem kavramsal bilgilerini geliştirmek hem de matematiksel geçerliliği olan kanıtlar üretebilmelerini sağlamak için problem çözümlerinde ulaştıkları sonuçların ve yaptıkları işlemlerin nedenleri üzerine tartışma ortamları oluşturulmasının yararlı olabileceği düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kanıt Şemaları, Matematiksel Eşitlik, Eşitlik Sembolü, Kavramsal Bilgi, Prosedürel Bilgi.

Makale Türü: Araştırma

Abstract

This investigation, which examines proof schemes based on the prevalent type of mathematical knowledge related to the concept of equality in eighth grade students, was designed as a case study model. The study group consists of six students selected from 36 eighth grade students in two schools in the central district of Afyonkarahisar during the 2020-2021 school year using criterion sampling. Descriptive methodology was applied in the analysis of the obtained data. Based on the data collected using the questions to determine conceptual and procedural knowledge, it was found that students with conceptual knowledge performed better in solving equations, while most students lacked conceptual knowledge. In the semi-structured interviews, it was found that students were poor at proving their equation solutions and tended to use authoritarian proof schemes as justification. As a result, students had conceptual knowledge about equality in equations but were unable to use this knowledge to provide valid proofs. To improve students' conceptual knowledge and enable them to construct valid mathematical proofs, discussions about the reasons for the results they obtain and the processes they use in solving problems can be encouraged.

Keywords: Proof schemes, Mathematical Equality, Equals Symbol, Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge

Paper Type: Research

*Bu çalışma birinci yazarın “8. Sınıf Öğrencilerinin Denklemlerde Eşitlik Kavramına İlişkin Sahip Oldukları Kanıt Şemalarının Matematiksel Bilgi Türleri Açısından İncelenmesi” başlıklı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

¹Milli Eğitim Bakanlığı, karakaya.burhan91@gmail.com.

²Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi, ahmetcihangir42@gmail.com.

GİRİŞ

Matematik öğretimindeki temel hedef, öğrencilerin matematiksel yeterlilik kazanmalarını sağlamaktır. Matematiksel yeterlilik, kavramları doğru biçimde anlamayı ve problem çözmeye yönelik işlemleri başarılı bir şekilde yürütme becerisini içerir (Rittle-Johnson vd., 2016). Bu yeterliliğin geliştirilmesi, öğrencilerin matematiksel kavramlar ve işlemler konusundaki bilgisini artırmaya bağlıdır.

Öğrenciler çoğunlukla matematikle ilgili bilgilerini öğretmenlerden edindikleri için bu bilgilerin doğruluğunu nadiren sorgularlar. Dolayısıyla, pek çok öğrenci edindiği bilgileri sorgulama çabasına girmeden kabul etme eğilimindedir (Flores, 2002). Öğretmenlerin, öğrencilerinin bir cevabın doğruluğunu, bir prosedürün uygun sonuçlar verip vermediğini veya bir matematiksel formülün anlamlı olup olmadığını saptama becerilerini geliştirmeye özen göstermeleri gerekir (Flores, 2002). Anlamlı öğrenme, bilgiyi zihinde yapılandırma ve o bilginin doğasını anlama sürecini kapsar. Yeni bir bilgiyi özümseyen birey, bu bilgiyi anlamak adına zihinsel bir süreçten geçirir (Yanık, 2016). Öğretmenlerin, çocukların doğal olarak kullandıkları yaklaşımlardan hareket etmeleri önemlidir; bu nedenle, öğrencilere ait matematiksel iddiaları doğrulama yöntemlerini belirlemeli ve ardından onların matematiksel ifadelerin veya gerçeklerin neden doğru olduğunu anlamalarını sağlayacak öğretim stratejileri planlamalıdır (Flores, 2002).

Matematiksel bir iddiayı doğrulamak farklı yöntemlerle gerçekleştirilebilse de, çoğu zaman doğruluğu göstermenin yanında bu doğruluğun gerekçesini açıklamak da büyük önem taşır. Böylelikle, bilginin zihinsel olarak nasıl örgütlendiğine dair farkındalık geliştirilir. Matematiksel kanıtlarla uğraşan öğrenci, kendi düşünce yapısını yansıtan yöntemlere başvurur (Harel ve Sowder, 2007). Kanıt şemaları ise, kanıt sürecindeki davranışları gözlemleyerek elde edilen bilişsel aşamaları, zihinsel becerileri ve yetkinlikleri ifade eder (Dede ve Karakuş, 2014). Öğrencilerin kanıt ve kanıtlama konusunda yaşadıkları güçlükleri, bu güçlüklerin nedenlerini, konuya ilişkin anlayışlarını ve kanıtlara dönük tutumlarını daha iyi değerlendirebilmek için kapsamlı bir bakış açısına ihtiyaç duyulmaktadır.

Matematiksel Bilgi

Matematiksel bilgi, genellikle kavramsal bilgi ve işlemsel (prosedürel) bilgi şeklinde iki ana başlıkta incelenmektedir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Kavramsal bilgi; kavramlar, prensipler ve tanımlarla ilişkilendirilir (Yanık, 2016). Geçmişte, kavramsal bilgi çoğunlukla ilişkisel çerçevede ele alınırken, güncel çalışmalar konunun derinlemesine ele alınması gerektiğine işaret etmektedir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015; Rittle-Johnson, 2019). Croks ve Alibali (2014), kavramsal bilgiyi altı başlıkta sınıflandırarak “bağlantılar bilgisi, genel prensipler bilgisi, prosedürün altında yatan prensipler bilgisi, kategori bilgisi, sembol bilgisi ve alan yapısı bilgisi” olarak özetlemiştir. Bu bakışla kavramsal bilgi, bir kavramın tanımı, özellikleri ve diğer kavramlarla etkileşimleri konusunda sahip olunan bilgi bütünü olarak tanımlanabilir. Kavramsal anlama ise öğrencinin, söz konusu bilgiyi içselleştirmesi, yeni veya önceden edindiği bilgilerle ilişkilendirmesi ve kavramın özelliklerini belirleme sürecini ifade etmektedir.

İşlemsel bilgi, bir problemi çözmek için izlenmesi gereken adımların ve bu adımların uygulanma biçiminin bilinmesidir. Bu, hedefe ulaşma yöntemi, algoritmaların kullanımı ve problem çözme basamaklarının düzenlenmesiyle ilgilidir ve uygulama yaparak gelişir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Prosedürler, doğru uygulanmaları hâlinde güvenilir sonuçlara ulaşmamızı sağlayan eylem dizileri olarak tanımlanabilir ve belirli türdeki problemlerin çözümünde etkili olmak üzere tasarlanmıştır (Rittle-Johnson, 2019). İşlemsel anlama ise, öğrencinin bu prosedürel bilgiyi zihinsel düzeyde kavramasını ifade etmektedir. Yanık (2016), işlemsel anlamayı iki yönlü tanımlar: kavramsal bilgi olmaksızın yalnızca algoritma becerisine sahip olma ve bu becerileri esnek ve verimli biçimde seçebilme yeteneği.

Kavramsal bilgiyi belirlemek için kullanılan yöntemler çeşitlilik gösterirken, işlemsel bilginin ölçümü görece daha sınırlı araçlarla yapılmaktadır. Kavramsal bilgi, açık veya örtük biçimde ortaya konabilir. Açık kavramsal bilgi, öğrencinin tanım veya açıklamalar yapmasını gerektirirken, örtük kavramsal bilgi, öğrencinin aklında var olan ancak tanımlarda doğrudan yer almayan özellikleri içermektedir. Bu nedenle, kavramsal bilgi ölçümlerinde genellikle öğrencinin ezberine değil, derinlemesine düşünmesini sağlayacak türden, aşına olmadığı problemler tercih edilir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015; Crooks ve Alibali, 2014). Değerlendirmede, kavram ile tanım arasındaki uyum incelenir. Literatürde iki yaygın kavramsal bilgi ölçüm yaklaşımı öne çıkar: Genel Prensipler Bilgisi (problemlerle doğrudan ilişkisi olmayan matematiksel düşünceleri anlamak) ve Prosedürün Altında Yatan Anlam Bilgisi (prosedürün neden işlediğini ve her işlem adımının amacını bilmek) (Crooks ve Alibali, 2014).

İşlemsel bilginin ölçümü ise görece daha kolaydır. Öğrencilere, hâlihazırda öğrendikleri algoritmaları veya bu algoritmaların küçük uyarlamalarını kullanabilecekleri problemler sunulur ve bu problemleri çözmeleri istenir. Ardından, çözüm süreçleri ve ulaşılan sonuçlar değerlendirilir. Gerek duyulduğunda, öğrencinin işlemsel bilgiyi “ezber yoluyla” mı yoksa “anlayarak” mı kullandığını görebilmek için problem çözme hızı da dikkate alınır (Rittle-Johnson vd., 2015).

Gelecekte yapılacak araştırmalarda, kavramsal ve işlemsel bilginin hem geçerli hem de güvenilir biçimde ölçülmesini sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesine odaklanılması önerilmektedir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Ayrıca, bu bilgilerin nasıl edinildiğini açıklayan kapsamlı kuramsal modeller ortaya konmalıdır. Kavramsal ve işlemsel anlamının ölçülmesi, öğrencilerin hedeflenen matematik kazanımlarını hangi düzeyde edindiklerini belirlemede, kurdukları matematiksel ilişkileri anlamada ve öğretmenlerin derslerini yeniden tasarlayabilmesinde önemli bir rol oynar (Yanık, 2016).

Matematiksel Eşitlik

Matematiksel eşitlik, bir denklemdeki her iki tarafın da aynı değeri temsil ettiği düşüncesini ifade eder (Crooks ve Alibali, 2014). Sayılar ve işlemlerin yer aldığı hemen hemen her alanda, eşitlik sembolü önemli bir yere sahiptir (Van De Walle vd., 2012). Cebir, büyük ölçüde eşitlik kavramı üzerine kurulmuş bir matematik dalı olarak değerlendirilebilir. Bu nedenle cebiri anlamak ve uygulayabilmek, aralarında matematiksel eşitliğin de bulunduğu çeşitli kavramların anlaşılmasına bağlıdır (Knuth vd., 2006). NCTM (2000) de eşitlik kavramının ve ilgili sembolik temsillerin, müfredatta üzerinde önemle durulması gereken konular arasında yer aldığını belirtmiştir. Bu vurgu, öncelikle eşitliğin matematiksel ifadeler arasındaki ilişkiyi kavramada temel olması, ikinci olarak ise eşitliği doğru algılayamayan öğrencilerin cebirsel işlemleri anlamada zorluk çekmesiyle ilişkilidir (Crooks ve Alibali, 2014; Knuth vd., 2006; Van De Walle vd., 2012). Ayrıca matematiksel eşitliği kavrayabilmek, öğrencilerin sayı sistemlerindeki ilişkileri görmeleri, anlamlandırmaları ve sembolize etmeleri açısından da büyük önem taşımaktadır (Van De Walle vd., 2012).

Eşitlik sembolünün kavramsal temeli, genellikle okul öncesi dönemde iki kümenin bir araya gelmesi düşüncesiyle atılır. Bu dönemde, öğrencinin karşılaştığı aritmetik düzen A ve B arasındaki işlemi gerçekleştirme üzerine kurulu olduğu için, pek çok öğrenci eşitliği “A ile B’yi topla/işlem yap” şeklinde yorumlayarak sembolün daha geniş kavramsal anlamını gözden kaçırabilmektedir (Kieran, 1981). İlkokulun son yıllarında öğrencinin zihinsel olgunlaşması doğrultusunda eşitlik algısında değişimler görülür. Yaklaşık 13 yaş civarı, çocukların eşitlik sembolünü “sonucu bulma” anlamından “eşdeğerlik” fikrine doğru genişlettikleri bir geçiş dönemi olarak tanımlanır. Bu süreçte, “denklemdeki sağ taraf sol tarafın sonucudur” düşüncesi yerine, sağ ve sol tarafın farklı ifadelerle de olsa eşdeğer olabileceğine dair anlayışın gelişmesi beklenir (Kieran, 1981). Eşitlik sembolünü “denge” fikriyle ilişkilendirmek de özellikle ilkökul düzeyinde, bu kavramı daha somut biçimde kavramalarına yardımcı olabilir (Van De Walle vd., 2012). Crooks ve Alibali (2014), matematiksel bilgi türünü belirleme çalışmalarında en sık

incelenen konulardan birinin “eşitlik” olduğunu belirtmiş ve bu amaçla kullanılan ölçme yöntemlerini, eşitlik sembolü tanımı, örnek değerlendirmeleri, soruları yeniden yapılandırma, eşitlik sembolünün derecelendirilmesi, eş değer denklemler ve farklı problem türleri şeklinde sıralamıştır.

Kanıt Şemaları

Kanıt şemaları, kişilerin neye inandıklarını ve başkalarını hangi temellere dayandırarak ikna ettiklerini betimlemeye yarayan bir sınıflandırma sistemidir. Bu yapı, bireyden bireye, toplumdaki topluma ve aynı toplum içinde farklı kuşaklar arasında değişkenlik gösterebilir (Harel, 2001). Harel ve Sowder (2007) bu şemaları üç ana başlık altında ele almıştır: dışsal kaynaklı kanıt şemaları, deneysel kanıt şemaları ve analitik kanıt şemaları.

Dışsal Kanıt Şemaları: Bir argümanın doğruluğunu kanıtlamak için bireyin ya da toplumun dışsal kaynaklardan onay beklemesine dayanır. Otoriter kanıt şemaları (otoriteye güven), alışkanlık edinilmiş kanıt şemaları (formül ve algoritmalara koşulsuz bağlılık) ve sembolik kanıt şemaları (anlamdan bağımsız sembol kullanımı) olmak üzere üç alt gruba ayrılır.

Deneysel Kanıt Şemaları: Birkaç örnek veya duyuşsal algılara dayanan ve bu örneklerden genelleme yapmaya çalışan şemalardır. Bu yaklaşımda öğrenciler, genellikle bütüncül ilkelere başvurmadan, sınırlı sayıda örneğin “doğrulayıcı” rolü üstlendiği bir sürece odaklanır ve bu durum kanıtlama aşamasında zorluklar yaratır. İki alt başlık halinde incelenir: örnek temelli şemalar (az sayıda örnekten genelleme yapma) ve algısal şemalar (çizimler veya basit görsel temsillere dayanma).

Analitik Kanıt Şemaları: Mantık ve teoremlere dayalı kanıtlama sürecini temel alır. Bu şemaları kullanan öğrenciler, mantıklı çıkarımlar yaparak sonuçlarını destekler ve kanıtlarını ayrıntılı düşünce adımlarıyla şekillendirir. Dönüşümsel kanıt şemaları (mantıksal akıl yürütmenin kullanımı) ve aksiyomatik kanıt şemaları (aksiyomlara dayanma) olarak iki alt gruptan oluşur.

Öğrencilerin benimsedikleri kanıt şemalarını incelemek, onların kavramsal gelişim süreçlerini izleyebilmek açısından oldukça önemlidir. Zira öğretim sürecinde sunulan bilginin nedenleri ve bağlantıları yeterince açıklanmadığında, öğrenme çoğunlukla ezbere dayalı kalmakta ve öğrencilerin bilgiyi derinlemesine kavraması güçleşmektedir. Kanıt şemaları, öğrencinin düşünce biçimini yansıttığı için olası kavramsal yanlışları da ortaya koyabilir. Bu nedenle, öğrencilerin bilgi düzeylerinin artmasını hedefleyen öğretim deneyimleri, kanıt şemaları bağlamında gözlemlendiğinde, uygulanan yaklaşımın etkinliği ve öğrencilerin hangi düzeyde etkilendikleri daha net değerlendirilebilir (Gutiérrez ve Marrades, 2000).

Matematiksel yeterliliğin gelişimi, hem kavramsal hem de işlemsel bilgi edinimini gerektirir. Söz konusu bilgi türlerinin tanımlanması ve ölçülmesiyle ilgili çeşitli yöntemler olsa da genel bir uzlaşma, kavramsal bilgiyle işlemsel bilginin birbiriyle etkileşim hâlinde olduğu yönündedir. Bu iki bilgi türünü pekiştirmek için farklı öğretim stratejileri kullanılmaktadır. Örneğin, öğrencilerin alternatif çözüm yolları bulmaya teşvik edilmesi, kendi düşünce süreçlerini sesli olarak ifade etmeleri ve yeni bir konuya başlamadan önce keşif yapmalarına fırsat tanınması gibi uygulamalar bunlardan bazılarıdır. Rittle-Johnson ve Schneider (2015), matematiksel bilgi üzerine gerçekleştirilen araştırmalarda, kavramsal ve işlemsel bilginin ölçümüne ilişkin geçerli ve güvenilir yöntemlerin geliştirilmesine ve bu bilgi türlerinin zaman içindeki gelişimini modellemeye odaklanılmasını önermektedir.

Araştırmalar, matematiksel eşitlik kavramını anlamayan öğrencilerin, hem matematiksel başarılarının hem de diğer matematiksel kazanımlarının olumsuz etkilendiğini göstermiştir. Özellikle cebirin anlaşılmasında önemli bir temel olan bu kavram, kimi çalışmalarca yeterince vurgulanmadığı için eksik kalmaktadır (Crooks ve Alibali, 2014). Dolayısıyla, matematiksel bilgi gelişimini yakından izleyebilmek ve doğru eğitimsel yönlendirmeler yapabilmek için kavramsal ve işlemsel bilgi türlerinin ölçülmesi son derece önemlidir. Bu sayede, öğrenme sürecindeki değişimin anlaşılması ve öğretimde gerekli düzenlemelerin yapılması kolaylaşabilir (Crooks ve Alibali, 2014).

Öte yandan, kanıt şemalarının bilgi türleriyle ilişkilendirilerek değerlendirilmesi, öğrencilerin kavramsal bilgiyi nasıl edindiğini görmek ve matematiksel bilgi türlerinin farklılıklarını ortaya çıkarmak açısından faydalı olabilir. Bu tür bir incelemenin, matematik eğitiminde uygulanacak yöntemlerin iyileştirilmesine ve öğrencilerin kavramsal anlayışlarını daha güçlü bir biçimde desteklemeye katkı sağlaması beklenmektedir. Bu doğrultuda, bu çalışmanın temel amacı; sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin edindikleri bilgileri kavramsal ve işlemsel olarak sınıflandırmak ve kullandıkları kanıt şemalarını bu doğrultuda analiz etmektir. Kanıt şemalarının bilgi türüyle birlikte incelenmesinin, öğrencilerin kavramsal bilgilerini hangi düzeyde kullanabildiklerini ortaya koyma ve farklı bilgi türleri arasındaki ayrımları belirleme açısından değerli olduğu düşünülmektedir. Bu çerçevede, “İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına dair kullandıkları kanıt şemaları, matematiksel bilgiden nasıl etkilenir?” sorusu araştırmanın temel problem cümlesini oluşturmaktadır. Öncelikle öğrencilerin eşitlik kavramına yönelik bilgileri kavramsal ve işlemsel olarak sınıflandırılmış, ardından denklem çözümlerinde başvurdukları kanıt şemalarının bu bilgi türlerinden nasıl etkilendiği saptanmaya çalışılmıştır.

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Bu çalışma, öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin mevcut matematiksel bilgilerini sınıflandırarak, kullandıkları kanıt şemalarının matematiksel bilgi türleri açısından incelenmesi amacıyla nitel bir araştırma modeli olan durum çalışması kullanmıştır. Durum çalışması, birden fazla nitel veri toplama tekniğinin birlikte kullanıldığı ve çalışmaya konu olan durumların araştırmaya katılan çalışma grubu içerisinde derinlemesine incelendiği bir model olarak tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmada, çalışma grubunu 2020-2021 eğitim-öğretim yılında Afyonkarahisar merkezindeki iki ortaokulun sekizinci sınıflarında öğrenim gören 36 öğrenci arasından, “kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme soruları”nın analiz sonuçlarına göre seçilen altı öğrenci oluşturmuştur. Bu altı öğrencinin üçü “kavramsal bilgi” düzeyine, üçü ise “işlemsel bilgi” düzeyine sahip olarak belirlenmiştir. Katılımcı seçimi, nitel araştırma yöntemlerinde sık kullanılan amaçlı örnekleme yaklaşımlarından “kolay ulaşılabilir durum örnekleme” ve “ölçüt örnekleme” yöntemleriyle gerçekleştirilmiştir.

Veri Toplama Araçları ve Süreçleri

Bu araştırmanın verileri, klinik mülakatlar ve yazılı sorulara verilen açık uçlu yanıtlar gibi nitel veri toplama teknikleri aracılığıyla elde edilmiştir. Matematiksel bilgi ve kanıt şemalarını ölçmek için standart yöntemlerin bulunmaması nedeniyle, nitel yöntemler ve araştırmacı yorumu esas alınarak ilerlenmiştir. Öğrencilerin denklemlerdeki eşitlik kavramına ilişkin hangi tür matematiksel bilgiye sahip olduklarını belirlemek amacıyla, araştırmacı tarafından konuya yönelik literatür taraması yapılarak “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları (KİBS)” geliştirilmiştir. Bu araç altı soru ve üç maddeden oluşmaktadır.

Öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına dair hangi kanıt şemalarını kullandıklarını tespit edebilmek için ise yarı yapılandırılmış mülakatlara başvurulmuştur. Araştırmada, “Kanıt Şemaları Belirleme Soruları (KŞBS)” adı verilen bir set kullanılarak veri toplanmıştır. KŞBS; yazılı olarak denklem çözümü içeren üç soru ve sözlü olarak yönlendirilen dört sorudan meydana gelmektedir. Bunun yanı sıra, mülakat sürecinde araştırmacı, görüşmenin akışına göre ek sorular da sorma fırsatı yakalamıştır.

Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları

Bu araştırma, öğrencilerin matematiksel bilgi ve kanıt şemalarına odaklanarak iki temel amacı gözetmektedir. İlk amaç, sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerdeki eşitlik kavramına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerini belirlemektir. Bu kapsamda kullanılan sorular (Şekil 1), Knuth ve arkadaşlarının (2006, 2011) ile Alibali ve arkadaşlarının (2007) çalışmalarından esinlenerek uyarlanmıştır. Ayrıca, bir soru ise araştırmacı ve bir uzman tarafından yeniden tasarlanmıştır. Uygulama sonrasında geçerli sonuçlar vermediği düşünülen bir soru, yine araştırmacı ve uzmanların değerlendirmesiyle araştırmadan çıkarılmıştır. Geliştirilen sorular, iki ayrı okulun iki sınıfında öğrenim gören toplam 36 öğrenciye yazılı olarak uygulanmış; toplanan cevaplar bir uzman desteğiyle analiz edilerek öğrencilerin eşitlik kavramına ait matematiksel bilgi türleri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Bu doğrultuda, KİBS'in 1. sorusunu yanıtlamaları istenen öğrencilerin verdikleri cevaplar ve uyguladıkları işlemlerin doğruluğu incelenerek, denklemlerdeki eşitlik kavramına yönelik işlemsel bilgilerinin olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır. Kavramsal bilgi, işlemlerin arka planındaki anlamlara odaklanırken (Crooks ve Alibali, 2014), işlemsel bilgide prosedürlerin kullanım şekli ön plana çıkar. Dolayısıyla, bu soru öğrencilerin denklem çözümündeki işlemsel bilgilerinin tespitini amaçladığından, kavramsal bilgiye dair kodlama yapılmamış ve yalnızca işlemsel bilgiyi belirleme hedeflenmiştir.

KİBS'in ikinci sorusu, öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin hem işlemsel hem de kavramsal bilgilerinin ölçmek amacıyla hazırlanan üç maddeden oluşmaktadır. Kodlama aşamasında, eşitlik sembolünün anlamının sorgulandığı "b" maddesi öne çıkarılmış; "a" ve "c" maddelerinden elde edilen veriler, "b" maddesini destekleyici nitelikte kullanılmıştır. Bu kurguda, "a" maddesi sembolün adlandırılmasına (soruda eşitlik sembolüne doğrudan isim vermeden), "b" maddesi sembolün öğrencideki anlamını tespit etmeye, "c" maddesi ise mümkün olduğunda alternatif bir anlamı açığa çıkarmaya yönelik tasarlanmıştır. "a" maddesiyle kastedilen, öğrencilerin soru içerisinde sembole isim vermeden onu tanımlamalarını sağlamak iken, "c" maddesiyle hedeflenen öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin farklı yorumları ortaya koyabilmeleridir.

KİBS'nin üçüncü sorusu, geçerli sonuçlar vermediği gerekçesiyle uzman görüşü alınarak araştırmadan çıkarılmış ve değerlendirmeye dahil edilmemiştir.

KİBS'nin dördüncü ve beşinci soruları, kavramsal bilgiyi benzer bir şekilde ölçtükleri için birlikte analiz edilmiştir. Bu sorularda, öğrencilerden denklemleri çözerken eşitliğin örtük kavramsal anlamına uygun olarak işlem yapmaları beklenmiştir. Öğrencilerden, denklemlerin eşitlik kavramına dayalı olarak iki tarafındaki işlemlerin farklı değerlerde olduğunu düşünmeleri istenmiştir. Bu, eşitliğin bir denge olarak anlaşılmasıyla kavramsal bilgiyi ilişkilendirmeye yönelik bir yaklaşımdır (Ngu ve Phan., 2016).

KİBS'nin altıncı sorusunda, öğrencilerden bir örnek görevini değerlendirmeleri istenmiştir. Bu soruda, öğrencilere hatalı bir denklem çözme prosedürü verilmiş ve hatanın nerede olduğu ve neden kaynaklandığı sorulmuştur. Öğrencilerden, denklemlerin eşitliği kavramına dayalı olarak denklemin iki tarafına uygulanan farklı işlemlerin eşitliği nasıl bozabileceğini açıklamaları beklenmiştir. Nitekim eşitliğin denge olarak anlaşılması kavramsal bilgiyle ilişkilendirilmektedir (Ngu ve Phan., 2016).

1.soru

$$5x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemi çözünüz.

2.soru

$$x + 5 = 7$$

- İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?
- Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?
- Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.

4.soru

$x - 5 = 20$ denkleminde $x=25$ dir. Buna göre ;

$x - 5 + 40 = 20 + 40$ denkleminde x in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

5.soru

$$2n + 15 = 31$$

$$2n + 15 - 10 = 31 - 10$$

Yukarıda verilen iki denklemde n değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebebini açıklayınız.

6.soru

Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$2x + 5 = 11$$

$$2x + 5 - 5 = 11 + 5$$

$$2x = 16$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Şekil 1 Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları

Kanıt Şemaları Belirleme Mülakat Soruları

Bu araştırmanın bir diğer odak noktasını, öğrencilerin denklemlerdeki eşitlik kavramına ilişkin problemlerde hem kendilerini hem de başkalarını ikna etmek için kullandıkları kanıt şemalarını belirleme süreci oluşturmaktadır. Bu amaçla ihtiyaç duyulan veriler, “Kanıt Şemaları Belirleme Mülakatları” yoluyla elde edilmiştir. Mülakat sürecinde, yazılı denklem çözümü gerektiren üç soru (Şekil 2) ile öğrencilere sözel olarak yöneltilen dört soru (Şekil 3) içeren “Kanıt Şemaları Belirleme Mülakat Soruları (KŞBS)” kullanılmıştır. Görüşmenin akışına göre araştırmacı, gerek

gördüğünde ek sorular da sormuştur.

Öğrencilere yazılı olarak sunulan sorular, yedinci ve sekizinci sınıf müfredatında yer alan “Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (MDÖP, 2018)” kazanımına uygun biçimde hazırlanmıştır. Bu kısımda üç soru bulunmaktadır: İlk soruda, sol tarafta denklem, sağ tarafta sayı verilerek doğal sayı sonucuna ulaşılan bir yapı; ikincisinde, her iki tarafta denklem yer alıp sonuç negatif tam sayı olarak tasarlanmış bir yapı; üçüncüsünde ise her iki tarafta denklem olup sonucun negatif rasyonel sayı olduğu bir yapı sunulmuştur. Bu şekilde, öğrenci yanıtlarında ortaya çıkabilecek farklı kanıt şemalarını gözlemlemek hedeflenmiştir. Soruların hazırlanması aşamasında, iki uzman ve araştırmacı tarafından, farklı şemalara uygun olası öğrenci yanıtları öngörülme çalışılmış ve her şemaya karşılık gelebilecek örnek cevaplar tespit edilmiştir. Analiz bölümünde de söz konusu öğrenci cevaplarına yer verilmiştir. Ayrıca, araştırmanın amacına uygun olarak, öğrencinin problem çözme becerisinden kaynaklanan değişkenliklerin verileri etkilemesini en aza indirmek için sözel problem formatından uzak durulmuştur.

$20 - 2x = 10$ denklemini çözünüz.
 $3a + 5 = a - 13$ denklemini çözünüz.
 $12 - 3n = -5n + 9$ denklemini çözünüz.

Şekil 2 Kanıt Şemaları Belirleme Yazılı Mülakat Soruları

Sonucu nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?
Bulduğun sonucun doğru olduğunu nereden biliyorsun?
Bulduğun sonucun doğruluğunu her zaman böyle mi gösterirsin?
Bulduğun sonucun doğruluğuna başkalarını nasıl ikna edersin?

Şekil 3 Kanıt Şemaları Belirleme Sözlü Mülakat Soruları

Verilerin Analizi

Bu çalışmada elde edilen veriler, nitel araştırmalarda sıklıkla başvurulan betimsel analiz yöntemi kullanılarak değerlendirilmiştir. Betimsel analiz, önceden belirlenen temalar doğrultusunda toplanan verilerin özetlenmesi ve/veya yorumlanmasını içerir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

KİBS (Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları) verilerinin analizi, bir uzmanla birlikte yürütülmüş; öğrencilerin matematiksel eşitlikle ilgili bilgileri bu süreçte sınıflandırılmıştır. Literatüre göre eşitlik kavramı, matematiksel bilgi tespitinde en yaygın kullanılan kavramlardan biridir; bu doğrultuda çeşitli ölçüm yöntemleri geliştirilmiştir (Crooks ve Alibali, 2014). Araştırmada, her bir KİBS sorusu için ilgili temaları yansıtan bir Tablo 1 oluşturulmuş ve öğrenci cevapları bu temalar çerçevesinde kodlanmıştır.

Kodlamada, araştırmacı ile uzman arasındaki fikir birliği sağlandıktan sonra veriler “kavramsal bilgi”, “işlemsel bilgi” ve “diğer” olmak üzere üç temel kod altında toplanmıştır.

İşlemsel bilginin ölçümü, kavramsal bilgiye kıyasla görece daha kolaydır. Çünkü bu ölçümde, daha önce öğrenilmiş algoritmaların kullanıldığı veya onların ufak uyarlamalarını gerektiren sorularla öğrencilerin performansı değerlendirilebilir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Öğrenciden problemi çözmesi istenir, ardından ulaşılan sonucun ya da izlenen sürecin doğruluğu incelenir. Bazı durumlarda, işlemsel bilginin ezbere mi, yoksa anlayarak mı uygulandığını anlamak için öğrencinin çözüm hızı da dikkate alınabilir. Bu kapsamda KİBS’in 1. sorusu, öğrencilerin “denklemler çözümünde eşitlik kavramını işlemsel düzeyde” kullanıp kullanmadığını belirlemek amacıyla tasarlanmıştır. Sorunun değerlendirilmesinde “işlemsel bilgi” ve “diğer” kodları kullanılmıştır. Doğru sonuç ve doğru işlem sunan öğrenciler “işlemsel bilgi” olarak kodlanırken, yanlış sonuç ya da eksik işlem yapan veya hiç cevap vermeyen öğrenciler “diğer” kategorisine dâhil edilmiştir.

KİBS 2. sorusuna verilen cevaplar ise “kavramsal”, “işlemsel” ve “diğer” şeklinde sınıflandırılmıştır. Eşitlik sembolünü “ tarafların eşit olması” fikriyle ilişkilendiren yanıtlar “kavramsal”, sembolü “cevap üreten” bir işaret olarak açıklayan ifadeler ise “işlemsel” olarak kodlanmıştır. Aynı öğrenci tarafından farklı iki tanım sunulması, bu tanımlardan en az birinin kavramsal karakterde olmasına dayanarak yine “kavramsal” biçimde değerlendirilmiştir. “Özel bir anlam” taşımayan veya yetersiz kalmış cevaplar ise “diğer” koduyla ifade edilmiştir.

KİBS 4. ve 5. sorularında, benzer şekilde “kavramsal”, “işlemsel” ve “diğer” kodları kullanılmıştır. Özellikle, öğrencilerin belirli stratejilerle denklemleri karşılaştırmaları ya da değişken değerlerini eşitlemeleri işlemsel bilgi kapsamında ele alınmıştır. Buna karşılık, ikinci denklemlerde yapılan işlemlerin eşdeğerlik ilişkisini bozmadığını anlatan açıklamalar “kavramsal” olarak sınıflandırılmıştır. Yanlış veya eksik yanıtlar ise “diğer” kategorisine alınmıştır.

KİBS 6. sorusu için de “kavramsal”, “işlemsel” ve “diğer” kodları kullanılmıştır. Burada, soruda belirtilen hatayı “denge modeli” perspektifinde açıklayan öğrenciler “kavramsal”, “karşıya atma” yöntemi odaklı açıklama yapanlar “işlemsel” olarak kodlanmıştır. İki kategoriye de girmeyen yetersiz veya hatalı cevaplar ise “diğer” olarak sınıflandırılmıştır.

Bu çalışmanın bir diğer aşamasında, KŞBS (Kıyas Şemaları Belirleme Soruları) verilerinin analizi, öğrencilerin denklemler çözme performanslarından çok, verdikleri sonuçların doğruluğunu nasıl doğruladıkları ve başkalarını hangi yollarla ikna etmeye çalıştıkları üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu süreçte, Harel ve Sowder’ın (1998) geliştirdiği kuramsal çerçeveye dayanan “kanıt şemaları” yaklaşımı esas alınmıştır. Üç ana kategori (otoriter, deneysel, analitik) ve bunlara bağlı alt kategoriler, öğrencilerin açıklamalarını sınıflandırmak için temel alınmıştır.

Araştırmada, öğrencilerin hangi kanıt şemasına yöneldiklerini belirlemek adına Tablo 2 oluşturulmuş ve bu tablo doğrultusunda değerlendirme yapılmıştır. Araştırmacı ve uzman, öğrenci ifadelerini ayrı ayrı incelemiş, farklı durumlarda fikir alışverişi yaparak ortak bir karara ulaşmışlardır.

Kanıt şemaları arasında dışsal şemalar, öğrencinin cevabını veya işlemini doğrulamak için harici bir otoriteye veya kaynağa başvurduğunu gösterir. Bu tür şemalar, öğrencilerin bilgiyi nasıl temellendirdikleri ve dışsal otoritenin rolü üzerinde belirgin bir vurgu yapar. Örneğin, öğrencinin “Öğretmenim böyle söyledi, o yüzden doğrudur” şeklinde bir gerekçe sunması, dışsal kanıt şemaları sınıfına girebilir. Nitekim, A63 kodlu öğrencinin yanıtı da bu duruma örnek oluşturmaktadır.

Ö: Öğretmen derste bişey anlattığında anlattığı şeyin doğru olup olmadığını düşünür müsün?

A63: Düşünmem.

Ö: Neden?

A63: Çünkü öğretmenim o benim. Öğretmenim eğitimini almış mesela okulunu okumuş benden de daha iyi bilgi sahibi olduğu için ona güvenirim.

Öğrenci bu araştırma kapsamında yapılan mülakatlar esnasında yaptığı işlemlere ve sonuçların doğruluğundan emin olmak için yeterli gerekçelendirmeler yapamamıştır. Ayrıca sonuçların doğruluğunu öğretmenin anlattıklarına bağlamış “Öğretmenim anlattıysa doğrudur” şeklinde açıklama yapmıştır. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

DeneySEL kanıt şemaları, öğrencilerin cevaplarını doğrulamak veya sonuçlarını göstermek için deneyler, farklı örnekler veya somut kanıtlar kullanma eğilimini yansıtır. Bu şemalar, öğrencilerin problem çözme yeteneklerini görsel veya somut örneklerle desteklemeye çalıştıklarını gösterir. Örneğin, Aydoğdu-İskenderoğlu (2003) farklı sınıf seviyelerinde öğrenciler ile yaptığı çalışmasında “Ayşe defterine bir soru yazar ve bu sayının 6 fazlasının 5’e bölümünün 4 olduğunu görür. Ayşe’ nin defterine yazdığı sayı kaçtır?” soruna verdiği cevabı savunan bir öğrencinin farklı değerleri yerine koyarak doğruluğunu kanıtlamaya çalıştığını göstermiştir. Öğrenci “... deneyerek bulmak en doğrusudur.” şeklinde açıklama yapmıştır.

Analitik kanıt şemaları, öğrencilerin mantıklı bir düşünme süreci kullanarak cevaplarını gerekçelendirdikleri durumları yansıtır. Bu şemalar, öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerini ve problem çözme stratejilerini kullanma eğilimini gösterir. Örneğin, eşitlik kavramının korunması gerektiği ve her iki tarafın aynı işlemlerle işlendiğini belirten bir açıklama bu kategoriye girer. Bu durum, öğrencilerin denklem çözme sürecini mantıklı bir şekilde gerekçelendirmeye çalıştıklarını gösterir. Aydoğdu-İskenderoğlu (2003) “Ayşe aklından bir sayı tutar ve arkadaşının tuttuğu sayının 3 katının 2 fazlasının 395 olduğunu söyler. Ayşe’ nin aklından tuttuğu sayı kaçtır?” soruna verilen analitik cevap örneğinde öğrencinin soruyu iki farklı yolla çözerek kanıtlamaya çalıştığını göstermiştir. Bu örnekte öğrenci kanıtını yöntem olarak öğretmeninden öğrendiğini söylemekten ziyade kendi zihinsel süreçlerine dayandırarak açıklamıştır.

Kanıt şemalarını belirlerken, öğrencilerin üç farklı soruya verdikleri cevapları ve kullandıkları ifadeleri genel olarak değerlendirilmiş ve bu ifadelerin her üç soruda tutarlılığına dikkat edilmiştir. Bu sayede her öğrencinin en az bir kanıt şemasına dahil edilebildiği belirlenmiştir. Bu analiz, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini daha iyi anlamamıza ve matematik eğitimini geliştirmemize yardımcı olur. Analiz süreci, araştırmacı ve uzman arasında bir uzlaşmaya dayandığı için teyit edilebilirlik sağlar. Bu, analizlerin nesnel ve bağımsız bir şekilde gerçekleştirildiğini gösterir. Örneğin, KİBS sorularına verilen cevapların kategorilere atanması ve kanıt şemalarının belirlenmesi sürecinde araştırmacı ve uzman arasındaki anlaşma, teyit edilebilirliği güçlendirmektedir.

Betimsel analiz, araştırma verilerinin daha önceden belirlenen temalar ve kavramlar doğrultusunda özetlenmesine ve yorumlanmasına olanak tanır. Bu, araştırmanın geçerliliğini artırır çünkü elde edilen veriler, araştırma soruları ve amaçları ile uyumlu bir şekilde analiz edilir. Örneğin, KİBS sorularına verilen cevapların kavramsal ve işlemsel bilgiyi yansıtacak şekilde sınıflandırılması, araştırma sorularına yanıt verme ve matematiksel eşitlik kavramını doğru bir şekilde değerlendirme açısından geçerliliği artırır. KİBS sorularının ilgili literatürde daha önce geçerliği belirlenmiş sorulardan oluşturulması ve analizler yapılırken öğrenci cevaplarının bütüncül olarak değerlendirilmesinin geçerliği ve güvenilirliği arttıracaktır.

Tablo 1.KİBS kodlama ve açıklamalar

Sorular	Örnek Yanıtlar	Kodlar
	Prosedüre uygun denklem çözümü	
	Sadece doğru cevap	İşlem sel
$5x - 9 = 2x + 6$		
Yukarıdaki denklemi çözünüz.	Uygun prosedüre rağmen işlem hatası	
	Yanlış prosedür veya sadece yanlış cevap	Diğer
$x + 5 = 7$	Aynı-İki tarafın eşitliği vb.	Kavramsal
a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?	İşlemi yap-cevap	İşlem sel
b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?		
c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.	Yanıt yok-ilgisiz yanıtlar	Diğer
	$x=25$ çünkü eşitliğin her iki tarafına aynı işlemlerin yapılması eşitliği bozmaz.	Kavramsal
$x - 5 = 20$ Denklemde $x=25$ dir. Buna göre;		
$x - 5 + 40 = 20 + 40$ Denklemde x in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.	$x=25$ çünkü denklemi çözersek cevap 25 çıkar.	İşlem sel
	Yanıt yok-Bilmiyorum-Boş	Diğer
$2n + 15 = 31$		
$2n + 15 - 10 = 31 - 10$	Eşittir çünkü eşitliğin her iki tarafına aynı işlemlerin yapılması eşitliği bozmaz.	Kavramsal
Yukarıda verilen iki denklemde n değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebebini açıklayınız.	Eşittir çünkü denklemi çözersek cevaplar aynı çıkar.	İşlem sel

Tablo 2.Kanıt şemalarının özeti

Kanıt Şemaları	Kanıt Şemasının Karakteristiği	Gerçekleşme Metotları	
Otoriter	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Bir kanıtın neden doğru olduğu hakkında gerekçe geliştirme de yetersiz kalma ⇒ Kanıtın doğruluğunun birey tarafından belirlene memesi 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Teoremleri ezberlemek ⇒ Formülleri uygulamak ⇒ Kuralları uygulamak ⇒ Kanıtı öğretmene, arkadaşına, kitaba, anneye, babaya vs. dayandırmak 	
Dışsal Kanıt Şemaları	Ahşkanlık Edinilmiş	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Yüzeysel deliller sunmak ⇒ Bir kanıtın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurmak 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Tanıdık kanıt süreçlerini kullanmak ⇒ Diğer kanıt süreçlerine benzeyen kanıt süreçlerini kullanmak
	Sembolik	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Sembollerin anlamını anlamak ⇒ Sembolleri anlamsız deliller olarak sunmak ⇒ Bir kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanmak ⇒ Matematiksel semboller ile kanıtlamak 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Matematiksel durumları sembollerini kullanarak yazma ⇒ İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak ⇒ Bir kanıtın ilk ve takip eden adımlarına sembolik işleme yapmak
Deneyisel Kanıt Şemaları	Örnek Temelli	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Mantıksal delillerin bulunmaması ⇒ Sonuçları hızlıca yapmak ⇒ Bir kanıtın doğruluğunu örneklerle belirtmek 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Örnekler göstererek diğerleri ikna etmek ⇒ Bir kanıtı örnek göstererek oluşturmak
	Algısal	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Çizimler aracılığıyla kanıt basamakları ile hipotezleri ilişkilendirmek, bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etmek ⇒ Bir kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirtmek 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Akranlarını çizimlerle ikna etmek ⇒ Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak
Analiitik Kanıt Şemaları	Dönüştürülebilir	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Tutarlı basamaklar oluşturmak ⇒ Bir kanıtın önceki durumlarına mantıklı kuralları uygulamak 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Temel konuyu belirlemek ⇒ Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek
	Aksiyomatik	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme kurmak ⇒ Lineer metotları kullanarak kanıtlamak ⇒ Geleneksel kanıt süreçlerini kullanmak 	<ul style="list-style-type: none"> ⇒ Aksiyomatik bir sistem geliştirmek ⇒ Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak kanıtlama

Not: (Lee, 1999; Aktaran İskenderoğlu, 2010)

Etik

Bu araştırma Necmettin Erbakan Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Araştırma ve Yayın Kurulundan 15.01.2021 tarihli ve 2021/18 sayılı belge ile etik kurul onayı alınarak yapılmıştır.

BULGULAR

Öğrencilerin Sahip Oldukları Matematiksel Bilginin Sınıflandırılması

Bu bölümde, denklemde eşitlik kavramına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerini tespit etmeye yarayan sorulardan elde edilen veriler sunulmaktadır. Araştırmanın “Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları bilgi türü nedir?” alt sorusuna yanıt aranmaktadır. Tablo 3, bu sorulardan elde edilen sonuçların genel analizini içermektedir.

Tablo 3. KİBS'den Elde Edilen Verilerin Sorulara Göre Dağılımı

Kodlama	İşlemsel	Kavramsal	Diğer
1.soru	17	-	19
2.soru	13	21	2
4.soru	1	3	32
5.soru	1	3	32
6.soru	8	2	26
Toplam	40	29	111

KİBS'in ilk sorusu, yalnızca işlemsel bilgi düzeyini tespit etmeye odaklandığı için, bu soruyla ilgili herhangi bir kavramsal kod oluşturulmamıştır. Üçüncü soru ise, araştırmacının geçerli sonuçlar vermediğini düşünmesi üzerinde değerlendirme dışı bırakılmıştır. Geri kalan sorular ise, hem işlemsel hem de kavramsal kodlamalara olanak tanıyacak biçimde hazırlanmıştır.

KİBS Birinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

Tablo 3'te görüldüğü üzere 17 öğrenci işlemsel bilgiye sahip olarak belirlenmiştir. 17 öğrencinin tamamı soruya doğru çözüm yaparak doğru cevaplar üretmişlerdir. Bu durumda öğrenciler denklemlerde eşitliğin anlamına uygun işlemsel bilgiye sahip oldukları var sayılmıştır. Şekil 4 ve Şekil 5'te bu soruya ilişkin bazı örnekler verilmiştir.

$$5x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemi çözünüz.

$$3x = 15$$
$$x = 5$$

Şekil 4. B38 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap

$$5x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemi çözünüz.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{+9} \\ 5x - 9 = 2x + 6 \\ \xleftarrow{-2x} \end{array}$$

$$5x - 2x = 9 + 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$



Şekil 5. B151 Kodlu Öğrencinin KİBS 1. Soruya Verdiği Cevap

İşlemsel bilgiye sahip olduğu düşünülen öğrenciler denklemin çözümünde karşıya atma metodunu kullanmışlardır. Doğru cevap ve doğru çözüm üreten diğer öğrenciler de bu yöntemi kullanmışlardır. Ayrıca bu soruda 19 öğrencinin cevabı diğer olarak kodlanmıştır. “Diğer” kodu; yanlış çözüm, yanlış cevap, boş ve anlamsız cevapları içermektedir. 17 öğrenci başarılı denklem çözümü gerçekleştirirken, 19 öğrenci denklem çözümünde yetersiz kalmıştır.

KİBS İkinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

$$x + 5 = 7$$



a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?

Cevap: Esittir

b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?

Cevap: ~~iki~~ eşittirin bir tarafıyla bir tarafının aynı olduğunu gösterir

c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.

Cevap:

Şekil 6. KİBS 2. Soruya İlişkin Kavramsal Cevap Örneği 1

$$x + 5 = 7$$

↑

a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?

Cevap: eşittir

b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?

Cevap: her iki tarafın birbirine eşit olduğunu gösterir.

c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.

Cevap: Yoktur diye biliyorum. Aklımda bir tane var
O da Adalet'te "=" işareti aklıma geliyor.

Şekil 7. KİBS 2. Soruya İlişkin Kavramsal Cevap Örneği 2

Öğrencilerden elde edilen veriler değerlendirildiğinde, eşitlik kavramını anlamaya yönelik 21 öğrencinin kavramsal bilgisi olduğu, 13 öğrencinin ise işlemsel bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Buna ek olarak, iki öğrencinin yanıtları "diğer" kategorisinde sınıflandırılmıştır.

Şekil 6 ve Şekil 7'de yer alan öğrenci cevapları, eşitlik sembolünün her iki tarafın da aynı miktarı ifade ettiğine vurgu yapan ve bu nedenle "kavramsal" olarak kodlanan yanıtlardan oluşmaktadır. Bu örneklerde, öğrenciler iki farklı ifadenin eşit olma durumunu tanımlamaya çalıştıkları için, kavramsal bilgi düzeyine sahip oldukları düşünülmüştür.

Öte yandan, KİBS'in ikinci sorusunda 13 öğrencinin cevabı "işlemsel" kategoride yer almıştır. Bu öğrencilerin eşitlik sembolünü, "cevabı gösteren" veya "işlem ile sonucu ayıran bir işaret" biçiminde ele aldıkları tespit edilmiştir. Şekil 8 ve Şekil 9'daki cevaplara bakıldığında, söz konusu öğrencilerin eşitlik kavramının kavramsal yönünü dikkate almadıkları anlaşılmaktadır. Eşitliği, işlemin yapılması gereken bir sinyal olarak yorumladıkları için, bu öğrencilerin "işlemsel" bilgiye sahip oldukları düşünülmüştür. Ayrıca, bu soruda bir öğrenci soruyu boş bıraktığı için yanıtı "diğer" kategorisi altına dahil edilmiştir.

$$x + 5 = 7$$



- a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?
Cevap: eşittir

- b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?
Cevap: işlem yaptığımızda sonucu yazabilmek için işlemle sonucun arasında "=" işareti konulur.
Bakambiri ayırma işine yarar

- c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.
Cevap: Eşitlik anlamına gelir.

Şekil 8. KİBS 2. Soruya İlişkin İşlemsel Cevap Örneği 1

$$x + 5 = 7$$



- a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?
Cevap: eşittir

- b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?
Cevap: cevabı göstermeden önce yazılır

- c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.
Cevap: Bilmiyorum

Şekil 9. KİBS 2. Soruya İlişkin İşlemsel Cevap Örneği 2

KİBS Dördüncü ve Beşinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

Veriler analiz edildiğinde, üç öğrencinin yanıtlarının kavramsal anlama kategorisine uygun düştüğü belirlenmiştir. Bu öğrenciler, denklemlerdeki eşitlik kavramını, “iki ifadenin denk olması ve her iki tarafta çeşitli manipülasyonlar yapılabileceği” fikriyle ilişkilendirerek çözüm üretmişlerdir. Ayrıca, bir öğrencinin yanıtının işlemsel, 32 öğrencinin yanıtının ise

“diğer” olarak kodlandığı görülmektedir. “Diğer” koduna dâhil edilen öğrencilerin büyük çoğunluğunun, soruda denklem çözümü yapmaları istenmediği için soruyu boş bıraktıkları düşünülmektedir.

$x - 5 = 20$ denkleminde $x=25$ dir. Buna göre ;

$x - 5 + 40 = 20 + 40$ denkleminde x in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Cevap: Evet çok basit ~~x=25~~ iki tarafta da 40 var ama
iki tarafta 20 yok 1 tarafta var öbür tarafta $x-5$ var bunlar
20 eşit olacak bundan $x=25$ olur

Şekil 10. B151 Kodlu Öğrencinin KİBS 4. Soruya Verdiği Cevap

5) $n=8$
 $2n=16$
 $2n+15=31$

$n=8$
 $2n+15-10=31-10$

Yukarıda verilen iki denklemde n değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebebini açıklayınız.

Cevap: Evet eşittir çünkü iki tarafta da $2n+15$ var ve 31 var
bundan $n=8$

Şekil 11. B151 Kodlu Öğrencinin KİBS 5. Soruya Verdiği Cevap

B151 kodlu öğrencinin dört ve beşinci soruya verdiği cevaplar incelendiğinde (Şekil 10 ve Şekil 11) denklemin iki tarafında bulunan ifadeleri eşleştirerek eklenen veya çıkarılan sayının eşitliği bozmayacağı fikrine uygun cevap verdiği görülmektedir. Öğrenci KİBS 5. soruda “her iki tarafta da $2n+15$ var” diyerek denklemin iki tarafındaki eş ifadeleri belirlemiş ve soruda verilen ikinci denklemde şekil üzerinde (-10) ’ları işaretleyerek her iki tarafın eşit olduğunu belirlemiştir. Öğrenci karşılıklı olarak eklenen veya çıkarılan sayıları eşleyerek kalanların birbirine eşit olacağını göstermektedir. Buradan hareketle eşitliğin bozulmayacağı ve çözümün değişmeyeceği fikrine ulaşmıştır.

KİBS Altıncı Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

Bu soruya yönelik analizlerde, iki öğrencinin kavramsal bilgi düzeyine uygun cevaplar verdiği, sekiz öğrencinin ise işlemsel yaklaşımı yansıtan yanıtlar sunduğu tespit edilmiştir. Geriye kalan 26 öğrenci ise soruya anlamlı bir yanıt getirememiştir. Altıncı soru, hem işlemsel hem de kavramsal türde yanıtların verilebileceği şekilde düzenlenmiştir. Ancak dikkat çekici bir nokta, önceki dördüncü ve beşinci sorularda kavramsal nitelikte cevaplar üreten bir öğrencinin, altıncı soruda işlemsel bir çözüm yöntemine yöneldiğinin görülmesidir. Bu durumun, öğrencilerin pratik

veya daha kolay olduğu gerekçesiyle işlemsel bilgiyi kullanmaya eğilimli olmasıyla ilişkili olabileceği düşünülmektedir.

Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$\begin{array}{l} 2x+5=11 \\ 2x+5-5=11+5 \\ 2x=16 \\ \frac{2x}{2}=\frac{16}{2} \\ x=8 \end{array}$$

Cevap:

çünkü iki tarafıda(-5) ile toplandı

Şekil 12. B38 kodlu öğrencinin KİBS 6. soruya verdiği cevap

Şekil 12’de yer alan B38 kodlu öğrenci, “her iki tarafa eksi beş uygulamalıydı” diyerek, denklemde eşitliği korumak için aynı işlemin iki tarafta da yapılması gerektiğini vurgulamıştır. Öğrencinin ifadesi, farklı işlemlerin iki tarafa eşit biçimde uygulanmamasının eşitliği bozacağını kavradığını ve bu durumu kavramsal bilgiye dayanarak fark ettiğini göstermektedir.

Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$\begin{array}{l} 2x+5=11 \\ 2x+5-5=11+5 \\ 2x=16 \\ \frac{2x}{2}=\frac{16}{2} \\ x=8 \end{array}$$

Cevap:

Var çünkü $2x+5=11$
Si 11'in yanına +5 ekledik ve
 $x=3$

Şekil 13. B151 kodlu öğrencinin KİBS 6. soruya verdiği cevap

Önceki sorularda kavramsal temelli yanıtlar sunan A151 kodlu öğrenci, KİBS’in altıncı sorusunda ise daha çok işlemsel bir yöntem izlediği görülmüştür (Şekil 13). Öğrenci, denklemin iki tarafına yönelik birbirinden farklı müdahaleleri yorumlamak yerine, “(5)’i (11)’in yanına atmalıyız” diyerek “karşıya atma” adıyla bilinen algoritmaya dayalı bir çözüm yolu kullanmıştır. Ayrıca, KİBS sorularının genel analizinden yola çıkılarak, kavramsal bilgi düzeyine sahip üç öğrenci ve işlemsel bilgi düzeyine sahip üç öğrenci tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu altı öğrencinin sorulara verdikleri yanıtların kodlara göre dağılımı ise Tablo 4’te sunulmaktadır.

Tablo 4. KİBS' den Elde Edilen Verilere Göre Belirlenen Öğrenci Cevaplarının Kodlara Göre Dağılımı

Öğrenci	1.Soru	2.Soru	4.Soru	5.Soru	6.Soru
A1	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal
A3	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Kavramsal	İşlemsel
A55	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Diğer	İşlemsel
A63	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Diğer	İşlemsel
B38	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal
B151	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	İşlemsel

Öğrencilerin Kullandıkları Kanıt Şemaları

Bu araştırmada veri toplamanın ikinci aşaması, öğrencilerin denklem çözme süreçlerinde hangi kanıt şemalarını kullandıklarını belirlemek amacıyla yürütülmüştür. Bu doğrultuda, yarı yapılandırılmış görüşmeler KİBS verilerine göre kavramsal ve işlemsel bilgiye sahip olduğu düşünülen üçer öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler sırasında her öğrenciye üç denklem çözme problemi sunulmuş ve verdikleri yanıtlar üzerinden bir sınıflandırma yapılmıştır. Sonuçlar, tüm öğrencilerin dışsal kanıt şemaları kullandığını göstermiştir. Elde edilen bulguların bir özeti Tablo 5'te yer almaktadır.

Tablo 5. Kanıt şemaları belirleme mülakatlarına göre öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları

Öğrenci	Kanıt Şeması
A1	Dışsal-Otoriter-Aalışkanlık Edinilmiş
A3	Dışsal-Otoriter
A55	Dışsal-Otoriter
A63	Dışsal-Otoriter
B38	Dışsal-Otoriter-Sembolik
B151	Dışsal-Otoriter

A1 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

A1 kodlu öğrencinin KİBS' ten elde edilen verilere göre, denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olduğu düşünülmektedir. A1 Kodlu Öğrencinin kanıt şeması, otoriter ve alışkanlık edinilmiş kanıt şeması olarak belirlenmiştir. A1 Kodlu Öğrencinin kanıtlama sürecinde alışkanlık olarak edindiği işlemleri öne sürmüştür. İşlemlerin anlamlarını düşünmeksizin daha önceden öğrendiği süreçleri işe koşturmuş. Öğrenci işlemlerinden emindir, fakat doğruluğunu daha önce öğrendiği süreçlere bağlamaktadır.

.

.

.

Ö: Yani bunun doğru olduğunu nereden biliyorsun? Karşıya niye eksi diye geçiyor? Yani bu doğru mu? Belki de bunu yanlış biliyorsun.

A1: (Sessizce) Küçüklüğümden beri böyle öğrendim.

Ö: Sesli konuşabilirsin.

A1: Küçüklüğümden beri böyle öğrendim. Yani hep böyle yaptım ilk okulda da böyle yapıyorduk. Küçüktüm fazla karmaşık değildi ama yine böyle oluyordu.

Öğrenci sonucunun doğruluğunu açıklarken denklem çözümede karşı tarafa atma metodunu kullanmış fakat anlamına dikkat etmemiştir. İşaretin karşıya geçerken niye değiştiği sorulduğunda öğrenci küçüklüğünden beri böyle öğrendiğini söylemiş fakat yaptığı işlemlerden anlamına daha önce dikkat etmediği görülmektedir.

A3 kodlu öğrencinin kullandığı kanıt şeması

A3 kodlu öğrencinin, KİBS' ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olduğu düşünülmektedir.

Ö: *Doğru olduğunu nasıl anlarsın bunların?*

A3: *Bunu karşı tarafa attıktan sonra $2x$ eşittir 20 eksi 10 oluyo oda her iki tarafı ikiye böldüğümüzde beş sonucunu veriyor.*

.

.

.

Ö: *Tamam. Neden böyle bir şey yapıyoruz?*

A3: *Neden. Böyle birsey yapıyoruz? (Düşünüyor)*

Ö: *Böyle birsey yapmayı nereden öğrendin?*

A3: *Böyle bir şey yapmayı ... (Düşünüyor)*

Ö: *Cevabın yok sanırım?*

A3: *Yok aynen.*

Öğrenci mülakatlarda denklemlerin çözümünde bulduğu sonuçları ve yaptığı işlemlerin doğruluğunu kanıtlamakta zorlanmış ve çoğunlukla cevapsız bırakmıştır. Yani öğrenci yaptığı işlemlerin üzerine daha önce düşünmemiş, otoriteden öğrendiği işlemleri aynen ezberlemiştir. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

A63 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

KİBS' ten elde edilen veriler sonucunda, A63 kodlu öğrencinin denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olduğu belirlenmiştir. Öğrenci mülakatlar esnasında yaptığı işlemlere ve sonuçların doğruluğundan emin olmak için yeterli gerekçelendirmeler yapamamıştır. Ayrıca sonuçların doğruluğunu öğretmenin anlattıklarına bağlamış "Öğretmenim anlattıysa doğrudur" şeklinde açıklama yapmıştır. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

Ö: *... işlemlerin doğruluğundan nasıl emin oluyorsun?*

A63: *Matematik dersinde öğrendim*

Ö: *Peki matematik dersinde öğrendiğin bu işlemlerin doğru olduğunu nereden biliyorsun? Belki hoca sana yanlış öğretti bundan emin olabilir misin? Daha doğrusu nasıl emin olabilirsin?*

A63: *Emin olmam şu şekilde bu problemin cevabının yanlış olup olmadığını...bi dakika... (düşünüyor). Şu an... onu düşünmedim hiç.*

Ö: *Öğretmen derste birşey anlattığında anlattığı şeyin doğru olup olmadığını düşünüür müsün?*

A63: *Düşünmem.*

Ö: *Neden?*

A63: *Çünkü öğretmenim o benim. Öğretmenim eğitimini almış mesela okulunu*

okumuş benden de daha iyi bilgi sahibi olduğu için ona güvenirim.

A55 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

KİBS sonuçlarına göre A55 kodlu öğrencinin, denklemlerdeki eşitlik bilgisini işlemsel düzeyde edindiği tespit edilmiş, ayrıca görüşmeler sırasında denklem çözümünde zorlandığı gözlenmiştir. Kanıt şemaları belirleme mülakatlarında, öğrenci gerek işlemlerini gerekse elde ettiği sonuçları açıklamakta yetersiz kalmış ve kendi başına bir kanıt oluşturma girişiminde bulunmamıştır. Bunun yerine, öğretmeninden veya ders kaynaklarından edindiği bilgileri doğrudan uyguladığını ifade etmiştir. Bu nedenle, otoriter kanıt şemasını benimsediği sonucuna varılmıştır.

Ö: Bu işlemlerinin doğru olduğuna emin misin veya nasıl emin olursun işlemlerinin doğru olduğundan?

A55: (Düşünüyor.) Doğru hocam bence doğru.

Ö: Nerden biliyorsun doğru olduğunu nasıl anlarsın?

A55: Hocam sizin anlattığınız gibi dediğinizi yaptım ama yani yanlışım da olabilir. Çünkü anlattığınızda tam anlamamıştım.

.
.
.

Ö: ... Doğru mu bu işlemler doğruluğunu nereden biliyorsun?

A55: Hocam ben sizin anlattığınız bütün her şeyi yaptım. Artı evde konu tekrarı yapıyorum. Testte çözüyorum bu yüzden doğru hocam.

Görüldüğü gibi öğrenci ‘‘Hocam ben sizin anlattığınız her şeyi yaptım’’ diyerek dış kaynaklardan edindiği bilgileri yeterli görmüş başka bir kanıtı ihtiyaç duymamıştır. Öğrencinin gerekçelendirmeleri otoriter kanıt şemalarının gereklerini karşılamaktadır.

B38 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

B38 kodlu öğrencinin KİBS’ ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olduğu düşünülmektedir. Öğrenci işlemlerinin doğruluğunu açıklarken sembollerin özellikleri bu işlemleri yapılmasını gerektiriyormuş gibi açıklama yapmış fakat altında yatan anlamlara dikkat etmemiştir. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması sembolik kanıt şeması olarak belirlenmiştir.

Ö: O zaman sonucunun değil de aradaki işlemlerin doğru olduğunu nasıl anlayabilirsin. Veya diyelim ki bir arkadaşın sen bu işlemleri gösterdiğinde niye karşıya atarken işaretini değiştireyim derse sana sen bu yöntemlerin doğru olduğunu ona nasıl ispatlarsın?

B38: Çünkü arada eşittir var. Artıda karşıya eksi olarak geçer. Çarpmanın da tam tersi bölmedir. Toplamanın da tam tersi eksidir o yüzden eksi olarak gider.

Görüldüğü gibi öğrenci, gerekçelendirmesinde işlemleri kullanmış fakat sanki işlemler bunu gerektiriyormuşçasına açıklama yapmıştır. Örneğin öğrenci toplamının tersinin çıkarma olduğunu bilmekte fakat bunu niye burada kullandığına dair bir açıklama getirememektedir.

B151 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

B151 kodlu öğrencinin, KİBS verileri doğrultusunda denklemlerdeki eşitlik bilgisini kavramsal düzeyde edindiği düşünülmektedir. Ancak mülakatlar sırasında, öğrenci çözdüğü denklemleri temellendirmekte güçlük yaşamış ve genellikle çözüm sürecini tekrarlamakla yetinmiştir. Edindiği bilgilerin doğruluğunu da çoğunlukla öğretmenlerine dayandırmıştır. Bu sebeple, öğrencinin kanıt şemasının ‘‘otoriter’’ olduğu değerlendirilmiştir.

Ö: İşleminin sonucunun doğru olduğunu nereden biliyorsun? Nasıl anlarsın?

B151: Hocam kontrol ettiğimiz zaman yani hocamız bize böyle öğretti.

İspat şemaları belirleme mülakatlarının yapıldığı 6 öğrenciden elde edilen bulgulara göre hepsinin dışsal kanıt şemalarını kullandığı görülmektedir. Öğrenciler işlemlerin anlamlarına dikkat etmeksizin yaptıkları bu işlemleri ispat olarak düşünmüşler ve doğruluğunu kendi zihinsel süreçlerinden ziyade dışsal kaynaklara bağlamışlardır. Öğrencilerin dördü, yaptıkları işlemlerin doğruluğunu otorite olarak gördükleri öğretmenlerine bağlamışlardır. Bir öğrenci gerekçelendirmesini alışkanlık olarak tarif ederken bir öğrencide işlemleri anlamsız semboller gibi kullanmış ve bu işlemleri kanıt olarak kabul etmiştir.

Kanıt Şemalarının Matematiksel Bilgi Açısından İncelenmesi

Bu bölümde, “Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları matematiksel bilgi türü, elde ettikleri sonuçların doğruluğunu kanıtlamada kullandıkları kanıt şemalarını etkiler mi?” sorusuna ilişkin bulgular sunulmaktadır.

Tablo 6’da görüldüğü üzere, öğrencilerin tamamının -matematiksel bilgi türü fark etmeksizin- dışsal kanıt şemalarını kullandığı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra, iki öğrencinin ikinci şema olarak “sembolik” ve “alışkanlık edinilmiş” kanıt şemalarına da başvurduğu gözlemlenmiştir. İkinci bir kanıt şeması kullanan bu iki öğrencinin kavramsal bilgi düzeyinde olduğu, ancak işlemsel bilgiye sahip olan öğrencilerin yalnızca bir şema ile yetindikleri görülmektedir.

Tablo 6. Nihai katılımcıların kullandıkları matematiksel bilgi türleri ve kanıt şemaları

Öğrenci	Matematiksel Bilgi	Kanıt Şeması
A1	Kavramsal	Dışsal-Otoriter-Alışkanlık Edinilmiş
A3	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
A55	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
A63	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
B38	Kavramsal	Dışsal-Otoriter-Sembolik
B151	Kavramsal	Dışsal-Otoriter

TARTIŞMA

Çalışmanın ilk aşamasında, öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgilerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu süreçte, pek çok öğrencinin denklem çözümü konusunda, hatta algoritma düzeyinde bile yetersizlik yaşadığı görülmüştür. Üstelik, doğru yanıt veren öğrencilerin tamamının “karşıya atma” biçiminde bilinen bir algoritmayı kullandığı tespit edilmiştir. Bu durum, öğrencilerin denklem çözümünde kavramsal bilgiden ziyade ezbere dayalı prosedürleri tercih ettiğini göstermektedir. Elde edilen bu bulgu, cebir problemi çözen öğrenciler için güç olduğunu ve cebirsel problem çözme performanslarının kavramsal anlayışla ilişki içinde bulunduğunu vurgulayan Steinberg ve arkadaşları (1991), Knuth ve arkadaşları (2005, 2006) ile Alibali ve arkadaşları (2007) tarafından yapılan çalışmalarla uyum içindedir. Ayrıca, öğrencilerin eşitlik sembolünün anlamı hakkında verdiği yanıtlar, Alibali ve arkadaşları (2007) çalışmasındaki verilerle benzerlik göstermektedir. Knuth ve arkadaşları (2005) ise benzer biçimde, öğrencilerin birçoğunun üst sınıflara geçmesine rağmen kavramsal anlayış kazanamadığını rapor etmişlerdir.

Örtük kavramsal bilgiyi belirlemeyi hedefleyen KİBS’in (Kavramsal-İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları) üçüncü ve dördüncü maddelerinden elde edilen verilere bakıldığında, öğrenciler ilk bakışta kavramsal bilgiye sahipmiş gibi görünse de bu bilgiyi zihinsel düzeyde yeterince oluşturmadıkları veya kullanamadıkları görülmektedir. Knuth ve arkadaşları (2005, 2006) da benzer bir şekilde, öğrencilerin çoğunun eşitliğin anlamını biliyor olsa dahi çok

azının bu anlam doğrultusunda işlem yapabildiğini ortaya koymuştur.

KİBS'in altıncı sorusuna ilişkin bulguların, dördüncü ve beşinci sorulardaki sonuçlarla örtüştüğü göze çarpmaktadır. Ancak, önceki sorularda kavramsal bir yanıt sunabilen bir öğrencinin bu altıncı soruda işlemsel bir yaklaşım benimsediği de belirlenmiştir. Bunun nedeni, öğrencilerin çoğunlukla kavramsal bilgilerini gerektiren durumlar dışında kullanmamaları ve işlemsel bilgiye başvurmanın daha kolay bulunması olabilir. Bu sonuç, Fyfe ve arkadaşlarının (2020) çalışmasındaki, cebirde kavramsal bilgiye sahip bazı öğrencilerin yine de işlemsel yanıtlar vermeyi tercih ettiği bulgusuyla paralellik göstermektedir. Ayrıca, işlemsel bilgi kullanımı rutin problemlerin çözümünü kolaylaştırabilmektedir (Ngu vd., 2015; Ngu ve Phan, 2016).

Eşitlik kavramıyla ilgili önceki araştırmaların benzer bulguları göz önüne alındığında, öğrencilerin matematiksel eşitliği daha çok işlemsel bir çerçevede görmeleri şaşırtıcı değildir. Kieran (1981) ve Rittle-Johnson ile Alibali (1999), öğrencilerin büyük kısmının bilgilerini işlemsel düzeyde sergilediğini belirtmişlerdir. Denklem çözümünü hatasız gerçekleştiren öğrenciler ise eşitlik sembolüne dair kavramsal açıklamalar yapabilmiş, hatta rutin olmayan problemlerde doğru yanıtlar da bu gruptan gelmiştir. Bu gözlemler, denklem çözme becerileriyle eşitlik sembolünün kavramsal olarak anlaşılması arasında bir ilişki olabileceğini düşündürmektedir. Fyfe ve arkadaşları (2020) da cebir problemi çözümedeki başarı ile eşitlik kavramının anlaşılması arasında benzer bir bağlantıyı ortaya koymuşlardır. Ayrıca, Knuth ve arkadaşları (2006) ile Fischer ve arkadaşları (2019) benzer sonuçlar elde etmiştir. Ertekin (2017) de eşitliğin ilişkisel bir sembol olarak anlaşılmasının cebirsel denklem çözümünde önemli bir rol oynadığını vurgulamıştır.

Araştırmanın ikinci bölümünde, “8. sınıf öğrencileri denklemlerde eşitlik kavramı ile ilgili problemleri çözerken ortaya koydukları sonuçları doğrulamak için hangi kanıt şemalarını kullanır?” sorusuna yanıt aranmıştır. Öğrencilerin tamamının, Harel ve Sowder'in (1998) kanıt şeması sınıflandırmasına göre dışsal kanıt şeması ve onun alt şemalarını kullandığı belirlenmiştir. Diğer şemaların kullanımına dair herhangi bir veri elde edilememiştir. Bu sonucun, seçilen örneklemin kısıtlı olması ve öğrencilerin ispat anlayışının genel olarak gelişmemiş olmasından kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Yine de bu durum, Harel ve Sowder (2007) ile Flores'in (2002) çalışmalarında öne çıkan “öğrencilerin çoğunlukla dışsal ve deneysel şemalara yöneldiği” bulgusuyla da uyum içindedir.

Mevcut araştırmada, öğrenciler en çok otoriter kanıt şemalarına başvurmuştur. Bu şemayı kullananlar, işlemlerinin doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi dışsal bir otoriteye dayandırmışlardır (Flores, 2006; Harel, 2001). Öğrencilerin, verilen problemlerin doğruluğunu kanıtlamaya çalışırken öne sürdükleri açıklamaların otoriter şema ile örtüşmesi, konuya özgü öğrenme alışkanlıklarıyla ilişkili olabilir. Harel ve Sowder (2007) de konunun yapısının, öğrencilerin başvurdukları kanıt şemalarını etkileyebileceğini ifade etmiştir.

Sadece iki öğrencinin gerekçelendirmelerinde “alışkanlık edinilmiş” ve “sembolik” şemalara başvurduğu görülmüştür. Bu öğrenciler aynı zamanda otoriter şemaları da kullanmıştır. Bu durum, öğrencilerin kendi gerekçelerini sunabiliyor olsalar bile ikincil bir temellendirme olarak yeniden otoriteyi işaret etme eğiliminde olduklarını aktaran diğer çalışmalarla (İskenderoğlu, 2010; Flores, 2002) uyumludur. A1 kodlu öğrenci, görüşmeler sırasında alışkanlık edinilmiş şemaya yönelik açıklamalar yaparken, B38 kodlu öğrenci işlemlerini “zaten böyle yapılması gerektiği” anlayışıyla aktarmış ve sonuçlarının doğruluğunu sembolik manipülasyonlarla bağlantılandırmıştır. Flores (2006) da birçok öğrencinin sembolik gerekçeler sunduğunu, ancak bu öğrencilerin çoğunun niceliksel ilişkileri dikkate almaktan çok, işlemsel adımları neden-sonuç ilişkisi olmaksızın sıraladıklarını vurgulamıştır. Bu öğrenciler, sembolik manipülasyonları ne yaptıklarını bilerek uyguladıkları da yaptıklarının derin anlamını açıklayamamıştır. Benzer şekilde, kavramsal bilgiye sahip olan öğrencilerin de kanıtlarını çoğunlukla kavramsal temellere dayandırmadığını gösteren Flores (2006) bulguları, bu çalışmanın verileriyle örtüşmektedir.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Araştırma bulguları, sekizinci sınıf öğrencilerinin önemli bir kısmının denklem çözme becerilerinde, hatta işlemsel düzeyde dahi yetersizlikler yaşadığını göstermektedir. Öğrencilerin hem işlemsel hem de kavramsal düzeylerini tespit etmek değerli olsa da sonuçlar, genel olarak öğrencilerin bu konudaki bilgi birikiminin yeterli olmadığını ortaya koymaktadır. Çalışmaya katılan öğrenciler eşitlik sembolünün kavramsal düzeydeki anlamını bildiklerini ifade etseler bile, söz konusu sembolün gerektirdiği biçimde işlem yapamamışlardır. Örneğin, eşitlik sembolüne dair bilgi sahibi 21 öğrenciden yalnızca üçü, eşitlik kavramına uygun şekilde işlem gerçekleştirebilmiştir. Bu durum, eşitlik sembolüne ilişkin bilginin, buna paralel olarak doğru uygulama yapmayı her zaman garanti etmediğini göstermektedir. Ancak, “matematiksel eşitlik bilgisini uygun biçimde kullanabilen öğrencilerin aynı zamanda sembolü kavramsal düzeyde anlamaları” bu iki durum arasında bir ön koşul bağı olabileceğini akla getirmektedir.

Öte yandan elde edilen veriler, denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin kavramsal bilgisi zayıf olan sekizinci sınıf öğrencilerinin bu konuyu yeterince kavrayamadığını da göstermektedir. Çoğu öğrenci, kendilerine yöneltilen denklem çözme sorularına yalnızca işlemsel bilgi ışığında cevap vermekte; işlemsel bilgi yetersiz kaldığında ise soruları cevapsız bırakmaktadır. Sonuçlar, öğrencilerin denklem çözümünde genel olarak bir algoritmayı takip edebildiklerini ancak bunun altında yatan anlama odaklanmadıklarını, dolayısıyla kavramsal anlayışlarının zayıf olduğunu göstermektedir. Öğretim ortamlarında öğrencilerden, düşündüklerini ayrıntılı biçimde ifade etmeleri ve buldukları sonuçları doğrulamalarını istemek; hem kavramsal anlayışı pekiştirebilir hem de yapılan işlemlerin arkasındaki anlamı fark etmelerine katkı sunabilir. Bu doğrultuda öğretmenlerin, öğrencilerin işlemleri gereçlendirmesine imkân tanıyan sınıf ortamları oluşturması, geçerli kanıtın ne olduğuna dair rehberlik sunması ve matematiksel ifadelerin anlamlı kullanımını teşvik etmesi önemlidir. Böylece öğrencilerin resmî (formal) kanıtlara geçiş yapmaları için uygun bir temel atılmış olacaktır.

Araştırmanın öne çıkan bir başka bulgusu, öğrencilerin eşitlik sembolünü sadece denklem çözme prosedürünün bir adımı olarak görüyor olmalarıdır. Denklem çözümünü; benzer terimleri bir araya getirmek, sayı ile bilinmeyenleri ayırmak ve belirli algoritmaları sırasıyla uygulamaktan ibaret saymaktadırlar. Çalışmanın verileri, denklemlerde eşitlik kavramına işlemsel düzeyde hâkim olan öğrencilerin alternatif çözümler üretmediklerini göstermektedir. Buna karşın, kavramsal bilgiye sahip öğrenciler, bilgilerini daha esnek biçimde yeni durumlara uyarlayarak farklı çözümler geliştirebilmişlerdir. Eşitliği salt denklem çözmenin bir parçası olarak görmek, öğrencilerde yetersiz bir anlayış oluşturmakta olup, bu nedenle öğrencilerin denklem çözümünde kavramsal anlayış kazandıklarından emin olmak gerekmektedir. Kavramsal bilgi gelişimini hedefleyen öğretim uygulamaları geliştirmek ve öğrencileri alışılmışın dışında problemlerde kavramsal yanıtlar aramaya yönlendirmek faydalı olabilir. Ayrıca, öğrencilerin kendi zihinsel yapılarını kurabilmeleri için onlara fırsat sunulması ve bu yönde uygun öğrenme ortamlarının oluşturulması, kanıt şemalarının gelişmesine de katkı sağlayabilir. Öğrencilere yalnızca “cevabın doğruluğu” yerine, “nasıl ve neden bu sonuca ulaştıklarını” sorgulamalarını sağlayacak sorular yönelmek, işlem ve çözümlere daha derinlemesine bakmalarına yardımcı olacaktır.

Bunun yanı sıra, araştırmada öğrencilerin denklem çözümlerinde kullandıkları kanıt şemaları da incelenmiştir. Görüşmelere katılan tüm öğrenciler, gerekçelerini açıklarken daha çok dışsal kanıt şemalarına başvurduklarını belirtmişlerdir. Bu öğrenciler için, matematiksel eşitlik içeren bir problemin doğruluğuna ikna olmak adına öğretmen veya ders kitabından edindikleri bilgi ya da alışılmış işlem kalıpları yeterli görünmektedir. Dışsal kanıt şemasını benimseyen öğrenciler, bilgiyi kaynağından olduğu gibi alıp uygulamakta ve bunun doğruluğunu kendi akıl yürütmeleriyle sorgulamamaktadır. Bu eğilimde, öğretmenlerin bilgiyi doğrudan aktarıcı şekilde konumlanmasının da etkili olabileceği düşünülmektedir. Öğrenciler, öğretmenlerinin her zaman doğruyu bildiğini varsayarak güven duymakta ve süreci daha fazla sorgulama ihtiyacı hissetmemektedir. Bu durumu aşmak için öğretmenlerin mutlak otorite

pozisyonundan çıkıp daha çok rehberlik edici ve yön gösterici bir role evrilmeleri önerilmektedir.

Öğrencilerin kanıt şemaları ve sahip oldukları matematiksel bilgi türü değerlendirildiğinde, bütün öğrencilerin -kavramsal veya işlemsel düzeyde olsun- büyük ölçüde dışsal kanıt şemalarına başvurdukları tespit edilmiştir. İşlemsel düzeyde eşitlik bilgisi olan öğrenciler, denklem çözümlerindeki adımları ve işlemleri gerekçelendirmekte zorlanmaktadır. Bu öğrenci grubu, rutin algoritmaları harfiyen uygular ancak yeni bir durumla karşılaştığında farklı bir çözüme ulaşmakta güçlük çeker. Aynı durum kanıt şemaları için de geçerli olup, işlemsel bilgiye sahip öğrenciler gerekçelerini yine otoriteye veya sembollerin formel kullanımına dayandırmakta ve sorgulamaya açık bir kanıt sunamamaktadırlar. Bu yaklaşımın, denklem çözme sürecinde de güçlük yaşamalarına neden olduğu açıkça görülmüştür.

Dikkate değer bir diğer sonuç ise, beklenenin aksine, kavramsal bilgiye sahip öğrencilerin de gerekçelendirmelerinde dışsal kanıt şemalarına yönelmiş olmalarıdır. Bu öğrenciler, problem çözümünde kavramsal bilgilerini devreye sokarak esnek ve doğru çözümlere ulaşabildikleri hâlde, aynı başarıyı işlemlerini temellendirirken gösterememişlerdir. Kavramsal bilgisi yüksek öğrencilerden, işlemlerin arkasındaki anlamı açıklamaları ve dönüşümsel gerekçeler sunmaları beklenirken, çoğunlukla yine otoriteye, alışkanlıklara ve anlamsız sembol manipülasyonlarına dayalı gerekçeler vermişlerdir. Bu nedenle, hem kavramsal anlayışı derinleştirmek hem de geçerli kanıt ortaya koymayı desteklemek adına öğretim programlarına kanıtlanma ve gerekçelendirme becerisi kazandırmayı amaçlayan hedeflerin eklenmesi yararlı olabilir. Aynı şekilde, ders kitapları da öğrencilerin kendi keşiflerini yapabilecekleri ve elde ettikleri matematiksel bilgiyi temellendirebilecekleri şekilde düzenlenebilir.

Kavramsal bilgisi yeterli görülen öğrencilerin yanıtları üzerinde yapılan iki ayrı değerlendirme karşılaştırıldığında, bu öğrencilerin özellikle kavramsal ve işlemsel bilgiyi ölçmeye yönelik sorulara dayanarak gerekçeler sunabildikleri görülmüştür. Ancak, mülakatlarda yaptıkları işlemlerin nedeni sorulduğunda, benzer bir düzeyde açıklama yapamadıkları anlaşılmıştır. Dolayısıyla kavramsal bilgileri olsa da gerekçelendirme yaparken bu bilgi birikiminden yararlanmayı tercih etmemektedirler. Elde edilen bulguların genellenebilirliğinin artması için daha geniş çaplı veri toplanması gerektiği açıktır. Ayrıca hem kanıt şemalarının hem de matematiksel bilgi türlerinin öznal yönü, ölçmeyi ve değerlendirmeyi karmaşıklştırmaktadır. Bu nedenle, bu kavramları geçerli ve güvenilir biçimde inceleyebilmek için daha fazla araştırma yapılması gerekmektedir.

KAYNAKÇA

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221-247. [DOI: 10.1080/10986060701360902]

Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). Farklı Sınıf Düzeylerindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlanma Süreçleri, Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu

Baratta, W. (2011). Linear equations: Equivalence = Success. *Australian Mathematics Teacher*, 67(4), 6-11. [DOI: 10.3316/informit.591443069101671]

Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377. [DOI: 10.1016/j.dr.2014.10.001]

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: a theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational*

Sciences, 4(2), 47-71. [DOI: 10.17984/adyuebd.52880]

Ertekin, E. (2017). Predicting eighth-grade students' equation solving performances via concepts of variable and equality. *Online Submission*, 8(21), 74-80.

Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, 34(2), 439-456. [DOI: 10.1007/s10212-018-0384-y]

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-274.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132. [DOI: 10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x]

Fyfe, E. R., Matthews, P. G., & Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 65-85. [DOI: 10.1007/s10649-020-09947-2]

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44, 87-125.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. In S. Campbell and R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory*, *Journal of Mathematical Behavior*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation, 185-212.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues In Mathematics Education*, 7, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective of proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook Of Research On Teaching And Learning Mathematics*, 2, 805-842.

İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Şemaları [Doctoral dissertation, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Trabzon].

İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve Kanıt Şemaları. In Erhan Bingölbali, Selahattin Arslan, İ. Özgür Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 65-82: Pegem Akademi.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326. [DOI: 10.1007/BF00311062]

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 390-419. Macmillan Publishing Co, Inc.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76. [DOI: 10.1007/BF02655899]

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence &

Variable. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*. Springer, Berlin, Heidelberg. [DOI: 10.1007/978-3-642-17735-4_15]

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312. [DOI: 10.2307/30034852]

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125. [DOI: 10.1023/A:1012785106627]

Matematik Dersi Öğretim Programı-MDÖP. (2018). *İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar*. MEB yayınları.

Ngu, B. H., & Phan, H. P. (2016). Comparing balance and inverse methods on learning conceptual and procedural knowledge in equation solving: a cognitive load perspective. *Pedagogies: An International Journal*, 11(1), 63-83. [DOI: 10.1080/1554480X.2015.1047836]

Ngu, B. H., Chung, S. F., & Yeung, A. S. (2015). Cognitive load in algebra: element interactivity in solving equations. *Educational Psychology*, 35(3), 271-293. [DOI: 10.1080/01443410.2013.878019]

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189. [DOI: 10.1037/0022-0663.91.1.175]

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford Handbook of Numerical Cognition*, 1118-1134.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E., & Loehr, A. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: the impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology*. [DOI: 10.1037/0022-0663.91.1.175]

Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative development of conceptual and procedural knowledge in mathematics learning and instruction. In J. Dunlosky & K. A. Rawson (Eds.), *The Cambridge handbook of cognition and education*. 124-147. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108235631.007>

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1991). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121. [DOI: 10.5951/jresmetheduc.22.2.0112]

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics*. Pearson Education.

Yanık, H. B. (2016). Kavramsal ve işlemsel anlama. In Erhan Bingölbali, Selahattin Arslan, İ. Özgür Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 101-116. Pegem Akademi.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (11. Baskı)*. Seçkin Yayıncılık.

ETİK ve BİLİMSEL İLKELER SORUMLULUK BEYANI

Bu çalışmanın tüm hazırlanma süreçlerinde etik kurallara ve bilimsel atıf gösterme ilkelerine riayet edildiğini yazar(lar) beyan eder. Aksi bir durumun tespiti halinde Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi'nin hiçbir sorumluluğu olmayıp, tüm sorumluluk makale yazarlarına aittir. Yazarlar etik kurul izni gerektiren çalışmalarda, izinle ilgili bilgileri (kurul adı, tarih ve sayı no) yöntem bölümünde ve ayrıca burada belirtmişlerdir.

Kurul adı: Necmettin Erbakan Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimsel Araştırmalar Etik Kurulu

Tarih:15/01/2021

No:2021/18

ARAŞTIRMACILARIN MAKALEYE KATKI ORANI BEYANI

1. yazar katkı oranı: %50

2. yazar katkı oranı: %50