Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Bilecik Seyh Edebali University Journal of Science

10(2), 408-413, 2023

DOİ: 10.35193/bseufbd.1252580

e-ISSN: 2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

Araştırma Makalesi - Research Article

Elastik Yarı Düzlem İçin Bir Hareketli Yük Problemi

A Moving-Load Problem for Elastic Half-plane

İpek Akkaya[1*], Elçin Yusufoğlu[2]

Geliş / Received: 17/02/2023 ***Revize / Revised:23/03/2023*** ***Kabul / Accepted: 24/03/2023***

ÖZ

Bu çalışmada elastik bir yarı düzlemin sınırı boyu sabit hızla hareket eden bir normal kuvvetin etkisini dikkate alan bir dinamik problem konu edilmiştir. Lame hareket denklemi ve sınır koşulları boyuna ve enine dalga fonksiyonları cinsinden ilgili sınır değer problemine indirgenmiştir. Daha sonra hareketli koordinat sisteminden durağan koordinat sistemine geçilerek bu sınır değer problemi Fourier dönüşümü yardımıyla diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine indirgenmiştir. Fourier düzleminde boyuna ve enine dalga fonksiyonlarının ilgili integral dönüşümü belirlenmiş olup ters Fourier tekniği kullanılarak, nihayet yer değiştirme bileşenleri belirlenmiştir. Normal yükün hareket hızının Rayleigh dalga hızından küçük ve büyük olduğu durumlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler- Potansiyel Fonksiyonları, Fourier Dönüşümü, Rayleigh Dalga Hızı

ABSTRACT

In this study, a dynamic problem that takes into account the effect of a normal force moving at a constant speed along the boundary of an elastic half-plane has been discussed. The Lame equation of motion and the boundary conditions have been reduced to the related boundary value problem in terms of longitudinal and transverse wave functions. Then, by switching from the moving coordinate system to the stationary coordinate system, this boundary value problem was reduced to boundary value problems for differential equations with the help of the Fourier transform. The corresponding integral transformation of the longitudinal and transverse wave functions in the Fourier plane was determined and the displacement components were finally determined using the inverse Fourier technique. Cases in which the moving speed of a normal load is smaller and larger than the Rayleigh wave speed have been studied.

Keywords- Potential Functions, Fourier Transform, Rayleigh Wave speed

[1*]Sorumlu yazar iletişim: akkayaipek98@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-9053-9522)
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye
[2]İletişim: elcin.yusufoglu@usak.edu.tr (https://orcid.org/0000-0001-8091-5785)
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi, Uşak Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi, Uşak, Türkiye

I. GİRİŞ

Günümüzde elastik bir taban üzerine yerleştirilmiş yapılar, plaklar ve kirişler yaygın olarak kullanılmaktadır. Teknolojinin gelişmesiyle birlikte yapılar üzerindeki dinamik etkiler arttıkça titreşim önleyici koruma gereksinimleri de artıyor. Yapıların salınımlarıyla ilgili birçok pratik önemli problemler elastikiyet teorisinin dinamik temas problemleri olarak incelenebilmektedir.

Küçük dalgalanmalar durumunda elastiklik teorisi denklemlerinin kullanımı, pratik ve teori arasında tatmin edici uygunluk sağlamaktadır. Bu dalgalanmalar çatlak ve darbe mekaniğinde dinamik temas problemleri olarak incelenmektedir. Bir matematiksel elastiklik problemi gibi dinamik temas problemlerine [1-5] kaynaklarında detaylı yer verilmiştir.

Jeofizik ve inşaat mühendisliği uygulamalarında homojen olmayan yarı uzaylar için yüzey dalgalarının davranışı incelendi [6,7]. Bu çalışmalarda nonhomojenite parametresinin ve tabaka kalınlıklarının yüzey dalgasının faz hızına etkisi araştırıldı. Yüzey dalgaları fiber takviyeli polimerle güçlendirilmiş beton yapıları ve kompozit gibi mekanik ve inşaat mühendisliği yapılarını incelemek ve değerlendirmek için yaygın olarak dikkate alınmaktadır [8-10]. Xu ve Ma,[11] çalışmalarında çok katmanlı bir yarı uzayın periyodik hareketli bir yüke tepkilerini araştırdılar.

Yüzey dalgalarının elastik ortama etkisi araştırılır iken integral dönüşüm tekniği sıkça kullanılmaktadır. Fourier İntegral Dönüşümünün kullanıldığı bu makalede, yüzeyi boyunca sabit hızla hareket eden noktasal normal yükün etkisiyle yarı uzayda oluşan gerilme deformasyon problemi yer değişme vektörü bileşenleri cinsinden çözülmüş olup normal yükün hareket hızının Rayleigh dalga hızından küçük ve büyük olduğu durumlar ayrıca incelenmiştir.

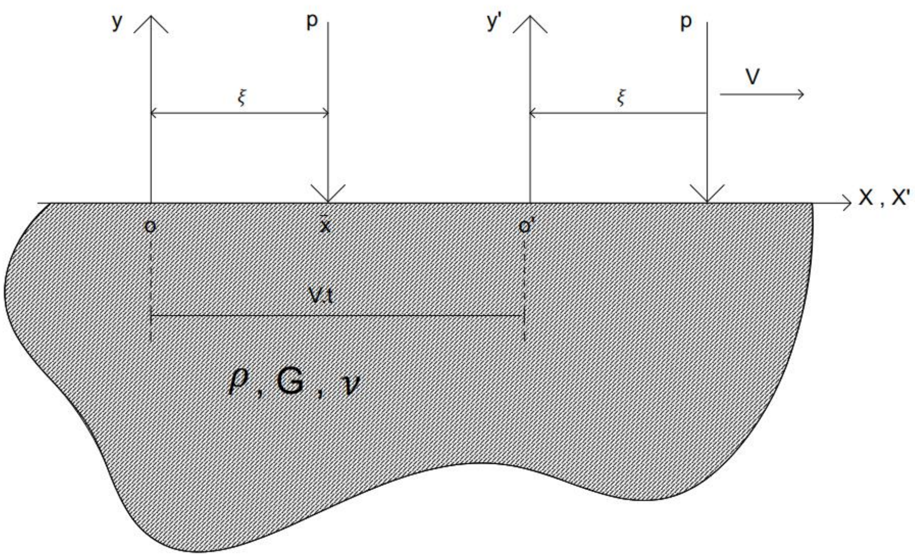
II. PROBLEM TANITIMI VE FORMÜLASYONU

Düzlem deformasyon durumu koşulları altında elastik yarı düzlemin sınırı $(-\infty < x < +\infty, y < 0)$ boyunca sınıra dik yönde uygulanan P kuvveti sabit V hızıyla sağa doğru hareket etkmektedir. Başlangıç anında P kuvvetinin uygulandığı nokta ξ noktasıdır (Şekil 1). Yarı düzlemin yoğunluğu ρ, kayma modülü G ve Poisson katsayısı ν dür. Sınır koşulları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y = 0 \text{ iken } \sigma_y = -P\delta(x - \xi - Vt), \;\; \tau_{xy} = 0 \tag{1}$$

$x^2 + y^2 \to \infty$ iken yarı düzlemde gerilmeler yok olmaktadır. Burada σ_y ve τ_{xy}, sırasıyla, normal ve teğetsel gerilmeler olup (x, y) koordinatlarının ve t zaman değişeninin birer fonksiyonlarıdır, $\delta(x)$ delta fonksiyonudur.

Yer değiştirme vektörünün bileşenlerinin bulunması istenmektedir. Bu bileşenler belirlendikten sonra, Rayleigh dalga hızı V_R olmak üzere $V < V_R$ ve $V > V_R$ durumlarında yerdeğiştirme bileşenlerinin davranışları belirlenecektir



Şekil 1. Yarı düzlem için hareketli noktasal yük probleminin geometrisi

Düzlem deformasyon durumu koşullarında izotrop cismin hareket denklemleri

$$(1-2\nu)\Delta u+\frac{\partial\theta}{\partial x}=b\ddot{u}$$
$$(1-2\nu)\Delta v+\frac{\partial\theta}{\partial y}=b\ddot{v} \tag{2}$$
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad,\ \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

şekline sahiptir.

Burada $b=\frac{\rho}{G}(1-2\nu)$; u, v yerdeğişme vektörünün sırasıyla x, y yönünde bileşenleri olup inceleyeceğimiz durumda u ve v fonksiyonları (x, y) koordinat bileşenleri ve t zaman değişimlerinin birer fonksiyonlarıdır, yani $u=u(x,y,t)$, $v=v(x,y,t)$ dir.

Gerilme-Yer değiştirme bağıntıları aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_x=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$
$$\sigma_x=\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{3}$$
$$\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ bilinmeyen fonksiyonları

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4}$$

şeklinde bulunacaktır. Burada $\varphi(x,y,t)$ fonksiyonu boyuna dalgaları, $\psi(x,y,t)$ fonksiyonu ise enine dalgaları temsil eden potansiyel fonksiyonlarıdır. $\varphi(x,y,t)$ ve $\psi(x,y,t)$ fonksiyonlarının tanımlarından görüldüğü gibi

$$\Delta\varphi=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\theta\qquad\Delta\psi=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

sağlanmaktadır.

Denklem (2) ve Denklem (4)'ten görüldüğü gibi $\varphi(x,y,t)$ ve $\psi(x,y,t)$ potansiyel fonksiyonları

$$c_1^2\Delta\varphi=\ddot{\varphi},,$$
$$c_2^2\Delta\psi=\ddot{\psi} \tag{5}$$

hiperbolik denklemlerini sağlamaktadır. Burada;

$$c_1^2=\frac{2G}{1-\nu}[\rho(1-2\nu)]^{-1},\qquad c_2^2=\frac{G}{\rho} \tag{6}$$

kullanıldı. c_1 ve c_2 sabitleri sırasıyla boyuna ve enine dalgaların yayılma hızlarıdır.

$y'=y$, $x'=x-Vt$ kabul ederek, hareket eden $Ox'y'$ koordinat sistemine geçelim.

$$\sigma_x(x',y')=G\left[(1-\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial y'}\right]$$
$$\sigma_y(x',y')=-G\left[(1+\gamma^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial y'}\right] \tag{7}$$
$$\tau_{xy}(x',y')=G\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'}\right]$$

Burada ; $\beta^2=1-\frac{V^2}{c_1^2}$, $\gamma^2=1-\frac{V^2}{c_2^2}$ kabul edildi. $Ox'y'$ koordinat sisteminde Denklem (5) aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}=0$$
$$\gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}=0 \tag{8}$$

Denklem (3) ve Denklem (4), Denklem (1) de yerine yazılır ve

$$\frac{1-\gamma^2}{1-\beta^2}=\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}\qquad\frac{1+\gamma^2-2\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{-2\nu}{1-2\nu} \tag{9}$$

eşitlikler kullanılırsa sonuçta $Ox'y'$ koordinat sisteminde sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilirdir.

$y = y' = 0$ için

$$(1+\gamma^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial y'} = \frac{P}{G}\delta(x'-\xi)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'} = 0 \tag{10}$$

Denklem (8) ve Denklem (10) sınır değer problemini çözmek için Fourier integral dönüşümünü kullanalım.

$$\varphi(x',y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\alpha,y')e^{-i\alpha x'}d\alpha$$
$$\psi(x',y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\alpha,y')e^{-i\alpha x'}d\alpha \tag{11}$$

(11) denklemini (8) ve (10) denklemlerinde yerine yazarsak Φ ve Ψ Fourier dönüşümleri cinsinden

$$-\alpha^2\beta^2\,\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} = 0$$
$$-\alpha^2\gamma^2\Psi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2} = 0 \tag{12}$$

diferansiyel denklemleri ve $y = y' = 0$ için

$$-\alpha^2(1+\gamma^2)\,\Phi - 2i\alpha\frac{\partial^2\Psi}{\partial y'} = \frac{P}{G}e^{i\alpha\xi}$$
$$-\alpha^2(1+\gamma^2)\Psi + 2i\alpha\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial y'} = 0 \tag{13}$$

sınır koşulları türetilebilirdir.

(12) denklemlerinin genel çözümleri

$$\Phi(\alpha,y') = k_1(\alpha)e^{\beta|\alpha|y'} + k_2(\alpha)e^{-\beta|\alpha|y'}$$
$$\Psi(\alpha,y') = m_1(\alpha)e^{\gamma|\alpha|y'} + m_2(\alpha)e^{-\gamma|\alpha|y'}$$

olmaktadır. Fakat $y' \to -\infty$ iken $\Phi(\alpha,y')$ ve $\Psi(\alpha,y')$ sıfıra gitmesi gerektiği için $k_2(\alpha) = 0$ ve $m_2(\alpha) = 0$ olmalıdır. O halde (12) denklemlerinin genel çözümleri

$$\Phi(\alpha,y') = k_1(\alpha)e^{\beta|\alpha|y'}$$
$$\Psi(\alpha,y') = m_1(\alpha)e^{\gamma|\alpha|y'} \tag{14}$$

olacaktır.

$y = y' = 0$ iken (13) denklem koşulları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$-\alpha^2(1+\gamma^2)k_1(\alpha) - 2i\alpha\gamma|\alpha|m_1(\alpha) = \frac{P}{G}e^{i\alpha\xi}$$
$$-\alpha^2(1+\gamma^2)m_1(\alpha) + 2i\alpha\beta|\alpha|k_1(\alpha) = 0 \tag{15}$$

(15) denklemleri $k_1(\alpha)$ ve $m_1(\alpha)$ cinsinden doğrusal denklem sistemi oluşturmaktadır ve çözümü

$$k_1(\alpha) = \frac{P}{G}\frac{(1+\Upsilon^2)e^{i\alpha\xi}}{4\alpha^2\beta\gamma(1-B)}$$
$$m_1(\alpha) = \frac{P}{G}\frac{2i\beta sign(\alpha)e^{i\alpha\xi}}{4\alpha^2\beta\gamma(1-B)} \tag{16}$$

olmaktadır. Burada

$$B = \left(1 - \frac{(1+\gamma^2)^2}{4\beta\gamma}\right) \tag{17}$$

kullanıldı. (16) denklemi (14) denklemlerinde yerine yazılırsa ,

$$\Phi(\alpha, y') = \frac{P}{G}\frac{(1+\gamma^2)}{4\alpha^2\beta\Upsilon(1-B)}e^{\alpha\beta y'}$$
$$\Psi(\alpha, y') = \frac{P}{G}\frac{2i\beta sign(\alpha)}{4\alpha^2\beta\gamma(1-B)}e^{\alpha\gamma y'} \tag{18}$$

elde edilir. (18) denklemi (11) denklemlerinde yerine yazılırsa φ ve ψ potansiyel fonksiyonları

$$\varphi(x', y') = \frac{1}{2\pi}\frac{2P(1+\Upsilon^2)}{4G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha(x'-\xi)e^{\beta\alpha y'}\,d\alpha$$
$$\psi(x', y') = \frac{1}{2\pi}\frac{i\beta P}{G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2}\sin\alpha(x'-\xi)\,e^{\alpha\gamma y'}d\alpha \tag{19}$$

olarak bulunur. φ ve ψ fonksiyonlarının $x', ve\ y'$ bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -\frac{1}{2\pi}\frac{2P(1+\gamma^2)}{4G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\beta\alpha y'}d\alpha$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{1}{2\pi}\frac{2P\beta(1+\gamma^2)}{4G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\beta\alpha y'}d\alpha$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{1}{2\pi}\frac{i\beta P}{G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\alpha\gamma y'}d\alpha$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{1}{2\pi}\frac{i\beta P\gamma}{G\beta\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\alpha\gamma y'}d\alpha$$

$Ox'y'$ koordinat sisteminde $u(x', y')$ ve $v(x', y')$ yer değiştirme fonksiyonlarının ifadeleri (4) yardımıyla

$$u(x', y') = -\frac{1}{4\pi}\frac{P}{G(1-B)}\frac{1+\Upsilon^2-2\beta\Upsilon}{\beta\Upsilon}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\beta\alpha y'}d\alpha$$
$$v(x', y') = -\frac{1}{4\pi}\frac{P(1-\gamma^2)}{G\gamma(1-B)}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha(x'-\xi)}{\alpha}e^{\beta\alpha y'}d\alpha \tag{20}$$

şekline dönüşecektir.

Bilindiği üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\xi x}{\xi}d\xi = -\ln|x|, \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin\xi x}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}sign(x)$$

O halde $y = y' = 0$ iken

$$v(x', 0) = \frac{-1}{4\pi}\frac{P(1-\gamma^2)}{G\Upsilon(1-B)}[-\ln|x'-\xi|]$$
$$u(x', 0) = \frac{P(1+\gamma^2-2\beta\gamma)}{2G\beta\gamma(1-B)}sign(x'-\xi) \tag{21}$$

ifadeleri elde edilir.

Bilindiği üzere Rayleigh denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$4\sqrt{1-\frac{{V_R}^2}{c_1^2}}\sqrt{1-\frac{{V_R}^2}{c_2^2}} - \left(2-\frac{{V_R}^2}{c_2^2}\right)^2 = 0$$

β ve γ 'nın yukarıdaki tanımlarını kullanırsak, Rayleigh denkleminden

$$B = \frac{(1+\gamma^2)^2}{4\beta\gamma} = 1$$

olduğu görülecektir.

$x' = x - Vt \;\; y' = y$ bağıntıları dikkate alınarak $u(x,0,t)$ ve $v(x,0,t)$ yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$v(x,0,t) = \frac{-1}{4\pi}\frac{P(1-\gamma^2)}{G\Upsilon(1-B)}[-\ln|(x-\xi-Vt)|]$$
$$u(x,0,t) = \frac{P(1+\gamma^2-2\beta\gamma)}{2G\beta\gamma(1-B)}sign(x-\xi-Vt) \quad (22)$$

III. SONUÇLAR

Bu çalışmada, homojen izotrop yarı düzlemin sınırı boyunca sınıra P dik kuvvetin sabit hızla hareketine bağlı olarak yatay ve dikey yer değiştirme bileşenleri, normal ve teğetsel gerilmeler belirlenmiştir. P kuvvetinin hareket hızının Rayleigh hızından (V_R) küçük olduğu durumda $v(x,0)$ yer değiştirme bileşenin hareket yönünün P kuvvetinin hareket yönüyle aynı olduğu görülmüştür. $V_R < V$ durumunda $v(x,0)$ yer değiştirme bileşeninin hareket yönü P kuvvetinin hareket yönünün zıttı istikameti olmuştur. $V_R = V$ durumunda (21)' den görüldüğü gibi $v(x,0)$'ın ifadesinde payda sıfır olmaktadır. Noktasal yükün hareket hızının $V = V_R$ değeri civarındaki davranışları, yani Rayleigh hızına yakın hızlardaki davranışları, "sub-Rayleigh" $(V_R > V)$, "süper-Rayleigh". $(V_R < V)$ ve limit rezonans $(V_R = V)$ başlıkları altında ileriki çalışmanın konusu olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Poruchikov, V.B. (1993). Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. *Springer-Verlag* Berlin Heidelberg .

[2] Gakenheimer, D.C. (1971). Response of elastic half-space to expanding surface loads. *J. Applied Mechanics* (38), 99-110.

[3] Achenbach, J. D. (1973). Wave Propagation in Elastic Solids. *North-HollandElsevier*, Amsterdam.

[4] Payton, R. G. (1983). Elastic Wave Propogation in Transversely Isotropic Media, *Matrtinus Nijhoff Publishers*, The Hague.

[5] Aleksandrov VM, Kovalenko YeV. (1986). Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary Conditions. Moscow, Nauka.

[6] Gupta S and Ahmed M. (2017). On Rayleigh Waves in Self-reinforced Layer Embedded over an Incompressible Half-space with Varying Rigidity and Density. *Procedia Eng* (173), 1021–1028.

[7] Pal PC, Kumar S and Bose S. (2015). Propagation of Rayleigh waves in anisotropic layer overlying a semi-infinite sandy medium. *Ain Shams Eng J* , (6), 621–627.

[8] Mohseni H and Ng C-T. (2018). Rayleigh Wave propagation and scattering characteristics at debondings in fibre-reinforced polymer-retrofitted concrete structures. *Struct Health Monit*, (18), 303–317.

[9] Ebrahiminejad A, Mardanshahi A and Kazemirad S. (2022). Nondestructive evaluation of coated structures using lamb wave propagation. *Appl Acoust* (185), 108378.

[10] Abo-Dahab SM, Kilany AA, Allam MNM, Mohamed RA, Rida SZ. (2022). Influence of several fields on Rayleigh waves propagation in a fiber-reinforced orthotropic half-space material under four thermoelastic models. *Waves in Random and Complex Media*, 32(5), 2197–2220.

[11] Xu L, Ma M. (2022). Dynamic response of the multilayered half-space medium due to the spatially periodic harmonic moving load. *Soil Dyn Earthquake Engn* .157, 107246.