

# Ortaokul Öğrencilerinin Aritmetikten Cebire Geçiş Süreçlerinin İncelenmesi: Sembollerin Kullanımı ve Harflerin Anlamı

Yaşar Akkan\*, Adnan Baki\*\*

Makale Geliş Tarihi: 26/07/2016

Makale Kabul Tarihi: 17/10/2016

## Özet

*Bu çalışmanın amacı 5-8.sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerini sembollerin kullanımı ve harflerin anlamını yorumlama bağlamında araştırmak ve araştırmanın sonuçlarına göre önerilerde bulunmaktır. Gelişimci araştırmaların bir türü olan enlemesine çalışmanın kullanıldığı bu çalışmada, farklı öğrenim seviyelerindeki 285 ortaokul öğrencisine yazılı sınavlar uygulanmış, 24 öğrenciyle ise klinik mülakatlar yürütülmüştür. Veri toplamak amacıyla aritmetikten cebire geçişin inceleneceği bu iki konuyu içeren 2 soru ile ek sorular hazırlanmıştır. Bu çalışmanın veri analizinde bu iki konuya ilişkin hazırlanan karakterizasyon tablolarından yararlanılmıştır. Ayrıca yazıya dökülen klinik mülakat verileriyle farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki değişim ve gelişimleri incelenmiştir. Sonuç olarak farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin öğrenim seviyeleri arttıkça iki konu açısından aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde değiştiği ve geliştiği görülmüş, fakat öğrenim seviyeleri arasındaki bu değişim ve gelişim çok az olmuştur.*

**Anahtar Kelimeler:** Aritmetikten cebire geçiş, harflerin anlamı, ortaokul öğrencileri, sembol kullanımı

## Investigation of the Secondary School Students' Transition Processes from Arithmetic to Algebra: Usage of Symbols and Meaning of the Letters

### Abstract

*The purpose of this research is to search the change and developments on the secondary school students during transition processes from arithmetic to algebra such as the usage of symbols and interpretation of the meaning of the letters. By depending on that goal the cross-sectional method has been preferred in that study as one type of developmental researches. In this regard, written exams have been applied for 285 students at different learning levels and clinical interviews have been carried out with 24 students. With the aim of gathering data questions including these two issues with which this transition will be searched have been prepared. During the data analysis of the study, it has been benefited from characterization tables which were prepared concerning these two issues. Besides, it has been searched the written data of clinical interviews, the changes and developments during this transition of students from different learning levels. As a result, as the learning levels of the students are increased, it has been observed that there has been a positive change and development on the transition from arithmetic to algebra in terms of two issues. But this change and development were too low between the learning levels.*

**Keywords:** Meaning of the letters, secondary school students, transition from arithmetic to algebra, usage of symbols

---

\* Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Gümüşhane, Türkiye, [akkanyasar61@hotmail.com](mailto:akkanyasar61@hotmail.com)

\*\* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, OFMA Bölümü, Trabzon, Türkiye, [abaki@ktu.edu.tr](mailto:abaki@ktu.edu.tr)

## 1. Giriş

Matematiksel kavramlar birbirleriyle bağlantılı olduğundan, bu bağlantılarda olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara yol açabileceği bilinmektedir (Swadener & Soedjadi, 1988). Bu bağlamda aritmetik ve cebir alanları arasında önemli bir zincir halkası vardır. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) standartlarında aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye yönelik bu husus: “İlköğretim ikinci kademe (ortaokul) matematik öğretim programı, somut ilköğretim birinci kademe matematik öğretim programı ile soyut lise matematik öğretim programı arasındaki bir köprüdür. Burada en önemli geçişlerden biri aritmetik ile cebir arasındaki geçiştir. Bu nedenle 5-8 sınıflarda öğrenciler, daha sonra çalışacakları soyut cebir için bir temel oluşturabilecek cebirsel kavramları informal bir yolla alırlar... (s.102)” şeklinde ifade edilmektedir. Literatürde öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarına dair birçok araştırmaya rastlamak mümkündür (Booth, 1988; Hersovics & Linchevski, 1994; Kieran & Chalouh, 1993; Linchevski, 1995; Linchevski & Livneh, 1999; Sfard & Linchevski, 1994). Wagner’e (1983) göre, öğrencilerin cebirsel işlemleri ve yapıları anlamakta zorlanmalarının nedeni, aritmetiğin temel kavramı olan sayı kavramını iyi bir şekilde kavrayamamalarından kaynaklanmaktadır. Van Amerom (2002) aritmetiğin temelini sayı kavramının oluşturduğunu ve cebirin ise kökünü aritmetikten aldığını ifade etmiştir. Carpenter ve Levi (2000) erken yaşlarda öğrencilerin aritmetiğin önde gelen yapı ve özellikleriyle ilgili genellemeleri doğrulamayı ve yapmayı öğrenmelerinin cebirle ilgili birçok temel oluşmasına katkı sağlayacağına vurgu yapmışlardır. Her ne kadar bu iki alan arasında sıkı bir ilişki olsa da, aritmetik ve cebirin doğalarından kaynaklanan farklılıklar da vardır (Akkan, Baki & Çakıroğlu, 2011). Araştırmacılar öğrencilerin bu iki bilgi türü arasındaki farklılıkları- örneğin; söz-dizimsel (Lodholz, 1993), stenografi (alfabenin harfleri, noktalama işaretleri, kelimeleri yerine semboller ve kısaltmalar kullanma) olarak harfleri kullanımı (Booth, 1988), manipülasyonlar (Booth, 1984), bilinmeyenler (Fillooy & Rajono, 1989) ve eşitlik (eşittir işareti) (Wagner & Parker, 1993) vb. farklılıklar- birleştirmede başarısız olduğunu belirtmişler ve bununda öğretimde bilişsel boşluğa veya öğretisel araya neden olduğunu iddia etmişlerdir (Booth, 1988; English & Halford, 1995; Hersovics, 1989; Hersovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992; Sfard, 1991; Wagner & Kieran, 1989). Bu bilişsel boşluk veya öğretisel ara aritmetikten cebire geçişte ve cebirsel kavramların gelişiminde öğrencilere engeller ve zorluklar yaratmaktadır (Fillooy & Rojano, 1989; Sfard, 1994; Williams & Cooper, 2001). English ve Halford (1995) ve Wagner ve Kieran (1989) cebirdeki harflerin aritmetiktekinden farklı olduğunu iddia etmiş ve bu temel farkında eğitimde bir araya neden olduğunu belirtmişlerdir. Benzer şekilde Booth (1988), Cooper, Boulton-Lewis, Athew, Wills ve Mutch (1997) ve Linchevski ve Hersovics (1996) değişkenler ile ilgili anlam geliştirme sürecindeki farklılıkların öğretisel bir araya neden olduğunu iddia etmişlerdir. Behr, Ertlwanger ve

Nichols (1980), Hersovics ve Linchevski (1994) ve Linchevski (1995) ise eşittir işareti için anlam geliştirme aşamasında bilişsel bir boşluğun oluştuğuna vurgu yapmışlardır. O halde araştırmacıların aritmetikten cebire geçiş ile ilgili olarak sembollerin kullanımı (eşittir işareti) ve harflerin anlamı konuları üzerinde durduğu söylenebilir.

Sembol, zihinsel olarak bir fikirle eşleştirilen somut bir şey veya nesnedir (Skemp, 1987). Gerçek dünyada somut olarak var olmayan şeylerin yerine sembolleri kullanma, onlar üzerinde çalışma fırsatı vermektedir. Matematikte “a, b, x, t...” gibi harfli semboller ve “+, =, <,...” gibi işlemleri belirten semboller kullanılmaktadır (Dede, 2003). Semboller matematikte hesaplama ve problem çözmede niceliklerle meşgul olmak açısından son derece kolay bir yöntem sunmakta, matematik problemleri üzerinde düşünme fırsatı vermektedir (Tall ve ark., 2001). Bu soyut ve simgesel yapılanma genelde matematik daha özeldi ise aritmetikten cebire geçiş ve cebirsel düşünmeye büyük bir güç katmaktadır (Van Amerom, 2002; Yıldırım, 2000). Bu yüzden sembollerin kullanımı aritmetikten cebire geçiş ve cebirsel düşünme için temel becerilerden biridir (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1993; Van Amerom, 2002). Ayrıca öğrencilerin sembolleri yerinde kullanmayı öğrenmesi genellemeleri yapma, cebirsel yapıları açığa çıkartma, ilişkileri oluşturma ve matematiksel durumları formüle etme açısından çok önemlidir (Driscoll, 1999). Öğrenciler aritmetikte işlem sembollerini toplama, çıkarma gibi bir hareketi yerine getiren komutlar olarak düşünürler. İşlem sadece bir sonuç yoludur, yani sayısal bir sonuç bulma amaçtır. Oysa cebirsel bir bakış açısından işlem bireyden bağımsız bir nesnedir ve sonuç ifadenin kendisidir (Kieran, 1990). Yani aritmetikte “+”sembolü ekleme işlemini yerine getirir anlamındayken, “=” sembolü ise cevap yaz anlamındadır. Öğrenciler toplama sembolünü eylemin yanı sıra “toplamın sonucu” olarak veya eşittir işaretini “cevabı yaz” sinyalinden ziyade eşit (denk) bir ilişkiyi gösterdiği fikrinde kolayca farkında olmazlar (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Cooper, Williams & Baturo, 1999; Kieran, 1992; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Sembollerin kullanımını ile ilgili literatür aritmetikten cebire geçiş açısından incelendiğinde özellikle eşittir işareti sembolü ile ilgili yapılan çalışmalar ön plana çıkmaktadır. Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens (2005) ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin eşitlik kavramı ile ilgili anlamaları üzerine odaklanmışlar ve öğrencilerin eşittir işareti kavramı ile ilgili anlamalarını değerlendirmede yazılı testlerden yararlanmışlardır. Onlar öğrenci cevaplarını belli kategorilere ayırarak (örneğin eşittir işareti için işlemsel ve ilişkişel gibi...) sınıflar arası karşılaştırmalar yapmışlar ve üç farklı öğrenim seviyesindeki birçok öğrencinin eşittir işaretini “işlemsel” (cevap veya sonuç yaz) olarak algıladıklarına vurgu yapmışlardır. Alexandrou-Leonidou ve Philippou (2007) çalışmalarında ilköğretim öğrencilerinin eşittir işareti ile farklı anlamaları üzerine yoğunlaşmışlar ve öğrencilerin büyük çoğunluğunun eşittir işaretinin aritmetikteki tek-boyutlu (sadece işlemsel) kullanımından kaynaklanan zorluklara sahip olduklarını belirtmişlerdir. Onlar eşittir

işaretinin ilişkisel anlamına uzak olan bu kullanımın öğrencilerin daha ileri cebirsel kavramlardaki (denklemler çözme gibi) yeterliliğini olumsuz yönde etkilediğini ifade etmişlerdir.

Harfler hem aritmetikte hem de cebirde farklı anlamlara ve kullanımlara sahiptir. Kieran'a (1989;1990) göre öğrencilerin aritmetikte karşılaştığı harfler, cebirde karşılaştıkları harflerin rollerinden çok farklıdır. Aritmetikteki harf, genellikle kelimeyi kısaltmak için keyfi bir etikettir. Yani aritmetikte harf doğrudan doğruya ölçü birimi veya nesne ile ilgilidir. Bununla birlikte cebirdeki harfler ikinci bir anlama sahiptir; metrelerin veya noktaların sayısı. Van Amerom'a (2002) göre ise aritmetikte harfler belirli bir şeyin yer tutucuları veya vekilleri iken, cebirde harfler değişkenler veya herhangi bir sayıyı temsil eden bilinmeyenlerdir. Eğer cebir öğrenenler, değişkenler veya bilinmeyenler yerine etiketler olarak harfleri almaya veya yorumlamaya devam ederse hata yaparlar (Kieran, 1990). Nitekim Booth (1988) harflerin anlamındaki bu değişimden kaynaklanan karışıklığın, öğrencileri cebirdeki harflerin anlamlarıyla ilgili yorumlamalarında bir "sayısal gönderge eksikliği (lack of numerical referent)" sorunu ile karşı karşıya bıraktığını ifade etmiştir. NCTM'in de vurgu yaptığı bu eksikliği Usiskin (1988) şöyle açıklamıştır: "6e ifadesini öğrenciler, elmaların sayısının(bilinmeyen) 6 katı olarak düşünmekten ziyade 6 elma olarak düşünmektedir. Burada harf, nesnelere sayısından ziyade kastedilen nesne veya kavramdır." Bunun yanında birçok araştırmacı harflerin bu farklı kullanım ve anlamlarından dolayı, ilköğretim öğrencilerinin bu ve buna benzer hatalara sahip olduğunu belirtmişlerdir (Chalouh & Herscovics, 1988; Cooper, Williams & Baturo, 1999; Herscovics, 1989; MacGregor & Stacey, 1997a, Philipp, 1999). Ayrıca bazı araştırmacılar farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin harfleri yorumlamaları ile ilgili çalışmalar yürütmüşler (Knuth ve ark., 2005; Kuchemann, 1981; Stacey & MacGregor, 1997; Usiskin, 1988), bazıları ise harflerin anlamını aritmetikten cebire geçiş süreci açısından tanımlamaya çalışmışlardır (Chalouh & Herscovics, 1988; Kieran, 1990; Sfard & Linchevski, 1994). Kuchemann (1981) öğrencilerin harfli sembollerini yorumlamaları ile ilgili altı seviye tanımlamıştır: Harfe tek bir sayısal değer atanır; harf önemsenmez veya yorumlanmaz; harfi somut bir nesnenin kısaltılmışı ya da kendisi olarak düşünür; harf belirli bir bilinmeyen olarak düşünülür ve harfe değer vermeksizin, üzerinde çeşitli işlemler yürütebilir; harf genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlandığından harf birden fazla sayıyı temsil ediyor olarak düşünülür veya en azından benimsenir; harf, bir değişken olarak yorumlanabilir yani harf belli olmayan değerler kümesini temsil ediyor olarak düşünülebilir. Kuchemann (1981) 13 ile 15 yaş arasındaki öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun harfleri somut nesnelere veya somut nesnelere isimleri olarak gördüklerini ve harfleri bilinmeyen ve genelleştirilmiş sayı olarak kullanmada zorlandıklarını ortaya koymuştur. Kieran (1992) benzer sonuçları ifade etmekle birlikte, öğrencilerin harfli sembollerini somut nesnelere isimleri olarak algılamalarının üst sınıf seviyelerindeki öğrencilerde de görüldüğünü ifade etmiştir. Philipp (1999) harf sembollerinin matematiksel içeriklerde

çok farklı şekillerde ve görevlerde kullanıldığını belirtmiş ve bu farklı kullanımları; etiket (label), sabitler, bilinmeyenler, genelleştirilen sayılar, çeşitli nicelikler (değişkenler), soyut semboller, olarak tanımlamıştır. Philipp'in özetlediği bu ifadelerden harflerin etiket olarak kullanımı daha çok aritmetik ve cebir öncesi bir kullanım şeklidir. Van Amerom (2002) ise ilköğretim sınıflarında harflerin daha çok ölçüm etiketleri ve nesnelerin kısaltmaları, genelleştirilen sayılar, bilinmeyenler ve değişkenler olarak kullanıldığını ifade etmiş ve harflerin ölçüm etiketleri veya nesnelerin kısaltmaları olarak kullanımının aritmetiğe ait bir özellik olduğu ifade etmiştir. Macgregor ve Stacey (1997) daha önce harflerle ilgili herhangi bir anlamaya sahip olmayan 11 ile 12 yaşlarındaki öğrencilerin harflerle ilgili anlamalarına ve yanlış anlamalarına odaklanmışlar ve öğrencilerin genel olarak sahip olduğu altı farklı anlamaya vurgu yapmıştır; bilinmeyen miktarlar, kelimelerin kısaltılması, alfabetik değer, sayısal değer, farklı harflerin kullanımı, harflerin varlığını önemsememe. Araştırmacılar öğrencilerin özellikle her bilinmeyen için farklı harf kullandıklarını ve harfe alfabetik değerini verdiklerini belirtmiştir.

### **1.1. Araştırmanın Problemi**

Matematiğin ve günlük hayatın her aşamasında önemli bir yere sahip olan cebirin öğrenciler tarafından arzu edilen seviyede öğrenilmesi için aritmetik ile cebirsel bilgi arasındaki bağlantıyı sağlayan aritmetikten cebire geçiş önemlidir. Bu geçişin en iyi şekilde yürütülebilmesi için son derece dikkatli hazırlanmış öğretim programlarına ihtiyaç vardır. Çünkü geliştirilen öğretim programı ne kadar iyi olursa olsun, programın uygulanması aşamasında ortaya çıkacak sorunların belirlenmesi önemlidir. Bu da mevcut matematik öğretim programında farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçişlerinin farklı öğrenim seviyelerindeki ortak konular olan sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı, ile ilgili boyutlar açısından irdelenmesini önemli kılmaktadır. Bu nedenle çalışmanın amacı, “ortaokul (5-8.sınıf) öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerini sembollerin kullanımını ve harflerin anlamını yorumlama konularına bağlı olarak incelemektir.”

## **2. Yöntem**

Bu çalışmada farklı öğrenim seviyesindeki ortaokul öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş süreçlerini incelemek amacıyla gelişimci araştırmaların bir çeşidi olan “enlemesine” yöntem kullanılmıştır. Enlemesine yürütülen çalışmalarda, aynı konunun bir örnekleme uzun süre çalışılarak gelişim düzeyinin ortaya çıkarılması yerine, örneklemin takip edeceği yaşam sürecinde ona eşdeğer olabilecek örneklem üzerinde aynı zamanda çalışmalarda yürütülebilir. Bu yolla, bir çalışmayı tamamlamak için aynı örnekleme takip etmek yerine, farklı yıllardaki örneklemle çalışılarak araştırma en kısa sürede tamamlanabilir (Çepni, 2007). Bu çalışmada veri toplamak için hem nicel hem de nitel yöntemleri bir arada barındıran karma yöntemler

kullanılmıştır. Karma yöntemler, her iki yöntemin de sakıncalı yönlerini en aza indirirken, en uygun yöntemle, en uygun verilerin toplanmasına olanak verirler. Açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar nicel verileri toplamada kullanılırken, bu sorulara ek sorular eklenerek hazırlanan klinik mülakat soruları da araştırmanın nitel verilerini toplamada kullanılmıştır. Ancak bu çalışmada, nitel veriler üzerine daha çok vurgu yapılmıştır. Çünkü çalışmanın önemli bir probleminin ortaokul öğrencilerinin düşünceleriyle ilgili olmasıdır. Bu geçiş sürecinde ortaokul öğrencilerinin düşüncelerindeki zenginliklere ulaşmak nitel bir araştırma yöntemi olan klinik mülakat ile mümkün olacaktır. Zazkis ve Hazzan (1999) klinik mülakatı öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeler olarak tanımlamıştır. Bu mülakat çeşidinin esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Hunting 1997; Goldin 1998; Zazkis & Hazzan, 1999). Ortaokul öğrencilerin süreç boyunca ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışma için klinik mülakat metodunun yukarıda açıklanan niteliği ile en uygun metod olduğuna karar verilmiştir.

## 2.1. Örneklem

Bu çalışmanın örneklemini Trabzon ilindeki bir ortaokulda öğrenim gören 5- 8. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır (Bkz. Tablo 1). Açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar uygulamanın yapıldığı okulun 5-8. sınıflarında öğrenim gören 24 öğrenci hariç tüm öğrencilerine uygulanmıştır. Klinik mülakatlar için seçilen bu 24 öğrenci Matematik, Türkçe, Rehber öğretmenlerinin ve okul yöneticilerinin tavsiyeleri doğrultusunda, benzer ve farklı sınıflandırmaları temsil edecek şekilde ve başarı durumları dikkate alınarak seçilmiştir. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, öğretmenden öğrencilerin bir önceki yıl matematik dersinden aldığı notlar ile merkezi sınavlarda almış oldukları notlar istenmiş ve bu öğrenci notları ile puanlarına göre örneklem üç gruba ayrılmıştır. Ayrıca düşüncelerini rahatlıkla ifade edebilen ve çalışmaya gönüllü öğrenciler tercih edilmiştir.

Tablo 1.

### *Çalışmanın Örneklemi*

Açık-Uçlu Sınavlar		Klinik Mülakatlar				
Sınıf	Öğrenci Sayıları	Sınıf	Öğrenci Durumları ve Sayıları			Toplam
			Zayıf	Orta	İyi	
5.sınıf	70	5.sınıf	2 (Ö1 <sub>5</sub> , Ö2 <sub>5</sub> )	2 (Ö3 <sub>5</sub> , Ö4 <sub>5</sub> )	2 (Ö5 <sub>5</sub> , Ö6 <sub>5</sub> )	6
6.sınıf	72	6.sınıf	2 (Ö7 <sub>6</sub> , Ö8 <sub>6</sub> )	2 (Ö9 <sub>6</sub> , Ö10 <sub>6</sub> )	2 (Ö11 <sub>6</sub> , Ö12 <sub>6</sub> )	6
7.sınıf	70	7.sınıf	2 (Ö13 <sub>7</sub> , Ö14 <sub>7</sub> )	2 (Ö15 <sub>7</sub> , Ö16 <sub>7</sub> )	2 (Ö17 <sub>7</sub> , Ö18 <sub>7</sub> )	6
8.sınıf	73	8.sınıf	2 (Ö19 <sub>8</sub> , Ö20 <sub>8</sub> )	2 (Ö21 <sub>8</sub> , Ö22 <sub>8</sub> )	2 (Ö23 <sub>8</sub> , Ö24 <sub>8</sub> )	6
Toplam	285		8	8	8	24

## 2.2. İşlem

Çalışmanın ilk aşamasında araştırmanın amacı doğrultusunda matematik öğretmenleriyle görüşülerek ve öğretim programındaki kazanımlar gözden geçirilerek çalışmanın yürütüleceği sınıf ve konular (sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı) belirlenmiştir. Literatürdeki çalışmalardan yararlanılarak aritmetikten cebire geçiş sürecini irdelemek için aritmetik, cebir öncesi ve cebirin özelliklerini içeren karakterizasyon tabloları hazırlanmış ve çalışmanın çatısını oluşturulmuştur. Daha sonra açık uçlu sınavlar ve klinik mülakat soruları oluşturulmuştur. Hazırlanacak bu sorular, bir veya birden fazla düşünme becerilerini kullanmaya teşvik etmeli, birçok stratejiyi ve çoklu yaklaşımlar kullanmaya ve ortaya çıkacak düşünme süreçleri ile ilgili tartışma ve diyaloga maksimum düzeyde izin vermelidir. Bununla birlikte hazırlanan soruların ölçme amacına uygun olup olmadığı, ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği sorunu ile ilgili olup, “uzman görüşüne” göre saptanır. Bu amaç doğrultusunda iki matematik eğitimcisinin ve iki matematik öğretmenin görüşlerine başvurulmuştur. Bu açıdan hazırlanan açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınav sorularının ve klinik mülakat sorularının dil, seviye ve kapsam geçerliliği sağlanmıştır. Çalışmanın ikinci aşamasında oluşturulan bu açık uçlu yazılı sınavların ve klinik mülakat sorularının gerçek sınıf ortamlarında uygulanması, araştırmacının deneyim kazanması, soruların düzenlenmesi ve veri toplama araçlarının geçerlilik ve güvenilirliğinin belirlenmesi amacıyla pilot çalışma yapılmıştır. Asıl uygulamanın yapılacağı okula benzer özelliklere sahip bir okulun 5-8.sınıf öğrencileriyle pilot çalışma yürütülmüştür. Okulda 263 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar uygulanırken 12 öğrenciyle klinik mülakatlar yürütülmüştür. Sınav ve klinik mülakatlar esnasında alınan bu notlar, yapılan gözlemler ve öğretmenlerle yürütülen informel mülakatlar asıl çalışmada kullanılacak sorulara son şeklinin verilmesinde yararlı olmuştur. Pilot çalışma, aritmetikten cebire geçiş sürecinin inceleneceği konular ile ilgili temel özelliklerinin kontrol edilmesine ve yeniden düzenlenmesine de yardımcı olmuştur. Bu amaç doğrultusunda pilot çalışmaya katılan öğrenciler tarafından verilen cevaplar aritmetik, cebir öncesi ve cebirin özelliklerini içeren karakterizasyon tablolarına göre sınıflandırılmıştır. Yapılan bu işlemler verilerin analizi için gerekli olan bu karakterizasyon tablolarına son hali verilmesinde ve elde edilen verilerin analiz edip yorumlanmasında nasıl bir yol takip edileceği konusunda da belirleyici olmuştur. Ayrıca pilot çalışmada veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenilirlikleri yapılmıştır. Hazırlanan sınavın geçerlilik ve güvenilirliği konusunda bir problem olmaması için bu konu ile ilgili yapılan araştırmalarla ilgili literatür taramasından elde edilen soruların aynı veya benzerleri kullanılmıştır. Güvenirlik kavramı, araştırmanın farklı zamanlarda ya da farklı kişiler aracılığıyla yürütülmesi durumunda aynı ya da benzer sonuca ulaşılmasıyla ilgilidir. Bu, araştırma sırasında ya da araştırmanın sonucunda birden fazla araştırmacının araştırılan konuyu incelemesini içerir. Veri toplama araçlarının güvenilirliği için öğrenci kâğıtlarının rastgele yarısı alınmış ve araştırmacı ile başka bir araştırmacı kodlamalar yapmıştır.

Yapılan kodlamalar sonucunda iki araştırmacı arasında %79 uyum çıkmıştır. Aslı uygulamayı içeren çalışmanın üçüncü aşamasında yazılı sınavların ortaokul 5- 8. sınıflarında öğrenim gören toplam 285 öğrenciye uygulaması esnasında sınıflar arası bilgi alış verişini engellemek amacıyla sınavların aynı gün içerisinde uygulanmasına dikkat edilmiş ve Rehberlik derslerinde uygulamalar yürütölmüştür. Uygulama iki ders saatini kapsayacak şekilde toplam üç haftada tamamlanmıştır. Aynı okuldan seçilen 24 öğrenciyle klinik mülakatlar yürütölmüş ve her bir öğrenciyle yürütölen klinik mülakatlar yaklaşık olarak 60 dakika sürmüştür. Çalışmanın son aşamasında ise uygulama sonunda elde edilen verilerin analizi yapılmıştır.

### 2.3. Veri toplama araçları

Veri toplama araçları, literatür ve öğretmen desteğiyle hazırlanan, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin çözüm üretebileceği iki sorudan oluşmaktadır. Hazırlanan bu iki sorunun içeriği ve özellikleri Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2.

#### Soruların İçerikleri ve Özellikleri

	Soru İçeriği	Sorunun Özelliği
1.Soru	$4 + 5 = 9$ <p style="text-align: center;">↑</p> <p>Yukarıdaki ifade de ok ile gösterilen sembol hangi anlama geliyor. Açıklayınız. Sembolün başka bir anlamı olabilir mi? Varsa ne anlama geliyor. Açıklayınız?</p> <p>Ayrıca aşağıdaki işlemlerde boş bırakılan yerlere uygun sayıları yazınız.</p> $48 + 24 = \dots + 45 \quad \dots + 27 = 25 + 24$ $49 - 25 = 31 - \dots \quad 99 - \dots = 90 - 59$ $33 + 25 = 36 + \dots \quad \dots = 34 + 23$ $53 + \dots = 58 + 76 \quad \dots = 24 - 17$	<p>Matematiksel sembollerde önemli bir konuma sahip olan eşittir işaretinin tanımına, kullanımına ve farklı anlamlarıyla ilgili yorumlamaları ortaya çıkaran bir sorudur. Bu soru birkaç şıktan oluşmuştur. Bu şıklardaki sorular yine eşittir işareti ile ilgili öğrenci kullanımını, anlamalarını ve öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ile yapmış oldukları hataları ortaya çıkarmayı amaçlayan bir sorudur.</p>
2.Soru	$3. n + 1$ <p style="text-align: center;">↑</p> <p>Yukarıdaki ifade de ok ile gösterilen “n” sembolü neyi ifade ediyor? Açıklayınız.</p> <p><b>Ek sorular:</b></p> <p>1) <math>6e + 7e = ?</math> işleminin sonucu nedir?</p> <p>a) 13 elma b) <math>6e + 7e</math> c) 13e d) 13</p> <p>2) Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir. Buna göre nasıl bir ifade yazabiliriz.</p> <p>3) Ahmet Veli’den 8 cm daha uzundur. Veli <math>h</math> cm uzunluğundadır. Ahmet’in boyunun uzunluğu için ne yazabilirsiniz?</p>	<p>Bu soru 5- 8.sınıf öğrencilerin literal semboller olan harflerin anlamı ile ilgili farklı anlamalara ve yorumlamalar açık olmasına dikkat edilerek hazırlanan bir soru türüdür. Bu soru ayrıca harfler ile ilgili öğrenci kullanımını, anlamalarını ve öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ile yapmış oldukları hataları ortaya çıkarmayı amaçlayan bir sorudur. Ayrıca klinik mülakatlar yürütöülürken ek sorulardan da (örneğin, <math>37 = 16 + 3x</math> vb.) yararlanılmıştır.</p>



## 2.4. Verilerin Analizi

Elde edilen veriler; literatür destekli hazırlanan ve aritmetik, cebir öncesi ve cebirle ilgili özellikleri içeren karakterizasyon tablosuyla değerlendirilmiştir (Akkan, 2009; Akkan, Baki & Çakıroğlu, 2011; Akkan, Öztürk & Akkan, 2014). Bu iki boyut için yapılandırılan karakterizasyon tablosu Tablo 3 de verilmiştir.

Tablo 3.  
*İki Boyut ile İlgili Üç Alanı İçeren Karakterizasyon Tablosu*

Boyut	Göstergeler
Sembollerin Kullanımı	A Bu seviyede öğrenciler eşittir işaretini cevap için bir uyarıcı yani herhangi bir hesaplanmanın sayısal sonucunu ifade eden sembol olarak görürler. Öğrencilere göre eşittir işareti sonuç bildirir ve aynı zamanda bir dönüşüm yöntemidir(soldan sağa yönel bir işaret) yani sembolik ifadeler süreçleri temsil eder. Parantez işareti “ilk onu yap” olarak görürler ve parantezin içindeki işlem bitinceye kadar orada kalınır. “+”sembolü ekleme işlemini yerine getirir anlamında iken “=”sembolü ise cevap yaz anlamındadır.
	CÖ Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola işlemsel bir sembol olarak yorumlarlar yani eşittir işareti bir eylemle ilgili ifadedir. Öğrenciler bu seviyede eşitlik olarak(ilişkisel) eşittir işaretini yorumlayamamalarına rağmen eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yararlanarak eşitlik kavramını tanımlamaya çalışırlar.
	C Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretinin her iki yanında aynı miktarda nicelik olduğunu ve bu durumda eşittir işaretinin aynılığı, eşitliği veya dengeyi gösterdiğini ifade ederler. Yani öğrenciler iki miktarı kıyaslamaya yarayan ilişkisel bir sembol olarak eşittir işaretini yorumlarlar yani sembolik ifadeler süreçler ve ürünler olarak görülür. Cebirde parantez kullanımını aritmetikteki gibi özellikle işlem önceliğinde kullanılır. Parantez içindeki terimler ilk değerlendirilen terimlerdir. Fakat değişken kavramıyla birlikte daha dinamik bir yapıya değişir[(x+y).(x-y) gibi]. “+” sembolünü eylemin yanı sıra “toplamın sonucu” anlamında iken eşittir işareti “cevabı yaz” sinyalinin yanında “eşitlik” anlamındadır.
Harflerin Anlamı	A Harfleri ölçüm etiketleri olarak kullanma (metre için m ve nokta için p gibi...), harfleri somut bir objenin kısaltılmışı ya da kendisi olarak düşünme(elma için e), harfleri önemsememe ve yorumlamama, harfe tek bir sayısal değer atama
	CÖ Eş zamanlı olarak harfleri bir nesnenin kısaltılmışı ya da o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünme (elma için kullanılan e harfinin hem nesnenin kısaltması hem de çokluğu (miktarı) olduğunu eş zamanlı düşünme). Harflerin informal kullanımı (nesnelerin ilk iki veya daha fazla harfini kullanma)
	C Harfleri bilinmeyen olarak düşünme ve harfe sayısal bir değer vermeksizin üzerinde çeşitli işlemler yürütebilme. Harfleri genel sayılar olarak yorumlama ve harfin birden fazla sayıyı temsil ettiğini ifade etme. Harfleri değişken olarak yorumlama yani harfin belli olmayan değerler kümesini temsil ettiğini düşünme. Harfleri parametreler olarak düşünme

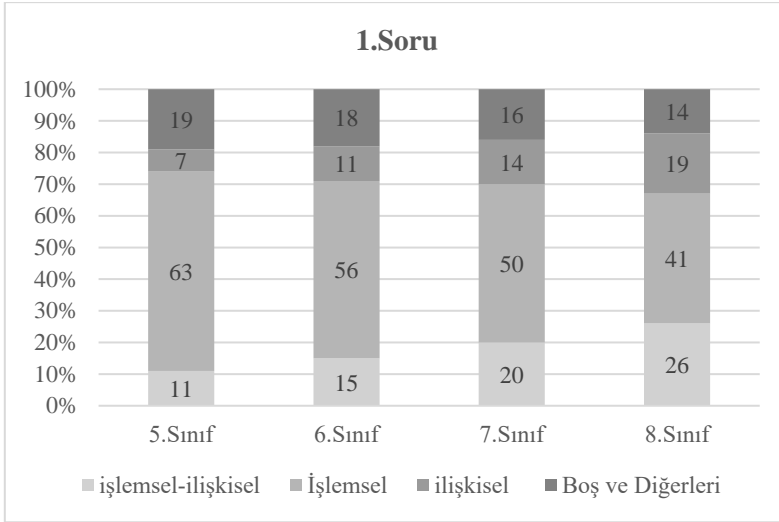
Ayrıca sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı ile ilgili yazılı sınav soruları olan birinci ve ikinci sorulara ilişkin çözümler karakterizasyon tablolarındaki açıklamalar ve literatürde yer alan çalışmalar dikkate alınarak sırasıyla dört kategoriye göre (boş-diğerleri, işlemsel, ilişkisel, işlemsel- ilişkisel), (boş-diğerleri, nesne olarak, herhangi bir sayı değeri olarak, çoklu değerler olarak) göre değerlendirilmiştir. Bunun yanında birinci, ikinci ve bu sorulara ait ek sorulardan elde edilen klinik mülakat verileri ise sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı başlığı altında analiz edilirken literatür destekli hazırlanan ve aritmetik, cebir öncesi ve cebirin özelliklerini içeren yukarıdaki karakterizasyon tablosundan yararlanılmıştır. Yine her bir sorudan sonra o soruya ait

24 öğrencinin bu üç alana göre değişimini ve gelişimini ortaya koyan bir sonuç tablosu oluşturulmuş ve yorumlanmıştır. Ayrıca bu çalışmanın nitel verilerinin sunulduğu bölümünde katılımcı öğrencileri nitelemek için “Ö1<sub>5</sub>, Ö2<sub>5</sub>, ... Ö23<sub>8</sub>, Ö24<sub>8</sub>” şeklinde takma isimler kullanılmıştır. Bu takma isimlerde ilk rakam öğrenci sırasını, ikinci rakam (indis olan) ise sınıfını göstermektedir.

### 3. Bulgular

#### 3.1. Sembollerin Kullanımına İlişkin Bulgular

Bu bölümde farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin sembollerin kullanımı (eşittir işareti) ile ilgili anlamalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan birinci sorudan elde edilen veriler sunulmuştur. 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin eşittir işareti sembolünün kullanımı ile ilgili anlamalarını ait birinci soruya ilişkin çözümler belirlenen dört kategoriye göre (boş-diğerleri, işlemsel, ilişkisel, işlemsel- ilişkisel) incelenmiş ve yüzde değerlerine ait sütun grafiği Şekil 1 de sunulmuştur.



**Şekil 1.** Birinci soruya ait yüzde değerlerini içeren sütun grafiği

Şekil 1 incelendiğinde eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algılayan 5, 6 ve 7.sınıf öğrencilerinin yüzde değerlerinin hepsi %50 ile %50 den daha büyük değerler iken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değeri %41 dir. Bunun yanında eşittir işaretini sadece ilişkisel bir sembol olarak düşünen farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzde değerleri ise sırasıyla %7, %11, %14 ve %19 dur. Hem işlemsel hem de ilişkisel bir sembol olarak eşittir işaretini algılayan 5.sınıf öğrencileri %11, 6.sınıf öğrencileri %15, 7.sınıf öğrencileri %20 iken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde

değeri %26 dır. Grafikten de anlaşılacağı üzere farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler eşittir işaretinin en çok işlemsel yönünü düşünmektedir.

Birinci sorunun çözümüyle ilgili farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerle yapılan klinik mülakatlardan elde edilen bulguların aritmetik, cebir öncesi ve cebir olma nedenleri, klinik mülakata katılan öğrencilerin cevaplarının frekans-yüzde değerleri Tablo 4 de verilmiştir.

Tablo 4.

*Çözümlerin Aritmetik, Cebir Öncesi ve Cebirsel Olma Nedenleri ve Öğrencilerin Frekans-Yüzde Değerleri*

	5.sınıf		6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)
Aritmetikte harflerin özellikleri	Ö1 <sub>5</sub> , Ö2 <sub>5</sub> , Ö3 <sub>5</sub> , Ö4 <sub>5</sub>	4 (%67)	Ö7 <sub>6</sub> , Ö8 <sub>6</sub> Ö9 <sub>6</sub>	3 (%50)	Ö13 <sub>7</sub> Ö14 <sub>7</sub> Ö15 <sub>7</sub>	3 (%50)	Ö19 <sub>8</sub> Ö20 <sub>8</sub>	2 (%33)
	Bu seviyede öğrenciler eşittir işaretini cevap için bir uyarıcı yani bir hesaplamanın sayısal sonucunu ifade eden sembol olarak görürler. Öğrencilere göre eşittir işareti sonuç bildirir aynı zamanda bir dönüşüm yöntemi yani soldan sağa yönsel bir işareti ifade eder.							
Cebir öncesinde harflerin özellikleri	Ö5 <sub>5</sub>	1 (%17)	Ö10 <sub>6</sub> , Ö11 <sub>6</sub>	2 (%33)	Ö16 <sub>7</sub>	1 (%17)	Ö21 <sub>8</sub>	1 (%17)
	Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola bir işlemsel sembol olarak yorumlarlar yani eşittir işareti bir eylemle ilgili ifadedir. Öğrenciler bu seviyede denklik ifadesi olarak eşittir ifadesini yorumlayamamalarına rağmen eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yararlanırlar.							
Cebirde harflerin özellikleri	Ö6 <sub>5</sub>	1 (%17)	Ö12 <sub>5</sub>	1 (%17)	Ö17 <sub>7</sub> , Ö18 <sub>7</sub>	2 (%33)	Ö22 <sub>8</sub> , Ö23 <sub>8</sub> , Ö24 <sub>8</sub>	3 (%50)
	Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretinin her iki yanında aynı miktarda nicelik olduğunu ve bu durumda eşittir işaretinin aynılığı, eşitliği ve denkliği gösterdiğini ifade ederler. Yani öğrenciler ilişkisel bir şekilde eşittir işaretini yorumlarlar.							

5.sınıf öğrencilerinin %67'i, 6. ve 7.sınıf öğrencilerinin %50'i, 8.sınıf öğrencilerinin ise %33'ü eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algıladıklarından dolayı, bu öğrenciler aritmetik kategorinin içinde yer almışlardır. Eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algılayan öğrenciler genellikle tüm öğrenim seviyelerinde zayıf ve orta düzeyde öğrenciler olmakla beraber bu öğrencilerin sekizi zayıf (Ö1<sub>5</sub>, Ö2<sub>5</sub>, Ö7<sub>5</sub>, Ö8<sub>5</sub>, Ö13<sub>5</sub>, Ö14<sub>5</sub>, Ö19<sub>5</sub> ve Ö20<sub>5</sub>), dördü ise orta düzeyde (Ö3<sub>5</sub>, Ö4<sub>5</sub>, Ö9<sub>5</sub> ve Ö15<sub>5</sub>) öğrencilerdir. Ayrıca 5., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin %17'i eşittir işaretini eşitlik veya denge ifadesi olarak yorumlayamamalarına rağmen eşittir işaretinin soldan sağa veya sağdan sola simetrik özelliğe sahip işlemsel bir sembol olarak algılamakta iken, 6.sınıf öğrencilerinin ise %33'ü eşittir işaretini bu şekilde algılamışlardır. Eşittir işaretini soldan sağa veya



24 ve 45 sayılarını alt alta yazarak dikey hesaplama ile 117 sonucunu bulmuştur...) 117 gelir. [A: Niçin 117 gelir?].... Çünkü toplama işleminin sonucunu soruyor. O halde 48, 24 ve 45 toplamı 117 olur. [A:  $49 - 25 = 31 - \_$  bu ifade de boşluk yerine hangi sayı gelir?].... 49 ile 25 çıkaralım, 31 ekleyelim olur... Sonuç 55 olur. [A: Peki " $99 - \_ = 90 - 59$ " ifadesinde boşluğa ne yazılacak?].... Ters tarafta istiyor... Tam olarak bilmiyorum ama galiba 9 gelmeli. [A: Niçin 9?].... 99 dan 9 çıkarsa 90 olur. [A: Ya 59 ne oldu?].... 90 dan da 59 çıkaralım. Bu işlemin sonucu 31 olur...

Ö4<sub>5</sub> öğrencisi de Ö2<sub>5</sub> öğrencisi gibi eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algıladığından dolayı ek sorulara yanlış cevaplar vermiştir. Bu öğrenci de eşittir işaretinde sonra sonucun gelmesi gerektiğini belirtmiş fakat devamında zincirleme işlemlere devam ederek sonuca ulaşmaya çalışmıştır.

A: Ok ile gösterilen sembol ne anlama geliyor?

Ö7<sub>6</sub>: Öğretmenim işlem bitti cevap ver. [A: Nasıl yani?].... 4 ile 5 topladık sonuç 9 olur. [A: Bu sembolün başka anlamı var mı?].... Hayır yoktur. Çünkü tek semboldür. [A: " $48 + 24 = \_ + 45$ " ifadesinde boş olan yere hangi sayı gelir?].... Öğretmenim 72 gelir. [A:

The image shows a student's handwritten work on a grid. It contains several multiplication problems:  $16 \times 3 = 32$ ,  $16 \times 3 = 96$ ,  $3 \times 3 = 9$ ,  $19 \times 2 = 37$ ,  $16 \times 3 = 48$ ,  $10 \times 3 = 30$ ,  $26 \times 3 = 78$ ,  $11 \times 2 = 22$ ,  $11 \times 2 = 22$ ,  $11 \times 2 = 22$ ,  $11 \times 2 = 22$ . There are also some other numbers like 16, 32, 19, 16, 12, 13, 51, 9, 23, 51, 3, 21, 63. A circled '3' and a circled '2' are visible in the work.

Ö7<sub>6</sub> öğrencisine ait çözüm

Niçin 72 gelir?].... Çünkü 48 ile 24 toplamı da ondan. [A: İşlemin sonucu bu mu?].... Daha bitmedi ki öğretmenim. Şimdi de 72 ile 45 toplayalım, 117 olur. [A: " $49 - 25 = 31 - \_$ " bu ifade de boşluk yerine hangi sayı gelir?].... Öğretmenim 49 ile 25 çıkaralım, 24 olur. Ama öğretmenim bu soru doğru mu yazılmış, anlayamadım. [A: Neden?].... Sonuç 24 olmalı ama onun yerinde 31 yazıyor. Bu yanlış olmalı. [A: Peki " $99 - \_ = 90 - 59$ " ifadesinde boşluğa ne yazılacak?].... Öğretmenim bu sefer de ters tarafta. Kafam karıştı. Eeee, sonuç 90 ise oraya 9 gelir herhalde. [A: İfadedeki 59 ne oldu?].... Tamam işte sonucu istiyor. 90 dan da 59 çıkardığımızda 31 olur. Öğretmenim bir şey sorabilir miyim? Eşit işaretinin başka anlamı da mı var? [A: Niçin bunu sordun?].... Kafam çok karıştı da ondan. [A: Peki " $\_ = 34 + 23$ " ifadesinde boşluğa ne yazılacak?].... Bu da yine ters tarafta verilmiş. Öğretmenim buda yanlış yazılmış herhalde. [A: Niçin anlayamadın?].... İşlemi nasıl tersten yapacağız ki. Eşit işaretinden sonra sonuç gelmeli. Ama burada ters bir durum var. Bilmiyorum. Biz her zaman bu taraftan (soldan sağa doğru) işleme başlayıp sonuç yazıyorduk. [A:  $37 = 16 + 3 \times \_$  "işleminde yerine hangi sayı gelecek?].... Öğretmenim sayılar yazalım. Mesela 16 yazarsak 16 ile 16 toplamı 32 olur 3 ile çarpımı 96 oluyor demek ki olmaz... [Öğrenci yandaki şekilde olduğu gibi birkaç sayı denemiş fakat sonuca ulaşamamıştır. Öğrenci burada işlem sırasını dikkate almadan sayılarla deneme yanılma yapma]

Ö7<sub>6</sub> öğrencisi de Ö2<sub>5</sub> ve Ö4<sub>5</sub> öğrencileri gibi eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algıladığından dolayı ek sorulara yanlış cevaplar vermiştir. Bu öğrenci her zaman sayılar ve işlemin eşittir işaretinin solunda, sonucunun da eşittir işaretinin sağında olması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca öğrencinin mülakatın son kısmında verilen birinci dereceden denklemin çözümünde işlem sırasını dikkate almadan

gelişigüzel sayılarla deneme yanılma yapması bu öğrencinin aritmetik çözüm stratejisi kullandığının diğer bir göstergesidir.

A: Ok ile gösterilen sembol ne anlama geliyor?

Ö13<sub>7</sub>: Eşittir işaretinin yanı sıra sorunun cevabına eşit olduğunu anlatıyor. Yani sayıların sonucunun önüne yazılan bir şey... [A: Sembolün başka anlamı var mı?]. Olamaz. Başka sembol var mı eşittir işaretinin yerine geçen, tek bir semboldür. [A : “ $48 + 24 = \_ + 45$ ” ifadesinde boş olan yere hangi sayı gelir?]. Soldaki işlemin cevabını istiyor, 72 olur... Çünkü 48 ile 24 toplamı 72 eşit de ondan. [A: Ya 45 ne oldu?]. Şimdi de 72 ye 45 ekleyelim sonuç 112 olur. [A: Ya “ $49 - 25 = 31 - \_$ ” ifadesinde boşluk yerine hangi sayı gelir?]. Zaten işlemin sonucunu vermiş 31. Neden boşluğa yazılacak sayıyı soruyor ki. Onu bulmaya gerek yok ki. [A: Niçin?]. 31 çıkaracağımız sayı yok, bilinmiyor da ondan. [A: Peki “ $99 - \_ = 90 - 59$ ” ifadesinde boşluğa ne yazılacak?]. Şimdi işlemin sonucunu 90 vermiş. Bende 99 dan neyi çıkarayım ki 90 olsun. Boşluk yerine 9 gelir. [A: Ya 59?]. İşleme devam edelim. 90 dan 59 çıkaralım 31 olur. [A: Peki “ $\_ = 34 + 23$ ” ifadesinde boşluğa ne yazılacak?]. 34 yazılacak... Zaten işlemin sonucu 34. Ondan dolayı 34 eşit 34 olmalı. [A:  $37 = 16 + 3 \times \square$  işleminde  $\square$  yerine hangi sayı gelecek?]. Bu boşluğa sayılar deneyelim. Sonucu veren doğrudur. [A: Peki nasıl yapacaksın?]. 5 olsa 3 ile 5 çarpımı 15 olur. 16 ile toplamı 31 olur olmaz. 6 olsa 6 ile 3 çarpımı 18, 18 ile 16 toplamı 34, buda olmaz. 7 alalım, 7 çarpı 3, 21 eder. 16 ile toplamı 37 olur. Tamam, demek ki 7 olur.

Ö13<sub>7</sub> öğrencisi de Ö2<sub>5</sub>, Ö4<sub>5</sub> ve Ö7<sub>6</sub> öğrencileri gibi eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algıladığından dolayı ek sorulara yanlış cevaplar vermiştir. Bu öğrenci de zincirleme işlemlere devam ederek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ayrıca Ö13<sub>7</sub> öğrencisinin mülakatın son kısmında verilen birinci dereceden denklemin çözümünde sayıları içeren deneme-yanılma stratejisini kullanması bu öğrencinin aritmetik çözüm stratejisi kullandığının göstergesidir.

### Cebir-öncesi özellik gösteren çözümler

Ö11<sub>6</sub> öğrencisi ise eşittir işaretini eşitlik veya denge ifadesi olarak yorumlayamamasına rağmen, eşittir işaretinin soldan sağa veya sağdan sola simetrik özelliğe sahip işlemsel bir sembol olarak yorumladığından yani eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yaralandığından dolayı cebir öncesi sınıflama içinde yer almışlardır.

A: Ok ile gösterilen sembol ne anlama geliyor?

Ö11<sub>6</sub>: Bir işlemin sonunda veya işlem bittikten sonra ona eşit olan sayıyı yazmak için kullanılır. [A: Başka bir anlamı var mı?]. Yoktur. Ama  $7 = 7$ ,  $10 = 10$ , gibi ifadelerin arasına da konur. Bunlar da bir işlemin sonucudur zaten. [A: Nasıl yani?]. Mesela,  $4 + 5 = 9$  olur.  $5 + 4 = 9$  olur. O halde  $4 + 5 = 5 + 4$  dir. Ya da  $1 + 4 = 5$  veya  $2 + 3 = 5$ . O halde  $1 + 4 = 2 + 3$  olur. [A: Peki “ $48 + 24 = \_ + 45$ ” ifadesinde boş olan yere hangi sayı gelir?]. Şimdi bir tarafın toplamı 72 dir.  $72 = 72$  olması için, 45 bir sayı

eklemeliyim. Ekleyeceksek 72 den 45 çıkaralım. 27 olur. [A: Ya “ $49 - 25 = 31 - \_$ ” bu ifadesinde boşluk yerine hangi sayı gelir?...] Az önceki gibi yaparız. 49 ile 25 çıkaralım, 24 olur.  $24 = 24$  ise 31 den 7 çıkarmalıyım. [A: Peki “ $\_ = 34 + 23$ ” ifadesinde boşluğa ne yazılacak?...] Bu ifade, “ $34 + 23 =$ ” ile aynıdır. O zaman 57 olur... Aynı şekilde “ $34 + 23 = 57 = 34 + 23$ ” olur. [A: “ $28:7 + 20 = 24$ ” ile “ $28:7 + 20 = 60 - 36$ ” ifadelerindeki eşittir işareti aynı anlamamı geliyor?...] Evet... İşlemin sonucunda çıkan sayıyı yani işlem ile sonucun aynı olduğunu belirtiyor. [A: Nasıl yani?...] Kısaca sonuçlar aynı çıkıyor. [A:  $37 = 16 + 3 \times \square$  işleminde  $\square$  yerine hangi sayı gelecek?...] Soruda bilinmeyen oluyor. Onu bulmalıyız. [A: Peki nasıl bulacaksınız?...] Bilinmeyi kullanmaya gerek yok. 37 den 16’ı çıkaralım, 3’e bölelim... Yani tersten çözdüm... (Düşünme şekli cebirsel olmakla beraber ifade etme biçimi aritmetik olan ters işlem algoritması)... [A: Peki “ $\square + 16 = 40 + 3 \times \square$ ” işleminde  $\square$  yerine hangi sayı gelecek?...] Tamam aynı olacak. Tersten işlem yapalım... Ama olmuyor. İki tarafta da bilinmeyen var. Bir sonuç yok ki. [A: Nasıl yani anlamadım?...] Az önce 37 sonuç idi. Ondan başladık. Ama burada sonuç yok. Nereden başlayacağımı bilmiyorum...

$$\begin{array}{r} 37 \\ -16 \\ \hline 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \overline{) 3} \\ 21 \phantom{0} \\ \hline 00 \end{array} \quad \square = 3$$

Ayrıca Ö5<sub>5</sub>, Ö10<sub>6</sub>, Ö16<sub>7</sub> ve Ö21<sub>8</sub> öğrencileri de Ö11<sub>6</sub> öğrencisi gibi eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola simetrik özelliğe sahip işlemsel bir sembol olarak yorumlamışlardır. Sonuç olarak bu öğrenciler de eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola bir işlemsel sembol olarak yorumladıklarından ve eşittir ifadesini eşitlik veya denklik ifadesi olarak yorumlayamamalarına rağmen eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yaralandıklarından dolayı cebir öncesi sınıflama içinde yer almışlardır. Ayrıca bu öğrencilerinin bazılarının, mülakatların son kısmındaki birinci dereceden denklemin çözümünde kullandığı cebir öncesi çözüm stratejileri de öğrencilerin cebir öncesi sınıflamanın içinde yer aldıklarını destekler niteliktedir. Bunun yanında “ $\dots + 16 = 40 + 3x$ ” şeklindeki denklemin çözümünde eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algılayan bazı öğrenciler başarılı bir çözüm gerçekleştirememiştir.

### Cebirsel Özellik Gösteren Çözümler

Ö6<sub>5</sub> ve Ö12<sub>6</sub> öğrencileri ise aşağıdaki diyaloglardan anlaşılacağı üzere eşittir işaretini ilişkisel olarak yorumladığından cebirsel sınıflamanın içinde yer almıştır.

A: Ok ile gösterilen sembol ne anlama geliyor?

Ö6<sub>5</sub>: Öğretmenim o eşittir işareti... İşlem sonucunda çıkan sayıyı göstermek için kullanılır. [A: Başka anlamı var mı?...] Evet, iki sayının aynı sayı olduğunu ya da eşit olduğunu gösterir. Yani birbirine eşit ifadeler için kullanılır. [A: “ $48 + 24 = \_ + 45$ ” ifadesinde boş olan yere hangi sayı gelir?...] Öğretmenim eşitliğin iki tarafında sayılar var. Şimdi 48 ile 24’ün toplamı 72 dir. O halde 45 ile boşluğa yazılacak sayının toplamı 72 olmalı... Tamam, 72 den 45 çıkaralım, 27 dir. [A: Ya “ $49 - 25 = 31 - \_$ ” ifadesinde boşluk yerine hangi sayı gelir?...] Öğretmenim burada eşitlik var. Bir taraf 49 ile 25 çıkaralım, 24 olur. Diğer tarafta 24 olmalı. 24 den 31’e yedi var.

O halde boşluğa 7 yazacağız. [A: Peki “ $\_ = 34 + 23$ ” ifadesi ile “ $34 + 23 = \_$ ” ifadesi aynı mıdır?]. Evet öğretmenim ikisinin de sonucu 57 dir. O halde bunlar aynıdır. [A : “ $28:7 + 20 = 24$ ” ile “ $28:7 + 20 = 60 - 36$ ” ifadelerindeki eşittir işareti aynı anlamamı geliyor.]. Hayır öğretmenim, birinde sonuç diğerinde ise denklem eşitliğini gösterir. [A : “ $37 = 16 + 3 \times$ ” işleminde yerine hangi sayı gelecek?]. Öğretmenim bu denklem. Burada bilinmeyen oluyor. Bilinenler bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa olur. Tamam, üç kutu 37 eksi 16 dan 21 olur. O zaman bir kutu 7 olur.

A: Ok ile gösterilen sembol ne anlama geliyor?

Ö12<sub>6</sub>:Eşittir. Fakat bu eşittir sembolü 4 sayısı ile 5 sayısını toplayınca 9 eder. Sonucu yazmak için eşittir koyuldu. [A: Başka anlamı var mı?]. Vardır. İki tarafın denk olduğunu anlatıyor. Yani eşitliğin her iki tarafı aynıdır. [A: Nasıl yani?]. Mesela “ $10 + 5 = 3. 5$ ” ifadesi aynıdır. [A: “ $48 + 24 = \_ + 45$ ” ifadesinde boş olan yere hangi sayı gelir.]. Önce 48 ile 24 toplayalım, 72 olur. 72 den 45 çıkaralım, 27 olur. [A: Niçin böyle bir işlem yaptın?]. Sonuç istemiyor. İki tarafta eşit olduğundan bir tarafta 72 var, diğer tarafta bilinmeyen sayı ve 45 var. O halde 72 den 45 çıkarttım. [A: Peki “ $49 - 25 = 31 - \_$ ” bu ifade de boşluk yerine hangi sayı gelir?]. Yine aynı 49 ile 25 çıkaralım, 24 olur. 31 den neyi çıkaralım ki 24 olsun. 35den 24 çıkarmalıyım. Boşluğa 7 gelir. [A: Ya “ $\_ = 34 + 23$ ” ifadesinde boşluğa ne yazılacak?]. Bunda sonuç isteniyor. Bu aslında  $34 + 23 = \_$  aynıdır. Fark eden bir şey olmaz. Yani toplamları 57 olur. [A: O halde “ $99 - \_ = 90 - 59$ ” ifadesinde boşluğa ne yazılacak?]. Bunda iki tarafında eşit olması için 90 ile 59 çıkaralım, 31 olur. 99’ dan ne çıkaralım ki 31 olsun. O halde 68 olur. [A: “ $28:7 + 20 = 24$ ” ile “ $28:7 + 20 = 60 - 36$ ” ifadelerindeki eşittir işareti aynı anlamamı geliyor.]. Hayır, birincide işlemin sonucunu ifade ediyor. İkincisinde işleme eşit olan başka bir işlemi ifade ediyor. [A: “ $37 = 16 + 3 \times \square$ ” işleminde yerine hangi sayı gelecek?]. Eşitlik var. O halde bu bir denklemdir,  $\square$  bilinmeyen olur. 37 den 16 çıkaralım ve 3’e bölelim. Sonuç 7 olur. [A: Peki “ $\square + 16 = 40 + 3 \times \square$ ” işleminde  $\square$  yerine hangi sayı gelecek?]. Tamam, az önceki çözüm gibi olacak. Ama bunda iki tarafta da bilinmeyen var. Bilinenler bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa alınmalı. [A: Neden böyle bir yöntem uyguluyorsun?]. Eşitlik var, iki taraf eşit...

Hem Ö6<sub>5</sub> hem de Ö12<sub>6</sub> öğrencisi eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algılamamış eşittir işaretinin her iki yanında aynı miktarda nicelik olduğunu ve bu durumda eşittir işaretinin eşitliği ve denkliği gösterdiğini ifade etmişlerdir. Yani bu öğrenciler eşittir işaretini ilişkisel bir şekilde de yorumladıklarından cebirsel sınıflamanın içinde yer almaktadırlar. Bunun yanında öğrenci iki denklemde de eşittir işaretini ilişkisel bir sembol olarak algıladığından başarılı çözümler gerçekleştirmişlerdir. Benzer şekilde Ö17<sub>7</sub>, Ö18<sub>7</sub>, Ö22<sub>8</sub>, Ö23<sub>8</sub> ve Ö24<sub>8</sub> öğrencileri de Ö6<sub>5</sub> ve Ö12<sub>6</sub> öğrencileri gibi eşittir işaretini hem işlemsel hem de ilişkisel bir sembol olarak algılamışlardır. Örneğin bu öğrencilerle yürütülen ve aşağıda bir kısmı sunulan mülakatların ilk kısımları da bu fikri desteklemektedir.

Ö17<sub>7</sub>: İşlemin sonucunu ifade ediyor... Evet, iki tarafında dengede olduğunu belirtir.

Ö18<sub>7</sub>: Sonucu belirtmek için kullanılır... Evet, eşitlik anlamına da gelir.

Ö22<sub>8</sub>:Sonuç anlamına gelir yani bu işareten önceki işlemin sonucu bu işareten sonra yazılır...

Evet, eşitlik, denklik, denklem eşitliği vb. belirtir.



Ö23<sub>8</sub>: Bir işlemin sonucunu belirtirken ya da iki ifadenin eşit olup olmadığını belirtirken kullanılır. Yani hem sonuç hem de eşitlik bildirir.

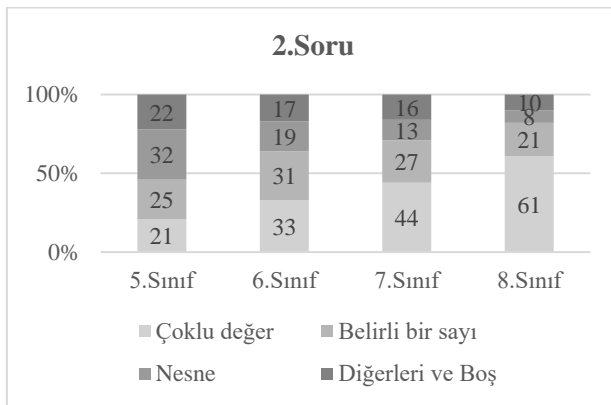
Ö24<sub>8</sub>: Öğretmenim sonuç, çözüm, eşitlik ve iki tarafında dengede olduğunu belirtir.

Sonuç olarak sembollerin kullanımı başlığı altında sunulan birinci soruya ait farklı öğrenim seviyelerindeki 24 öğrenci ile yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen bulgular bir bütün olarak değerlendirilmiş olursa, 24 öğrencinin on ikisi eşittir işareti ile ilgili aritmetik özellikleri içeren cevaplar vermiş, beşer öğrenci cebir-öncesi, yedi öğrenci de cebirsel özellikleri içeren cevapları tercih etmişlerdir. Aritmetik özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin sekizi zayıf, dördü orta düzeyde öğrencilerdir. Cebir öncesi özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin üçü orta, ikisi ise iyi düzeyde öğrenciler iken cebirsel özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin ise biri orta diğerleri iyi düzeyde öğrencilerdir. Mülakatlar farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin durumlarına göre değerlendirildiğinde 5.sınıf öğrencileri ile 6.sınıf öğrencileri arasında çok fazla fark olmamakla beraber, 6 ile 7.sınıf öğrencileri ve 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında belirli bir fark vardır. Fakat en çok fark 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında vardır.

### 3.2. Harflerin Anlamına İlişkin Bulgular

Bu bölümde farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin harflerin kullanımı ile ilgili anlamalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan ikinci sorudan elde edilen bulgular sunulmuştur.

5-8. sınıf öğrencilerinin harflerin kullanımı ile ilgili anlamalarına ilişkin çözümleri belirlenen dört kategoriye göre (boş-diğerleri, nesne, belirli bir sayı (bilinmeyen), çoklu değerler (değişken)) incelenmiş ve elde edilen yüzde değerlerine ait Şekil 2 deki sütun grafiği oluşturulmuştur.



**Şekil 2.** İkinci soruya ait yüzde değerlerini içeren sütun grafiği

Şekil 2 incelendiğinde harf sembolünü nesne olarak ifade eden farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzde değerleri sırasıyla %32, %19, %13 ve %8 iken, harf sembolünün belirli bir sayı veya bilinmeyen bir sayı olduğunu ifade eden 5-8.sınıf öğrencilerin yüzde değerleri %21 ile %31 arasında olup yakın değerlerdir. Harf sembolünün değişken olarak tanımlayan 5.sınıf öğrencileri %21, 6.sınıf öğrencileri %31, 7.sınıf öğrencileri %44 iken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değeri %61 gibi çok yüksek bir değerdir.

İkinci soruya ilişkin klinik mülakatlardan elde edilen cevapların aritmetik, cebir öncesi ve cebirsel olma nedenleri, frekans-yüzde değerleri Tablo 5’de verilmiştir.

Tablo 5.

*Çözümlerin Aritmetik, Cebir Öncesi ve Cebirsel Olma Nedenleri ve Öğrencilerin Frekans-Yüzde Değerleri*

	5.sınıf		6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	Öğrenci	N (%)	Öğrenci	N (%)	Öğrenci	N (%)	Öğrenci	N (%)
Aritmetikte harflerin özellikleri	Ö1 <sub>5</sub> , Ö2 <sub>5</sub> , Ö3 <sub>5</sub> , Ö5 <sub>5</sub>	4 (%67)	Ö7 <sub>6</sub> Ö8 <sub>6</sub> ,	2 (%33)	Ö13 <sub>7</sub> Ö14 <sub>7</sub>	3 (%33)	Ö19 <sub>8</sub>	1 (%17)
	Bu seviyedeki öğrenciler harfleri ya ölçüm etiketleri ya da somut bir objenin kısaltılmışı veya kendisi olarak düşünmektedir. Ayrıca bu seviyedeki bazı öğrenciler harfleri önemsememektedir.							
Cebir öncesinde harflerin özellikleri	Ö4 <sub>5</sub>	1 (%17)	Ö9 <sub>6</sub> , Ö10 <sub>6</sub> , Ö11 <sub>6</sub>	3 (%50)	Ö15 <sub>7</sub> Ö16 <sub>7</sub>	2 (%33)	Ö20 <sub>8</sub> , Ö21 <sub>8</sub>	2 (%33)
	Öğrenciler eş zamanlı olarak harfleri bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünmektedir. Ayrıca öğrenciler harfleri informal olarak kullanmaktadır (nesnelerin ilk iki veya daha fazla harfini kullanma).							
Cebirde harflerin özellikleri	Ö6 <sub>5</sub>	1 (%17)	Ö12 <sub>6</sub>	1 (%17)	Ö17 <sub>7</sub> , Ö18 <sub>7</sub>	2 (%33)	Ö22 <sub>8</sub> , Ö23 <sub>8</sub> , Ö24 <sub>8</sub>	3 (%50)
	Öğrenciler harfleri genelleştirilmiş sayılar ( $a + b = b + a$ ), bilinmeyen ( $2x + 4 = 8$ ), değişken ( $y = 2x + 7$ ) ve parametreler ( $y = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki a, b, c harfleri) olarak düşünmektedirler							

Tablo 5 incelendiğinde 5.sınıf öğrencilerinin %67’i, 6 ve 7.sınıf öğrencilerinin %33’ü, 8.sınıf öğrencilerinin ise %17’i harfleri ya ölçüm etiketleri ya da somut bir nesnenin kısaltılmışı veya kendisi olarak düşünmektedir. Özellikle harfleri ölçüm etiketleri veya somut bir nesnenin kısaltılmışı olarak algılayan öğrenciler genellikle tüm öğrenim seviyelerinde zayıf öğrencilerdir (Ö1<sub>5</sub>, Ö2<sub>5</sub>, Ö3<sub>5</sub>, Ö5<sub>5</sub>, Ö7<sub>6</sub>, Ö8<sub>6</sub>, Ö13<sub>7</sub>, Ö14<sub>7</sub> ve Ö19<sub>8</sub>) ve bu öğrenciler aritmetik kategorinin içinde yer alırlar. 5. sınıf öğrencilerinin %17’i harfleri eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ya da o nesnenin çokluğu olarak düşünmekteyken, 6.sınıf öğrencilerinin %50’i, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin ise %33’ü aynı düşünceye sahiptir. Bu düşünceye sahip öğrencilerin biri zayıf, beşi orta, ikisi ise iyi düzeydeki öğrencilerdir (Ö4<sub>5</sub>, Ö9<sub>6</sub>, Ö10<sub>6</sub>, Ö11<sub>6</sub>, Ö15<sub>7</sub>, Ö16<sub>7</sub>, Ö20<sub>8</sub> ve Ö21<sub>8</sub>) ve bu öğrenciler harfleri eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ya da o nesnenin çokluğu olarak düşündüklerinden dolayı cebir öncesi kategorinin içinde yer alırlar. Ayrıca 5. ve 6.sınıf öğrencilerinin %17’i, 7.sınıf

öğrencilerinin %33'ü, 8.sınıf öğrencilerinin ise %50'i harfleri genelleştirilmiş sayılar, bilinmeyenler, değişkenler ve parametrelerden biri veya birkaçı olarak düşünmektedirler. Bu öğrenciler genellikle tüm öğrenim seviyelerinde orta ve iyi düzeyde öğrenciler olmakla beraber bu öğrencilerin biri orta, altısı ise iyi düzeyde öğrencilerdir (Ö6<sub>5</sub>, Ö12<sub>6</sub>, Ö17<sub>7</sub>, Ö18<sub>7</sub>, Ö22<sub>8</sub>, Ö23<sub>8</sub> ve Ö24<sub>8</sub>).

### Aritmetikte harflerin anlamı

Ö2<sub>5</sub> öğrencisi harfleri ölçüm etiketleri olarak yorumlamış ve ek soruların birinde ise verilen "4a" ifadesini iki basamaklı sayı olarak düşündüğünden a harfi yerine sadece rakamların gelebileceğini ifade etmiştir. Ö3<sub>5</sub> öğrencisi h harfine karşılık bir sayı geleceğini belirtmiş ve harflerin alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal bir konum belirttiğini düşünmüştür. Ö8<sub>6</sub> öğrencisi ise harfleri somut bir nesnenin kısaltılmışı olarak düşünmüştür. Daha sonra öğrenci bu düşüncesinden dolayı ek soruların birinde harf-nesne kavram yanılığısına düşmüştür. O halde Ö2<sub>5</sub>, Ö3<sub>5</sub> ve Ö8<sub>6</sub> öğrencileri harflerin anlamı ile ilgili aritmetik özellik göstermişlerdir.

A : " $3n + 1$ " deki n harfi ne anlama geliyor?

Ö2<sub>5</sub>:Türkçedeki bir harf değil mi o. [A: Evet ama matematikte ne anlama geliyor?...] n harfi ne anlama geliyor bilmiyorum ama m'nin ne anlam geldiğini biliyorum. [A: Ne anlama geliyor?...] Boyumuzu ölçerken metre için m kullanıyoruz yani metrenin kısaltılmışı, n de öyle bir şey mi? [A: Başka bildiğin harf var mı?...] g harfi var gram için kullanılıyor. Ama kg var fakat o iki harf... [A: Ya "4a" yazsam a harfi hangi anlama geliyor?...] a birinci sayı olduğundan a = 1 dir. [A: Nasıl yani?...] Sayı 41 olur. İki basamaklı sayı olur.[A: Başka olmaz mı?...] O zaman 42, 43, yani 49'a kadar olur... a yerine 0'dan 9'a kadar sayılar yazarız. [A: Niçin 11 yazmayalım ki?...] 11 olmaz ki, bu iki basamaklı bir sayı...

A : " $3n + 1$ " deki n harfi ne anlama geliyor?

Ö3<sub>5</sub>: Bir harf. [A: Ne anlama geliyor?...] "n" ye karşılık bir sayı var. [A: Nasıl yani?...] a birinci sayı, b ikinci sayı diye sayalım, n yi bulalım. [A : Peki şu soruyu nasıl çözeceğiz?: "Ahmet Veli'den 8 cm daha uzundur. Veli h cm uzunluğundadır. Ahmet'in boyunun uzunluğu için ne yazabilirsiniz?"]... Önce h'ı bulalım. 8 ekleyelim. [A: h'ı nasıl bulacaksınız?...] (Öğrenci parmaklarıyla alfabedeki harfleri sessizce saydı). Tamam öğretmenim, buldum, h, 9 olur. h dokuzuncu harf. O halde sonuç 17 olur.

A : " $3n + 1$ " deki n harfi ne anlama geliyor?

Ö8<sub>6</sub>: n bir ismi temsil ediyor [A: Nasıl yani ]... Nane, neşe gibi. O isimlerin baş harfi... [A: n hangi değerleri alır?...] Bilmiyorum, ama "n" ye karşılık bir sayı var mı ki. [A: Peki şu soruyu nasıl çözeceğiz? "Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir. Buna göre :"]... Mavi kalem m, kırmızı kalem k olsun. [A: Şimdi ne yapacağız?...] Tamam, toplamları 90TL olduğuna göre m + k = 90 olur. [A: Peki "6e + 7e = ?" işleminin sonucu nedir? ( Şıklar: a)13elma, b)6e + 7e, c)13e, d)13)]...Öğretmenim, e elma değil mi? [A: Bilmiyorum?...] Bana göre 13elma olur cevap...

Ayrıca aşağıda diyalogları ve çözüm yöntemleri verilen Ö13<sub>7</sub> ve Ö19<sub>8</sub> öğrencileri de tıpkı Ö8<sub>6</sub> öğrencisi gibi harfleri somut bir nesnenin kısaltılmışı olarak düşünmüşler

aynı ek soruda harf-nesne hatası yapmışlardır. Bu nedenle Ö13<sub>7</sub> ve Ö19<sub>8</sub> öğrencilerinin harflerle ilgili düşünceleri de aritmetik özellik göstermektedir.

A: “ $3n + 1$ ” deki  $n$  harfi ne anlama geliyor?

Ö13<sub>7</sub>: Bilinmeyendir. [A: Nasıl yani?...] Öğretmenim  $n$  ile başlayan bir ismin baş harfini bilinmeyen diye yazarız. [A:  $n$  hangi değerleri alır?...] Sadece bir değer alır. [A: Peki şu soruyu nasıl çözeceğiz? “Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir.”]... Mavi kalemlere  $m$ , kırmızı kalemlere  $k$  diyelim. [A: Evet şimdi ne yapacağız?...] Tamam toplamları 90TL olduğuna göre kaç tane mavi kaç tane kırmızı,.. Tamam buldum. [A: Bulduğunu yazabilir misin?...] Tamam yazayım  $6m + 5k = 90$  olur. [A: Neden böyle yazdın?...] Öğretmenim 6 ile 10 çarptım 60, 5 ile 6 çarptım 30 toplamları 90 olur.

A: Şu soruyu nasıl çözeceğiz? “Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir. Buna göre”

Ö19<sub>8</sub>: Mavi kalemlere  $m$ , kırmızı kalemlere  $k$  diyelim. [A: Tamam devam edelim.]... Mavi kalem ile kırmızı kalemler toplamı 90TL olduğuna olur. Biraz düşünelim. Evet şöyle yazabiliriz. [A: Bulduğunu kağıda yazabilir misin?...] Tamam yazayım  $3m + 10k = 90$  olur. [A: Niçin böyle yazdın?...] Öğretmenim 3 mavi ile 10 çarptım 30TL, 10 kırmızı ile 6 çarptım 60 oldu Toplamları 90 olduğundan demek ki sağlıyor....

$\begin{aligned} 10\text{mavi kalemler} &= m \rightarrow 10 \\ 6\text{ kırmızı kalemler} &= k \rightarrow 6 \\ 6m + 5k &= 90\text{TL} \\ 6 \cdot 10 + 5 \cdot 6 &= 90\text{TL} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{mavi} &= m \rightarrow 10 \\ \text{kırmızı} &= k \rightarrow 6 \\ 3m + 10k &= 90 \end{aligned}$ $\begin{array}{r} 10 \\ \times 3 \\ \hline 30 \\ 60 \\ \hline 90 \end{array}$
---	--

Ö13<sub>7</sub> ile Ö19<sub>8</sub> öğrencilerine ait çözümler

Bununla birlikte Ö1<sub>5</sub> öğrencisi harflerle ilgili bir yorum yapamamıştır. Ö5<sub>5</sub>, Ö7<sub>6</sub> ve Ö14<sub>7</sub> öğrencileri de diğer öğrenciler gibi harfleri ya ölçüm etiketleri ya da somut bir nesnenin kısaltılmışı veya kendisi olarak düşünmektedir. Sonuç olarak bu öğrencilerde harflerin anlamı ile ilgili aritmetik özellik göstermişlerdir.

### Cebir-öncesinde harflerin anlamı

Ö15<sub>7</sub> öğrencisi ise eş zamanlı olarak  $n$  harfini bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünmüştür. Bu öğrenci ek soruların birinde verilen denklemi cebir öncesi çözüm stratejisi olan ters-işlem algoritmasından yararlanarak çözmüştür. Ö20<sub>8</sub> öğrencisi de harfleri hem bir nesnenin kısaltılmışı hem de o nesnenin çokluğu düşünmüştür. Fakat bu öğrenci bilinmeyen olarak adlandırdığı bu harflerin sadece birer değer alabileceğini belirtmesi soruya göre yanlış olmuştur. O halde öğrenciler cebir öncesi özellik göstermişlerdir.

A: Ok ile gösterilen  $n$  harfi ne anlama geliyor?

Ö15<sub>7</sub>: Bir şeyi temsil ediyor. Ya da bilinmeyen bir sayıdır. [A: *Nasıl yani biraz daha açıklayabilir misin?*]... n harfi bir şey ve bilinmeyen bir sayıyı gösterir. Mesela Ali'nin bilyeleri dediğimizde Ali'nin yerine a kullanıyoruz. Yani Ali'nin isminin ilk harfini alıyoruz... [A: *Tamam. "Ali'nin bilyelerinin sayısının üç katı Veli'nin bilyelerinin sayısına eşittir."* ifadesini nasıl yazarısın?]... Ali a, Veli v olursa  $3a = v$  yazarız. [A: *Sen Ali'yi 3 ile çarpıyorsun. (Belli bir süre gülüşme oldu)*]... Yok yok öğretmenim, ben Ali'yi 3 ile çarpmıyorum, Ali'nin bilyelerini üç ile çarpıyorum. [A: *Peki "3n + 1 = 13" olsa buradaki n harfi de aynı anlama mı geliyor?*]... Evet öğretmenim... Mesela Nazan n ile gösterirsek aynı anlama gelir. [A: *Bu ifadeyi sözlü olarak nasıl söyleyebilirsin?*]... Neşe'nin bilyelerin sayısı n olsun, neşenin bilyelerinin 3 katı var 1 eklemiş 13 olmuş. [A: *Tamam, Bu ifadeye n'i bulabilir misin?*]... Evet öğretmenim... Tersten işlem yapalım. Önce 13 den 1'i çıkaralım 12 olur. 3 çarpım durumunda biz böyleceğiz. 12'yi üçe bölersek 4 olur. Demek ki  $n = 4$  olur...

A : " $3a + 1$ " ifadesinde a harfi ne anlama geliyor?

Ö20<sub>8</sub>: a bilinmeyen bir sayıdır. [A: *Nasıl yani biraz daha açıklayabilir misin?*]... Bilinmeyen bir şeyin yerine geçiyor, örneğin Anne'nin yaşı dersek Anne'yi kısaltırız, onun yerine a yazarız.[A: *Bu a harfi, anne mi, yoksa annenin yaşı mı?*]... Annenin yaşı olmalı... [A: *Peki, "Babam kırtasyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir."* Bu soruya uygun bir ifade yazabilir misin?]... Soruda fiyat var. Onu dikkate alalım. m, mavi kalemlerin fiyatı olsun, k, kırmızı kalemlerin fiyatı... Bu kalemlerin toplam fiyatı 90TL imiş. Yani  $m + k = 90$  olur. [A: *Tamam*]... Yok, yok yanlış yaptık. [A: *Ne oldu?*]... Mavi kalemlerin ve kırmızı kalemlerin tek tek fiyatı verilmiş. [A: *O halde m ve k ne olacak?*]... "mavi m, kırmızı k", yok yok... Tamam, buldum, m mavi kalemlerin sayısı, k da kırmızı kalemlerin sayısı. [A: *Evet nasıl ifade ederiz?*]... Bir tanesi 10TL ise 10.m, bir tanesi 6TL 6.k, toplamları da  $10m + 6k = 90$  olur. [A: *Peki m ve k hangi sayılar olduğunu bulabilir miyiz?*]... Sıra ile sayılar deneriz hangi sayı oluyorsa sonuç odur. [A: *Yani bunlara karşılık birer sayı mı gelir?*]... Evet öğretmenim...

Bununla birlikte Ö4<sub>5</sub>, Ö9<sub>6</sub>, Ö10<sub>6</sub>, Ö11<sub>6</sub>, Ö16<sub>7</sub> ve Ö21<sub>8</sub> öğrencileri de Ö15<sub>7</sub> ve Ö20<sub>8</sub> öğrencileri gibi eş zamanlı olarak harfleri bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin miktarı olarak düşündüklerinden harflerle ilgili cebir öncesi özellik göstermişlerdir. Ayrıca bazı öğrenciler harfleri informel yani nesnelerin ilk iki veya daha fazla harfini kullanmış ve onları da o nesnenin çokluğu olarak algılamıştır.

### Cebirde harflerin anlamı

Harfleri genelleştirilmiş sayılar, bilinmeyenler, değişkenlerden biri veya birkaçı olarak düşünen yani harflerin cebirsel özelliklerini gösteren Ö6<sub>5</sub> ve Ö18<sub>7</sub> ve Ö24<sub>8</sub> öğrencilerine ait diyalogların bir kısmı aşağıda sunulmuş ve diyaloglardan sonra bu öğrencilerin düşünceleri hakkında bilgi verilmiştir.

A : " $3n + 1$ " ifadesinde n ne anlama geliyor?

Ö6<sub>5</sub>: Öğretmenim bir harftir. [A: *Matematikte ne anlama geliyor?*]... Bilinmeyen oluyor. Öğretmenim arada çarpı var değil mi? [A: *Neden sordun?*]... Biraz kafam karıştı da ondan. [A: *Niçin?*]... İki basamaklı sayı da olabilir ondan. [A: *Evet çarpı alalım. Tamam, buradaki n harfi kaç değer alır?*]... Öğretmenim birçok değer alabilir. [A: *Peki “ $3n + 1 = 13$ ” ifadesindeki n harfi ile diğer n harfi arasında fark var mı?*]... Yok öğretmenim, aynıdır. [A: *Bu ifade de n kaç değer alır?*]... Tabii ki birçok değer. Çünkü bilinmiyor. [A: *Nasıl çözebilirsin bu denklemi?*]...  $3n + 1 = 13$  bilinenler bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa alalım?  $3n = 13 - 1$  olur.  $3n = 12$  ise  $n = 4$  olur. [A: *Sen bir değer buldun, nasıl oluyor da n birçok değer alıyor.*]... Demek ki ikisi farklı, ama biz genelde ikinci sorudaki benzer bilinmeyenler kullanıyoruz. [A: *Ali Veli'den 8 cm daha uzundur. Veli h cm uzunluğundadır. Ali'nin boyunun uzunluğu için ne yazabilirsiniz?*]... Alinin uzunluğu a, Velinin uzunluğu v olsun. [A: *Başka harf kullanabilir misin?*]... Olur mesela bilinmeyen x diyorlar. Ama harfe bakıp kime ait olduğunu anlamak daha iyi.  $a = v + h + 8$ . [A: *h ne anlama geliyor?*]... Velinin uzunluğu, ama bir dakika yanlış oldu.... Velinin uzunluğu h verilmiş zaten. Demek ki “ $a=h+8$ ” olur.

Ö6<sub>5</sub> öğrencisi n harfini bilinmeyen olarak düşünmüş ve birçok değer alabileceğini ifade etmiştir. Fakat öğrencinin n harfinin birçok değer alabilir yorumu doğru olmakla birlikte, ilk durumdaki n harfi bilinmeyenden ziyade değişken olarak kullanılan bir harftir. Ek soruların birincisindeki denklemdeki n harfi ile ilgili öğrencinin yorumu doğrudur. Bu iki sorudan anlaşılacağı üzere öğrenci harflerin bilinmeyen olarak kullanımı ile değişken olarak kullanımı arasındaki farkı tam olarak bilmemektedir. Ayrıca mülakat esnasındaki ek soruların ikincisinin de öğrenci genel olarak bilinmeyenleri soru metnindeki terimlerden seçmiş ve böylece hangi harfin kime ait olduğunu anlamının daha iyi olduğunu ifade etmiş. Ayrıca aşağıdaki diyalogdan da anlaşılacağı Ö18<sub>7</sub> öğrencisi tıpkı Ö6<sub>5</sub> öğrencisi gibi harfleri genelde bilinmeyen olarak algılamış ve denklemde ve matematiksel ifadelerde verilen harflerin değerlerini yorumlamada yanlışlıklar yapmıştır. O halde Ö6<sub>5</sub> ve Ö18<sub>7</sub> öğrencilerinin harflerle ilgili düşünceleri ve çözüm süreçleri bu öğrencilerin cebirsel özellikleri gösterdiklerini kanıtlamaktadır.

A: *Ok ile gösterilen harf ne anlama geliyor?*

Ö18<sub>7</sub>: Öğretmenim bilinmeyendir. [A: *Başka anlamı var mı?*]... Yok ama bilinmeyenleri x ile gösteriyorduk. [A: *Her zaman x ile mi gösterilir?*]... Evet biz hep x ile gösteriyoruz. [A: *Ama n harfi bilinmeyen diyorsun, nasıl oluyor?*]... O da olur, ama ben n yerine x alır öyle işlem yaparım. [A: *Bu bilinmeyen n harfi kaç değer alır?*]... Öğretmenim birçok değer alır. [A: *Peki “ $3n + 1 = 13$ ” ifadesindeki n harfi ile diğer n harfi arasında fark var mı?*]... Yok öğretmenim, burada da bilinmeyendir. [A: *Peki bu ifade de n kaç değer alır?*]... Öğretmenim denklemi çözelim. [A: *Nasıl?*]...  $n = x$  diyelim....  $3x + 1 = 13$  ise  $3x = 12$ ,  $x = 4$  olur. O halde sadece  $n = 4$  olur. [A: *Ama diğer n birçok değer alıyordu, bu bir değer alıyor. Nasıl oluyor?*]... Öğretmenim ikisi de bilinmeyen, kafam karıştı öğretmenim. [A: *Peki, “Selim ile Koray'ın toplam 47TL parası var. Selim, Koray'dan 5TL daha fazla parası olduğuna göre, her birinin kaç lira parası var? sorusunu nasıl çözeceksin.*]... Tamam öğretmenim Selim x olsun, Koray ise ...,yok yok, Koray x olsun, o

halde Selim  $x + 5$  olur. [A: *Koray bilinen bir kişi, nasıl x oluyor?*]... Öğretmenim Koray dediysek  $x$  Koray'ın parası diğeri de  $x + 5$  de Selim'in parası. Tamam toplamları 45TL ise  $x + x + 5 = 45$  denklemini çözelim...  $x = 20$  olur. [A: *Peki, "Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir." Bu soruya uygun bir ifade yazabilir misin?*]... Tamam bilinmeye  $x$  diyelim... Ama bir dakika burada iki bilinmeyen var. [A: *Diğer soruda da Selim ile Koray'ın paraları bilinmiyordu yani iki bilinmeyen vardı*]... Ama orada bir bilinmeyenle yazabiliyorduk. [A: *Tamam nasıl yazacağız?*] ... Mavi kalemlerin sayısı  $x$ , kırmızılardan sayısı  $y$  olsun. Tamam o halde,  $10x + 6y = 90$  olur. [A: *Peki buradaki x ve y kaç değer alır.*] ... Tabi ki birer tane değer alır. [A: *Neden?*]... Diğer sorularda bilinmeyenler hep bir değer çıkmıştı ondan. [A: *Ama ilk soruda n harfi birçok değer alır demiştin?*] ... Yok, demek o yanlıştı, n harfi de tek değer alır.

Ö24<sub>8</sub> öğrencisi ise harfleri bilinmeyenler, genelleştirilmiş sayılar ve değişkenler olarak düşünmüş ve başarılı cevaplar vermiştir. Bu öğrenci bilinmeyenle değişken kavramı arasındaki farkı Ö23<sub>8</sub> ile birlikte açıklayan 24 öğrenciden biridir. Bu öğrenci bu üç durumda da her harfin kullanılabilceğini ifade etmiş ve soruların çözümünde ağırlıklı olarak alışkanlıktan dolayı  $x$  ve  $y$  harflerini daha çok kullandığını belirtmiştir. Bu nedenle Ö23<sub>8</sub> ve Ö 24<sub>8</sub> öğrencilerinin harflerle ilgili düşünceleri cebirsel özellik göstermektedir.

A: "3n + 1" ifadesinde n ne anlama geliyor.

Ö24<sub>8</sub>: Öğretmenim değişkendir. [A: *Başka anlamı var mı?*]...Yok ama bilinmeyen? Yok olamaz. [A: *Neden bilinmeyen değil.*]... n birçok değer alıyor da ondan, bilinmeyenler genelde bir değer alıyor. Ayrıca öğretmenim bilinmeyenler genel de  $x$  ile gösteriliyor. [A: *Peki " 3n + 1 = 13" ifadesindeki n harfi ile diğer n harfi arasında fark var mı?*]... Var öğretmenim, burada n harfi bilinmeyendir. [A: *Peki bu ifade de n kaç değer alır?*]... Öğretmenim bir değer alır, o da 4 dür. [A: *Nasıl yani?*]... Denklemleri çözdüm sonuç  $n = 4$  çıktı. [A: *Peki, "Babam kırtasiyeden birkaç kırmızı kalem ile birkaç mavi kalem satın aldı. Bu kalemlere toplam 90TL ödedi. Mavi kalemlerin her birine fiyatı 10TL, kırmızı kalemlerin her birinin fiyatı ise 6TL dir." Bu soruya uygun bir ifade yazabilir misin?*]... Tamam kırmızı kalemlerin sayısı  $x$ , mavi kalemlerin sayısı  $y$  olsun. Toplamları 90'mış. [A: *Tamam nasıl yazacağız?*]... Mavi kalemlerin birinin fiyatı 10TL ise  $y$  tanesi 10y, kırmızı kalemlerin bir tanesinin fiyatı 6TL ise  $x$  tanesi  $6x$  olur, toplamları da 90 olur. O halde  $10y + 6x = 90$  olur. [A: *Peki bu soruda x ve y kaç değer alır.*]... Birçok değer alır. Yani değişebilir değişkendirler. [A: *"a + b = b + a" ifadesindeki a ve b ne anlama geliyor?*]... Öğretmenim bu değişme özelliği değişimli? Öğretmenim yine yazılı sorularında bununla ilgili genellemeler yapmıştık. Değişme özelliğini genel hali [A: *Peki a ve b kaç değer alır.*]... Öğretmenim ne yazarsan gider yani sonsuz tane. [A: *Peki farklı durumlar için birçok harf kullandın, doğru mu?*] ... Öğretmenim sonuçta harf ister a ister b. Ama ben genelde  $x$  ve  $y$  kullanıyorum, alışkanlık.

Bununla birlikte Ö12<sub>6</sub>, Ö17<sub>7</sub>, Ö22<sub>8</sub> ve Ö23<sub>8</sub> öğrencileri de Ö6<sub>5</sub>, Ö18<sub>7</sub> ve Ö24<sub>8</sub> öğrencileri gibi harfleri genelleştirilmiş sayılar, bilinmeyenler, değişkenlerden biri

veya birkaçı olarak düşünmüşlerdir. Özellikle  $\text{Ö}_{23}$  ve  $\text{Ö}_{24}$  öğrencilerin harflerle ilgili algıları diğer öğrencilere göre daha üst düzeydedir. O halde bu öğrencilerin hepsi harflerle ilgili algılamaları cebirsel özellik göstermektedir.

Sonuç olarak harflerin anlamı başlığı altında sunulan ikinci soruya ait farklı öğrenim seviyelerindeki 24 öğrenci ile yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen bulgular bir bütün olarak değerlendirilmiş olup, mülakata katılan toplam 24 öğrencinin dokuzu harflerle ilgili aritmetik özellikleri içeren cevaplar vermiş, sekiz öğrenci cebir-öncesi, yedi öğrenci ise cebirsel özellikleri içeren cevaplar vermişlerdir. Aritmetik özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin yedisi zayıf, biri orta, biri de iyi düzeyde öğrencilerdir. Cebir-öncesi özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin biri zayıf, altısı orta, biri de iyi düzeyde öğrenciler iken cebirsel özellikleri içeren cevapları veren öğrencilerin ise biri orta diğerleri iyi düzeyde öğrencilerdir.

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Elde edilen verilerden, farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinin genel olarak eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algıladığı görülmektedir. Burada çoğu öğrencinin eşittir işaretini işlemsel sembol olarak algılaması düşündürücü bir sonuçtur. Çünkü eşittir işaretinin kullanımı sadece cebirsel yapıları açığa çıkartma, ilişkileri oluşturma ve matematiksel durumları formüle etme açısından önemli değil aynı zamanda aritmetikten cebire geçiş ve cebirsel düşünme için de önemli bir beceridir (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1993; Driscoll, 1999; Van Amerom, 2002). Sınav kâğıtlarında eşittir işaretinin kullanımını sadece işlemsel bir sembol olarak algılayan 5., 6. ve 7.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri %51 ve üzeri değerlerken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değeri %41'dir. Eşittir işaretini sadece ilişkisel bir sembol olarak algılayan öğrenci yüzdeleri ise %7 ile %19 arasında değerlerken, hem işlemsel hem de ilişkisel sembol olarak algılayan öğrenci yüzdeleri ise sınıflara göre sırasıyla %11, %15, %20 ve %26'dır. Nitekim klinik mülakata katılan 24 öğrencinin yarısı eşittir işaretinin sadece cevap için bir uyarıcı veya herhangi bir hesaplamanın sayısal sonucunu ifade eden işlemsel bir sembol olarak düşünmüşlerdir. Yani öğrencilerin yarısı eşittir işaretinin sadece aritmetik özelliği içeren işlemsel yönünü algılamışlardır. Tüm öğrencilerin %21 ise cebir öncesi algılama olan eşittir işaretinin soldan sağa veya sağdan sola işlemsel bir sembol olarak yorumlamakta ve eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yararlanmaktadır. Bununla birlikte farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin %29'u eşittir işaretinin cebirsel özelliği içeren ilişkisel yönünü algılamışlardır. Birçok araştırmacı farklı öğrenim seviyelerindeki birçok öğrencinin eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algıladıklarını belirtmişlerdir (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Cooper ve ark., 1997; Knuth ve ark., 2005, 2006; Yaman, Toluk & Oklun, 2003). Eşittir işaretinin kullanımı ile ilgili sınıflar arası değişimleri incelendiğinde, mülakata katılan 5.sınıf öğrencilerinden eşittir işaretinin kullanımı ile ilgili aritmetik özellik gösteren dört, cebir öncesi ve cebirsel özellik gösteren birer



öğrenci vardır. Aynı şekilde sınav kâğıtlarından 5.sınıf öğrencilerinin çoğunluğunun eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algıladığı görülmektedir. Klinik mülakatlarda aritmetik özellik gösteren öğrenciler eşittir işaretinden sonra kesinlikle sonucun geleceğini ifade etmiş ve ek sorularda birçok hata yapmışlardır. Bu hataların iki nedeni olabilir: Birincisi “bir hesaplamanın sayısal sonucunu ifade eden” eşittir işaretinin sadece aritmetikteki kullanımını düşünme, ikincisi ek sorulardaki matematiksel ifadelerdeki bazı terimleri ve terimlerin sıralarını önemsememedir. Benzer şekilde Alexandrou-Leonidou ve Phillippou (2007) ilköğretim birinci ve ikinci kademe öğrencilerinin büyük çoğunluğunun eşittir işaretinin aritmetikteki tek yönlü (sadece işlemsel) kullanımından kaynaklanan zorluklara sahip olduklarını belirtmişlerdir. 5. sınıf seviyesindeki bazı öğrencilerin “ $\_ = 34 + 23$  ve  $99 - \_ = 90 - 59$ ” gibi ek sorulara ait cevapları incelendiğinde, öğrencilerin böyle bir yazılış kabul etmedikleri ve solda bilinmeyen olan durumlarda zorluk çektikleri görülmektedir. Öğrencilerin bu türde verilen problemleri reddetmesinin nedeni, eşittir işaretini soldan sağa bir eylem belirten fakat sol tarafta iki terim verilmedikçe hiçbir şey yapmayan bir işlem olarak görmelerinden kaynaklanabilir. 5.sınıf öğrencilerinden cebir öncesi özellik gösteren öğrenci eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola simetrik özelliğe sahip işlemsel bir sembol olarak, cebirsel özellik gösteren öğrenci ise eşittir işaretinin hem işlem sonucunu hem de eşitliği gösteren bir sembol olarak algılamıştır. Özellikle eşittir işaretinin ilişkisel bir sembol olduğunu belirten Ö<sub>5</sub> öğrencisi ek sorulardaki hesaplamalarda aritmetik stratejiler yanında eşittir işaretinin ilişkisel anlamından da yararlanmıştı. 6.sınıf öğrencilerinden ise üç öğrenci aritmetik, iki öğrenci cebir öncesi, bir öğrenci ise cebirsel özellikleri gösteren cevaplar vermişlerdir. O halde mülakata katılan 6.sınıf öğrencilerinin yarısı (%50) eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algılamışlardır. Nitekim 6.sınıf öğrencilerinin %56’sının eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algıladığını gösteren sınav kâğıtları ile mülakat cevapları birbiriyle tutarlıdır. Aritmetik özellik gösteren 6.sınıf öğrencileri tıpkı 5.sınıf öğrencileri gibi eşittir işaretini sadece işlemsel bir sembol olarak algıladıklarından dolayı ek soruların çözümlerinde genel olarak aritmetik stratejilerden yararlanmışlardır. Özellikle Ö<sub>7</sub> öğrencisi her zaman sayıların ve işlemlerin eşittir işaretinin solunda, işlemlerin sonuçlarının ise eşittir işaretinin sağında olması gerektiğini belirtmiş ve eşittir işaretinin kullanımı ile ilgili birçok hata yapmıştır. Bu öğrenci eşittir işaretinden hemen sonraki sayının cevap olduğunu ya da bütün sayıların toplanacağını belirtmiştir. Bu hataların nedenlerinden biri öğrencinin eşittir işaretinin sadece işlemsel yani aritmetik yönünü düşünmesi olabilir. Birçok araştırmacı ilköğretim öğrencilerinin eşittir işaretini ilişkisel bir sembol değil de “soldan sağa eylem belirten” bir sembol olarak görmelerinden kaynaklanan hatalar yaptıklarını ortaya koymuştur (Kieran, 1992; Knuth ve ark., 2005, 2006; Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Cebir öncesi özellik gösteren iki öğrenciden biri olan Ö<sub>11</sub> öğrencisinin “ eşittir işareti  $7=7$ ,  $10=10$ ,  $16=16$  gibi ifadelerin arasına da konur, bunlarda bir işlemin sonucudur zaten. Örneğin  $4 + 5 = 9$  ve  $5+4=9$  olup  $4+5=5+4$  dir. Ya da  $1+4=5$  veya  $2+3=5$  için  $1+4=2+3$  olur” şeklindeki ifadelerinden, eşittir işaretini

soldan sağa veya sağdan sola simetrik özelliğe sahip bir sembol olarak algıladığı görülmektedir. Nitekim Ö11<sub>6</sub> öğrencisiyle yürütülen “ $37 = 16 + 3x$ ” şeklindeki ek mülakat sorunun çözümünde öğrencinin cebir öncesi özellik içeren “ters-işlem algoritmasını” kullanması bu öğrencinin cebir öncesi özelliklere sahip olduğunun diğer bir göstergesidir. Eşittir işaretini ilişkisel bir sembol olarak algılayan 7.sınıf öğrencilerinin sayısı daha fazla olmakla beraber işlemsel sembol olarak algılayan 7.sınıf öğrencilerinin sayısı iki sınıfa göre daha azdır. 7.sınıf öğrencilerinden iki öğrenci aritmetik, iki öğrenci cebir öncesi, iki öğrenci de cebirsel özellikleri gösteren cevaplar vermiştir. Cooper, Williams ve Baturu (1999) toplam elli bir 7.sınıf öğrencisiyle yürüttüğü çalışmalarında öğrencilerin neredeyse tamamının eşittir işaretini “cevabı yaz” sinyali olarak algıladıklarını belirtmişlerdir. Fakat iki çalışma arasında eşittir işaretini “cevabı yaz” sinyali olarak algılayan öğrencilerin sayısı açısından uyumsuzluklar vardır. Bu ise öğrenme ortamlarından kaynaklanmış olabilir. Bu seviyedeki öğrencilerde genel olarak ek sorularda aritmetik stratejileri kullanmışlardır. Cebir öncesi özellik gösteren iki 7.sınıf öğrencisi (Ö15<sub>7</sub> ve Ö16<sub>7</sub>) aynen bu düzeydeki 5 ve 6.sınıf öğrencileri gibi eşittir işaretini soldan sağa veya sağdan sola eylem bildiren bir sembol olarak yorumlamışlardır. Bu öğrenciler eşittir işaretini eşitlik veya denge bildiren bir sembol olarak yorumlamamalarına rağmen ek sorularda eşittir işaretinin simetrik özelliğinden yararlanmış diğer iki sınıf öğrencilerine göre daha az hatalar yapmışlardır. Diğer üç öğrenim seviyesindeki öğrencilere göre eşittir işaretini ilişkisel sembol olarak algılayan 8.sınıf öğrencilerinin sayısı daha fazladır. 8.sınıf öğrencilerinden iki öğrenci aritmetik, bir öğrenci cebir öncesi, üç öğrenci ise cebirsel özellikleri gösteren cevaplar vermiştir. Mülakatlardan elde edilen bu değerler sınav kâğıtlarıyla karşılaştırıldığında benzer sonuçların elde edildiğini görülmektedir. Aritmetik özellik gösteren 8.sınıf öğrencileri tıpkı diğer üç öğrenim seviyesindeki öğrenciler gibi eşittir işaretinin sözdizimsel gösterge yani ondan sonra cevabın yazılmasını gerektiren bir sembol olarak görürler. Bu öğrencilerde diğer öğrenciler gibi ek sorulara matematiksel ifadelerin sadece belli bir kısmını alarak işlem yaptıklarından dolayı yanlış cevaplar vermişlerdir. Fakat diğer öğrenim seviyelerine göre ek sorularda aritmetik (işlemsel) ve cebirsel (ilişkisel) stratejileri kullanan öğrencilerin sayısı daha fazladır. O halde sınıf seviyesi arttıkça eşittir işaretinin aynı anda hem aritmetik hem de cebirsel özelliğini ifade eden öğrencilerin sayısı artmaktadır.

İkinci soruya ilişkin veriler incelendiğinde 5-8.sınıf öğrenciler arasında harflerin anlamı ile ilgili benzer farklılıklar görülmektedir. Harflerin çoklu değerleri temsil ettiğini ifade eden 5.sınıf öğrencileri %11 iken, 8.sınıf öğrencileri %61 gibi oldukça yüksek bir değerdedir. Bu ise sınıf seviyesi arttıkça “ $3n + 1$ ” ifadesindeki “n” harfinin çoklu değerlere sahip olduğunu belirten öğrencilerin sayısının da arttığını göstermektedir. Tersine harfin bir nesnenin etiketi olduğunu ifade eden 5.sınıf öğrencileri %25 iken, 8.sınıf öğrencileri ise %8 gibi çok düşük bir değerdedir. Bu sonuç sınıf seviyesi arttıkça harfleri bir nesnenin etiketi olarak algılayan öğrencilerin

sayısında azalma olduğunu göstermektedir. Aynı şekilde klinik mülakatlardan elde edilen sonuçlarda yazılı sınavlardan elde edilen sonuçları destekler niteliktedir. Bu iki sonuç öğrencilerin matematiksel deneyimlerine ve bilişsel gelişimlerine bağlı olabilir. Çünkü formal olarak 6.sınıftan itibaren cebirsel ifadelerde kullanılmaya başlanılan harfler, daha sonraki dönemlerde daha sıklıkla kullanılmaktadır (MEB, 2005). Özellik ortaokulun son yılında harflerin farklı şekillerde kullanımı en üst düzeydedir. Nitekim sınıf seviyesi arttıkça öğrencilerin matematik deneyimlerinin arttığını gösteren diğer bir sonuç ise; n harfi ile ilgili herhangi bir görüş bildirmeyen veya ilgisiz cevaplar veren öğrencilerin sayısının öğrenim seviyesi arttıkça azalmasındır. Knuth ve ark. (2005) çalışmasındaki sonuçlarla çalışmada elde edilen sonuçlar benzerlik göstermesine rağmen bazı farklılıklarda vardır. Örneğin onların çalışmasında sınıf seviyesi arttıkça harfin çoklu değerleri temsil ettiğini ifade eden öğrencilerin sayısı artmaktadır sonucu, çalışmanın sonucu ile tutarlı olmasına rağmen, “n” harfi ile ilgili herhangi bir görüş bildirmeyen veya ilgisiz cevaplar veren 6.sınıf öğrencilerin sayısı ile çalışmadan elde edilen sonuç tutarlı değildir. Araştırmacılar 6.sınıf öğrencilerinin yaklaşık %27'nin harfi ile ilgili herhangi bir görüş bildirmediklerini veya ilgisiz cevaplar verdiğini belirtirken bu oran çalışmamızda %17 dir. Bu ise değişken kavramına ilk formal girişin, öğretim programlarında farklı öğrenim seviyelerinde olmasından kaynaklanabilir. Harflerin anlamı ile ilgili sınıflar arası değişimleri incelediğimizde, 5.sınıf öğrencilerinin geneli harflerin anlamı ile ilgili olarak aritmetik özellik göstermişlerdir. Bu öğrencilerden dört öğrenci aritmetikteki harflerin özelliklerini gösterirken, birer öğrenci de cebir öncesindeki ve cebirdeki harflerin özelliklerini göstermiştir. Aritmetik özellik gösteren öğrencilerin çoğunluğu harfleri somut bir nesnenin (objenin) kısaltılmışı veya kendisi olarak düşünmekle beraber, bir öğrenci harfleri ölçüm etiketleri olarak düşünmüş ve aynı öğrenci ek mülakat sorularında harflerin basamak değerlerindeki rakamlardan başka sayı değeri alamayacağını ifade etmiştir. Yapılan çalışmalarda öğrencilerin harfleri cebirden farklı olarak ölçüm etiketleri olarak ve sadece rakamlardan oluştuğunu düşündüklerini göstermiştir (Kieran, 1990; Perso, 1992; Stacey & MacGregor, 1997; Van Amerom, 2002). Yine 5.sınıftan bir öğrenci (Ö3<sub>5</sub>) harflerin yerine sayısal bir değer bulma zorunluluğundan, harflerin alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal bir konum belirttiğini düşünmüştür. Bunun yanında hem harfleri eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu hem de harfleri genelleştirilmiş sayılar, bilinmeyenler ve değişkenler olarak düşünen 5.sınıf öğrencilerinin sayısı diğer öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin sayısından oldukça azdır. Örneğin 5.sınıf öğrencilerinden Ö6<sub>5</sub> öğrencisi “ $3n + 1$ ” ve “ $3n+1= 13$ ” ifadelerinin her ikisindeki “n” harfini bilinmeyen olarak düşünmüş ve birçok değer alabileceğini ifade etmiştir. Fakat öğrencinin “n” harfinin birçok değer alabilir yorumu “ $3n + 1$ ” ifadesi için doğru olmakla birlikte, “ $3n + 1= 13$ ” denklemi için yanlıştır. İlk durumdaki “n” harfi bilinmeyenden ziyade değişken olarak kullanılan bir harftir. Bu iki sonuçtan anlaşılacağı üzere öğrenci bilinmeyen ve değişken kavramları arasındaki farkı algılayamadıkları, bu kavramları birbirlerinin yerine kullandıkları anlaşılmaktadır. Nitekim araştırmacılar harflerle ilgili öğrenci

algılamalarını sınıflarken, “ $3x + 1$ ” gibi bir ifadedeki  $x$ 'in değişken ve çoklu değer temsil ettiğini, “ $3x + 1=13$ ” gibi bir ifadedeki  $x$ 'in ise bilinmeyi ve tek bir değeri temsil ettiğini belirtmişlerdir (Kuchemann, 1981; Philipp, 1999; Van Amerom, 2002). Arzarello, Bazzini ve Chiappini (1993) bunun en önemli sebeplerinden birinin geleneksel cebir öğretimi olduğunu ifade etmektedir. Ona göre, geleneksel cebir öğretimi bu farklılığın ortaya çıkmasını engellemektedir. Ayrıca mülakat esnasındaki ek soruların birinde Ö65 öğrencisi genel olarak bilinmeyenleri soru metnindeki terimlerden seçmiş ve böylece hangi harfin kime ait olduğunu anlamının daha kolay olduğunu ifade etmiştir. Fakat öğrencinin bu sorudaki bilinmeyen kavramı ile ilgili bilgisi yine çok kavramsal değildir. Çünkü öğrenci soru metnindeki terimlerden, ölçüm etiketlerinden ve verilen harflerden istenilen nesnenin ismini ayırt edememiştir. Bu da öğrencinin hata yapmasına neden olmuştur. Bu ise günlük konuşma dilinde nesnelere, ölçümler, miktarlar veya nicelikler arasındaki ayrımın pek fazla yapılmamasından kaynaklanabilir (MacGregor & Stacey, 1997a). Harflerin anlama ile ilgili algılamalarda 6.sınıf öğrencilerinin 5.sınıf öğrencilerine göre daha yeterli olduğu görülmektedir. Fakat 5 ile 6.sınıf öğrencileri arasında iki önemli değişim göze çarpmaktadır: 6.sınıf öğrencileri 5.sınıf öğrencilerine göre harflerin eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu olduğu düşüncesini algılamada daha başarılılardır. Bu ise 6.sınıf öğrencilerinin cebirsel harflerin özelliklerine doğru ilk adımları gerçekleştirmeye başladıklarının göstergesidir. İkinci olarak 6.sınıf öğrencileri harfleri daha çok informal olarak- yani soru metnindeki nesnelere ilk iki veya daha fazla harfini alma- kullanmaktadırlar. Aritmetikteki harflerin özelliklerini gösteren 6.sınıf öğrencilerinden iki öğrenci harfleri somut bir nesnenin kısaltılmışı olarak düşünmüşlerdir. Daha sonra bu öğrencilerden biri bu düşüncesinden dolayı birçok araştırmacı tarafından ifade edilen “sayısal gönderge eksikliği (lack of numerical referent)” sorunu ile karşı karşıya kalmıştır (Booth, 1988; Usiskin, 1988). Bu öğrenci “ $6e + 7e$ ” ifadesinin cevabının 13 elmaya eşit olduğunu belirtmiştir. Harflerin bu tür kullanımları genel olarak 5 ve 6.sınıf öğrencileri arasında daha sıklıkla görülmeyle beraber, 7 ve 8.sınıf öğrencileri arasında daha az görülmektedir. Bu ise 5 ve 6.sınıf seviyedeki öğrencilerin daha sonraki cebir öğretimi için gerekli olan harfler ile onların referansları (kastedilen nesne veya kavram) arasındaki farklılığı ayırt edememesinden kaynaklanmaktadır. Bu zorluk özellikle problem çözme sürecinde cebirsel çözüm stratejilerini kullanımı ile ilgili büyük zorluklara yol açmaktadır (Clement, 1982; Kieran, 1992; MacGregor & Stacey, 1997a; Stacey & MacGregor, 2000). Ayrıca yazılı sınav kâğıtları ve klinik mülakat cevapları incelendiğinde bazı öğrencilerin, sayılar yerine değerler olarak sayısal bir sonuç bulma eğiliminde olduğu görülmektedir. Bazı öğrenciler “ $3n + 1$ ” ifadesindeki “ $n$ ” harfi yerine gelişigüzel bir sayı değeri almış ve sayısal bir sonuç bulmuşlardır. Öğrencilerin bu davranışları yine aritmetik geçmişle ilgilidir. Çünkü öğrenciler harflerin varlığını önemsemektedirler. Harflerin anlamı ile ilgili 5 ve 6.sınıf öğrencilerine göre daha iyi algılamalara sahip olan 7.sınıf öğrencilerinde bir denge söz konusudur. Fakat 7.sınıf öğrencileri cebirsel harflerin özelliklerini daha çok

göstermişlerdir. Bu öğrenim seviyesinde harfleri ölçüm etiketleri olarak düşünen öğrenci olmamakla beraber, somut bir objenin kısaltılmışı veya kendisi olarak düşünen öğrenciler mevcuttur. Bu sonuç Cooper, Williams ve Baturo (1999) elli bir 7.sınıf öğrenci ile yürüttüğü çalışmanın sonuçlarıyla tutarlıdır. Bazı 7.sınıf öğrencileri ise eş zamanlı olarak “n” harfini bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerden Ö15<sub>7</sub> öğrencisinin, “Ali’nin bilyelerinin sayısının üç katı Veli’nin bilyelerinin sayısına eşittir” ifadesini “ $3.a = v$  (Ali=a, Veli = v)” şeklinde yazması ve kendisine yöneltilen “Ali’yi 3 ile çarpıyorsun” ek sorusuna, “Yok yok öğretmenim, ben Ali’yi 3 ile çarpıyorum, Ali’nin bilyelerini üç ile çarpıyorum” şeklinde cevap vermesi bu öğrencinin harfleri eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu olarak düşünmesi ile ilgilidir. Bu öğrenci soru metnindeki objelerin yerine kısaltmalar kullanmış ve bu kısaltmaların o kişiye ait çokluğu temsil ettiğini de belirtmiştir. Bununla birlikte aynı öğrenci ek soruların birinde de aynı düşüncesini tekrarlamış ve “ $3n + 1 = 13$ ” şeklinde verilen denklemi cebir öncesi çözüm stratejisi olan “ters-işlem algoritmasından” yararlanarak çözmüştür. Burada öğrencinin harflerle ilgili düşüncesi ve çözüm süreci bu öğrencinin cebir öncesi özellik gösterdiğini kanıtlamaktadır. Bununla birlikte 7.sınıfın iyi düzeydeki bir öğrencisi “ $3n + 1$ ” ifadesindeki “n” harfinin bilinmeyen ve çoklu değere sahip olduğunu belirtmiştir. Bu öğrenci de harflerin bilinmeyen olarak kullanımı ile değişken olarak kullanımı arasındaki farkı tam olarak bilmemektedir. Ayrıca öğrenci bilinmeyenler için daha çok “x” harfinin kullanıldığını belirtmiş, soru ve ek sorularda verilen harflerin yerine “x veya y” harflerini alarak sorulara çözüm üretmeye çalışmıştır. Bu ise öğrencinin cebirdeki harfli ifadeleri (özellikle bilinmeyen veya değişken) x veya y harfi ile özdeşleştirdiğini göstermektedir. Kieran’a (1990) göre ilköğretim sınıflarında tek bir harfin kullanıldığı farklı yollarla öğrenmelerin temelleri atıldığından öğrencilerin algılamaları karışır ve bu da öğrencileri yanlış anlamalara sürükler. Ayrıca 5 ile 6.sınıf öğrencileri gibi 7.sınıf öğrencilerinin de büyük bir çoğunluğu harfleri bilinmeyen olarak yorumlama eğiliminde olduğu görülmektedir. Öğrencilerin harfleri bilinmeyen olarak yorumlanma eğilimlerinin, cebirsel ifadeleri bir bütün olarak (nesne) görmeleri ile ilgili zorluklara katkıda bulunduğu dair araştırma sonuçları literatürde yer almaktadır (Kiaren, 1992; Kinzel, 2000). 8.sınıf öğrencileri diğer üç öğrenim seviyelerindeki öğrencilere göre harflerle ilgili algılamaları çok daha üst düzeydedir. 8.sınıf öğrencilerinden bir öğrenci ise tıpkı diğer üç sınıftaki benzer düşünceyi gösteren öğrenciler gibi, harfleri eş zamanlı olarak bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin miktarı olarak algılamıştır. Fakat bu öğrenci daha çok harflerin yerine sayısal değerler olarak işlemleri yapma eğilimindedir. Ayrıca 8.sınıf öğrencilerinden iyi düzeydeki Ö24<sub>8</sub> ise harfleri bilinmeyenler, genelleştirilmiş sayılar ve değişkenler olarak düşünmüş ve başarılı cevaplar vermiştir. Bu öğrenci, bu üç durumda da her harfin kullanılabilceğini ifade etmiş ve soruların çözümünde ağırlıklı olarak alışkanlıktan dolayı “x ve y” harflerini daha çok kullandığını belirtmiştir. 5 ve 6.sınıf öğrencileri genel olarak, 7.sınıf öğrencileri ise kısmen

bilinmeyenleri göstermek için içeriğe bağlı kelimelerin baş harflerini kullanmışken, 8.sınıf öğrencileri genel olarak “x ve y” harflerinden yararlanmışlardır.

## 5. Öneriler

Araştırma, farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerin genel olarak eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak algıladıklarını ve birçok öğrencinin de eşittir işaretinin işlemsel anlamından ilişkisel anlamına geçişte yetersiz olduklarını ortaya koymuştur. Bu nedenle öğrencilerin erken yaşlarda eşittir işaretinin farklı kullanımları ve anlamları ile karşılaştırılması hem aritmetikten cebire geçiş hem de denklem çözme süreci için önemlidir. Bunun yanında ilkokul ve ortaokul yıllarının başlangıç dönemlerinde öğretmenlerin eşittir işaretinin ilişkisel anlamını geliştirici etkinliklere yer vermesi gerekmektedir. Ayrıca çalışma sonuçları 5-8.sınıf öğrencilerinin harflerin farklı kullanımları ve anlamları ile ilgili algılamalarının az değiştiğini ve geliştiğini, bunun ise öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerini olumsuz yönde etkilediğini göstermiştir. Ayrıca çalışma ile farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin harflerin kullanımı ve anlamı ile ilgili birçok zorluk yaşadıkları görülmüştür. Bu nedenle öğretmenler harflerin farklı kullanımlarının olduğunu ve buldukları duruma göre farklı anlamlar kazanabileceğini yani bir harfin yeri geldiğinde sabit bir sayı yeri geldiğinde ise değişken olduğunu öğrencilerine göstermelidirler.

## Kaynakça

- Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online*, 10(3), 812-823.
- Akkan, Y., Öztürk, M. ve Akkan, P. (2014). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar üzerine bir çalışma. 11. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiri Özetleri Kitapçığı* içinde (s. 1167-1168). Adana: Çukurova Üniversitesi
- Alexandrou-Leonidou, V. & Philippou, G. (2007). Elementary school students' understanding and use of the equal sign. *Paper presented at CERME 5 Working Group 6*, 825–834, Lanarka, Cyprus.
- Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1993). Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework. *Proceedings PME 17*(1), 138-145.
- Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Eds.). *The Ideas of Algebra*, K-12, 20–32. Reston, VA: NCTM.

- Carpenter, T. P. & Levi, L.(2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.* www.wcer.wisc.edu/ncisla/publications/index.html, 11 Aralık 2008
- Chalouh, L. & Hersovics, N. (1988). *Teaching algebra expressions in a meaningfulway, in the ideas of algebra, K-12: Yearbook.* 33-42, A.F. Coxford (Ed.), NCTM.
- ClementJ. (1982).Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 16-30.
- Cooper, T. J., Boulton-Lewis, G., Athew, B., Willss, L. & Mutch, S. (1997). The transition arithmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable. *International Group for the Psychology of Math. Education, 21,* 2, 89-96.
- Cooper, T. J., Williams, A. M. & Baturo, A. R. (1999a). Equals, expressions, equations, and the meaning of variable: A teaching experiment. *In Making the difference:Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide, South Australia: MERGA.*
- Cooper, T. J., Baturo, A. R. & Williams, A. M. (1999b). Unknowns, patterns, relationships, concrete materials and teaching the meaning of the algebraic expressions, 3 x. In E. B. Ogena & E. F. Golla (Eds.), *Mathematics for the 21st century, Proceedings of the 8th South East Asian Conference on Mathematics Education, 127-136.* Manila, Philippines.
- Çepni, S. (2007). *Arasturma ve proje çalışmalarına giriş,* Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Dede, Y. (2003). *ARCS motivasyon modeli ve Öğe Gösterim Teorisi'ne (Component Display Theory) dayalı yaklaşımın öğrencilerin değişken kavramını öğrenme düzeylerine ve motivasyonlarına etkisi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10,* Portsmouth, NH: Heinemann.
- English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Filloy, E. & Rojana, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra, *For The Learning of Mathematics, 9(2),* 19 - 25.
- Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task-based interviews, In A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics mathematics education,* NCTM.
- Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S.Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra, 60-92.* Reston, VA: NCTM, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hersovics, N. & Linchevski, L., 1994. A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics, 27(1),* 59-78
- Hunting, R.P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice, *Journal of Mathematical Behaviour, 16(2),* 145-165.

- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 33-56. Reston, VA: NCTM.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 96-112. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan.
- Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, 119-139. New York: Macmillan.
- Kinzel, M. T. (2000). *Characterizing ways of thinking that underlie college students interpretation and use of algebraic notation*. Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, USA.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N.M., Weinberg, A. & Stephens, A.C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.
- Kuchemann, D.: 1981, 'Algebra', in K. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, (pp. 102-119) London: John Murray.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra, *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.
- Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 38-65.
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173-196.
- Lodholz, R. D. (1993). The transition from arithmetic to algebra. E.L. Edwards (Ed.) *Algebra for everyone*, 24-33. Reston, VA: NCTM.
- Macgregor, M. & Stacey, K. (1997a). Students' understanding of algebraic notation: 11-15, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Macgregor, M. & Stacey, K. (1997b). Ideas about symbolism that students bring to algebra, *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- MEB (2009). *İlköğretim matematik programı*, www.meb.gov.tr. 7 Mart 2009.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM



- Perso, T. (1992). *Using diagnostic teaching to overcome misconceptions in algebra*, The Mathematical Association of Western Australia.
- Philipp, R. A. (1999). The many use of algebraic variables, In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades 9-12: Readings from NCTM's school based journals and other publications, 150-156*, Reston, VA: NCTM.
- Saenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third grader's interpretation of equality and the equals sign, *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153-187.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 1-36.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). the gains and the pitfalls of reification-the case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191-228.
- Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra, *Mathematics in the Middle School*, 2, 253 – 260.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems, *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(2), 149-167.
- Swadener, M. & Soedjadi, R. (1988). Values, mathematics education and the task of developing pupils' personalities: An Indonesian perspective, *Educational StudiesIn Mathematics*, 19(2), 193-208.
- Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking, Canadian journal of science, 1, 80-104, *Mathematics and Technology Education*.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In B. Moses (Eds.). *Algebraic Thinking Grades K-12, 7-14*. Reston, VA: NCTM.
- Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Unpublished doctoral dissertation. University of Utrecht, The Netherlands.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, October, 474-478.
- Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM.
- Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In P. S. Wilson, (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics, 117-139*, New York: Macmillan Publishing Company.
- Williams, A. M. & Cooper, T. J. (2001). Moving from arithmetic to algebra under the time pressures of real classrooms. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent, & John Vincent (Eds.),

*Proceedings of the 12<sup>th</sup> ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 665-662. Melbourne: University of Melbourne.

Yaman, H., Toluk, Z. ve Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşittir işaretini nasıl algılamaktadırlar? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24,142-151.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*, Remzi Kitapevi, İstanbul. 373.

Zaskıs, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions, *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 429-439.

### Extended Abstract

In order to learn algebra, which has an important place at every stage of daily life and mathematics, at a desired level by the students, the transition from arithmetic to algebra, which ensures the connection between arithmetic and algebraic knowledge, is important. In order to run this transition in the best way, educational programs that are prepared with extreme care are needed. Because, no matter how good the developed educational program is, determining the problems during application process is important. This situation makes the issue of examining the use of the symbols and the meaning of letters, which are common subjects at different educational levels in the transition from arithmetic to algebra in current mathematical curriculum. For this reason, the aim of the study is “examining the transition process of secondary school students (5-8<sup>th</sup> Graders) from arithmetic to algebra based on the topics of using the symbols and interpreting the meaning of the letters”.

The “cross-sectional” study design, which is one of the developmental research methods, has been used in this study to investigate the transition process of the students from different educational levels from arithmetic to algebra. In cross-sectional studies, simultaneous studies may be conducted that might be identical to the sampling in its lifetime instead of revealing the development level of the same topic with a sampling, and thus, the study may be completed in the shortest time. The mixed methods, which include both quantitative and qualitative methods, have been used in this study to collect the data. Mixed methods decrease the disadvantageous sides of both methods to the least level, and allow collecting the data with the best method. While written tests, which consist of open-ended questions, are used in collecting quantitative data; the clinical interview questions, which are prepared in addition to these questions, are used to collect the qualitative data of the study. However, the emphasis is on the qualitative data in this study, because one of the important problems in this study is related with the viewpoints of secondary school students. In this transition process, reaching the wealth in the viewpoints of secondary school students will be possible with clinical interview method, which is one of the qualitative study methods. The basic purpose of this interview method is revealing the concepts of the individuals and the relation between these concepts, and determining the personal cognitive skills and discovers the wealth in the viewpoints. For this study,

which aims to reveal what secondary school students think during the process, how they think, and why they think so, it has been determined that the clinical interview method is the best method with its aforementioned properties. The sampling of this study consists of 5<sup>th</sup> and 8<sup>th</sup> Grade students studying at a secondary school in the city of Trabzon. The written tests consisting of open-ended questions have been conducted to the entire students except for 24 students. These 24 students were selected for clinical interviews were selected by caring for their success levels with the guidance of Mathematics, Turkish, Guidance teachers, and the school managers, to represent the similar and different classifications. In addition, the students who could express their viewpoints clearly and those who volunteered to participate to the study were selected. In the first stage of the study, mathematics teachers were interviewed in the direction of the study aim, the acquisitions in the educational program were examined, and the classes and subjects (the use of symbols, and the meaning of letters) were defined. By making use of the studies in the literature, characterization tables were prepared to investigate the transition period from arithmetic to algebra to constitute the backbone of the study. These tables included the characteristics of arithmetic, pre-algebra and algebra. Then, the open-ended questions and clinical interview question were prepared. The issue of whether the questions prepared comply with the aim of the study and whether they represent the field to measure are defined according to “specialist’s viewpoints”. In this context, the viewpoints of two mathematics instructors and two mathematics teachers were received. The language, coverage and level validity of the written test questions that consisted of open-ended questions and the clinical interview questions has been ensured. For the reliability of the data collection tools, half of the student papers were taken randomly and the author of the study and another researcher made encodings. At the end of the encodings, 79% conformity level was obtained between the two researchers. The data collection tools consist of two questions to which the students at different educational levels may produce solutions. These questions are prepared with data collection tools, and the support of the literature and teachers. The data obtained have been assessed with the characterization tables, which were prepared with the support of the literature and which included the properties of arithmetic, pre-algebra, and algebra. In addition, the solution for the first and second questions, which are related with the use of symbols and the meaning of the letters, have been assessed according to four categories (empty-others, operational, relational, operational-relational), (empty-others, as an object, as the value of any number, as multiple values), respectively. The nicknames like “S1<sub>5</sub>, S2<sub>5</sub>, ..., S23<sub>8</sub>, S24<sub>8</sub>” have been used in the section of the study where the qualitative data of the study to define the students.

Based on the findings, it has been observed that the secondary school students at different educational levels generally perceive the symbol “equals” as an operational symbol. Here, the fact that many students perceive the symbol “equals” as an operational symbol is a worrying result. While the percentage of the 5, 6 and

7. sınıf öğrencileri için eşitlik işareti sadece işlevsel bir sembol olarak algılanan öğrencilerin oranı %51'den fazla, 8. sınıflar için %41'dir. Öğrencilerin eşitlik işareti nasıl algıladıkları, işlevsel bir sembol olarak algıladıkları oranları %7 ile %19 arasında, işlevsel ve ilişkisel bir sembol olarak algıladıkları oranları %11, %15, %20 ve %26, sırasıyla. Gerçekten, 24 öğrencinin yarısı klinik görüşmelerde, eşitlik işareti sadece bir uyarıcı olarak veya işlevsel bir sembol olarak algıladıkları sonucu herhangi bir hesaplama için. Başka deyişle, öğrencilerin yarısı işlevsel tarafını eşitlik işareti için algıladı. %21 tüm öğrenciler işlevsel bir sembol olarak algıladı, soldan sağa veya sağdan sola, bu pre-alegbraik algıdır; ve eşitlik işareti için simetri özelliğini kullanırlar. Diğer taraftan, farklı eğitim seviyelerindeki öğrencilerin %29'u ilişkisel tarafını algıladı, bu algebral algıdır.

5-8. sınıf öğrencileri arasında benzer farklılıkların olduğu görülmüştür. 5. sınıf öğrencilerinin, harflerin birden fazla değeri temsil ettiğini söyleyenlerin oranı %11, 8. sınıflar için %61, bu oran oldukça yüksektir. Bu sonuç, öğrencilerin,  $3n + 1$  ifadesindeki "n" harfinin birden fazla değeri temsil ettiğini söyleyenlerin oranının sınıf seviyesi arttıkça arttığını göstermektedir. Aksine, 5. sınıfların, harfin bir nesnenin etiketi olduğunu söyleyenlerin oranı %25, 8. sınıflar için %8, bu oran oldukça düşüktür. Bu sonuç, sınıf seviyesi arttıkça, öğrencilerin harfleri nesnelerin tabloları olarak algıladıklarını göstermektedir. Benzer şekilde, klinik görüşmelerde elde edilen sonuçlar yazılı sınav sonuçlarıyla uyumludur. Bu iki sonuç, öğrencilerin matematiksel deneyimleri ve bilişsel gelişimleri ile ilişkilendirilebilir. Çünkü, algebral ifadelerde kullanılan harfler, 6. sınıftan itibaren daha sık kullanılmaya başlanmaktadır. Harfler, özellikle ortaokulun son sınıfında en sık kullanılmaktadır. Gerçekten, başka bir sonuç da sınıf seviyesi arttıkça, öğrencilerin matematiksel deneyimleri artmaktadır, bu da öğrencilerin, "n" harfini söyleyenlerin oranının veya anlamsız cevaplar söyleyenlerin oranının eğitim seviyesi arttıkça azaldığını göstermektedir. Önceki araştırmacılar, yaklaşık %27 oranında 6. sınıf öğrencilerinin "n" harfini söyleyenlerin oranının veya anlamsız cevaplar söyleyenlerin oranının %17 olduğunu bildirmişlerdir. Bu durumun nedeni, "değişken" kavramının ilk kez ortaokul müfredatında yer almasıdır.