Matematik Öğretmen Adaylarının Bölünebilme İspatlarını Yapma Süreçlerinin İncelenmesi

Bünyamin Şahin*

Makale Geliş Tarihi: 02/11/2016 *Makale Kabul Tarihi:23/11/2016*

Özet

Bu çalışma matematik öğretmen adaylarının bölünebilme konusundaki ispat yapabilme becerilerini incelemek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada karma araştırma yöntemlerinden açımlayıcı desen kullanılmıştır. Çalışma 2016-2017 akademik yılında Bayburt Üniversitesi'nde öğrenim gören son sınıf matematik öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Çalışmada veri toplama aracı olarak etkinlik kartları, gözlem formları ve sesli ispat düşünme protokolü tekniği kullanılmıştır. Etkinlik kartlarında öğretmen adaylarına önermeler verilerek ispat yapmaları istenmiştir. Çalışmada kullanılan önermeler, ispat aşamasında önceki teoremleri gerektirmeyen önermeler olarak seçilmiştir. Ayrıca kullanılan önermeler, içgörü gerektirmeyip belli bir sürecin sonucunda ispat yapılabilecek nitelikte seçilmiştir. Verilerin analizinde betimsel analiz ve içerik analizi kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda bazı öğretmen adaylarının bölünebilmenin tanımı kullanılarak yapılabilecek temel seviyedeki ispatlar için bile zorlandıkları hatta bazı öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde bile öğrenemediği gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Bölünebilme, ispat yapma süreci, öğretmen adayı*

Examination of Process of Proving on Divisibility of Mathematics Teacher Candidates

Abstract

This study made to examine the process of the proving ability of mathematics teacher candidates on divisibility subject. In the study exploratory method was used which is one of the mixed research methods. The study was carried out with 29 last-grade students studying in the department of elementary mathematics of Bayburt University during the spring semester of 2016-17 academic year. In the data collection process task cards, observation forms and think aloud protocol methods were used. In the task cards some propositions were asked to students and wanted them proving these. The prepositions were selected which are not needed previous theorems during proof. Furthermore, used prepositions are selected to prove end of a process instead of proving by insight. In the analyzing process of the study descriptive analysis and content analysis were used. At the end of the study it was seen that some of the mathematics teacher candidates was forced to prove elementary prepositions by using definition of divisibility. Moreover, it was seen that some of the mathematics teacher candidates didn't learn on conceptual level.

Keywords: *Divisibility, process of proving, teacher candidate*

---

* Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Bayburt, Türkiye, bsahin@bayburt.edu.tr

1. Giriş

İspat bir şeyin neden doğru olduğunu açıklamaktır (Rotman, 2002; Hanna, 1989). İspat ve ispat yapma tüm matematiğin merkezidir (Jones & Rodd, 2001). İspat öğrencilerde saf akıl yürütme gücünün yansıtılabileceği önemli bir etkinliktir. İspat matematiğin önemli bir parçasıdır ve elbette öğrencilerle ispat fonksiyonu önemi ve sınırlılıklarına işaret edilerek tartışılmalıdır (Şimşek, Şimşek & Dündar, 2013).

İspat eski zamanlardan beri matematiksel pratiğin temel bileşeni olarak düşünülmüştür. Çok önceden matematik müfredatına girmiş ve matematik ve geometri öğretiminde önemli bir rol üstlenmiştir (Lee, 2002). Bu bağlamda 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından ortaokul matematik programında yapılan güncelleme kapsamında öğrencilere akıl yürütme (muhakeme) becerisinin kazandırılması gerektiği vurgulanmıştır.

Matematiksel sonuçlar ancak dikkatli bir şekilde yapılan ispattan sonra geçerli olabilir. Bu nedenle muhakeme becerisi öğrencilerde geliştirilmelidir. Eğer bu yapılamazsa matematik basit bir işlem dizisi olmaktan öteye gidemez (Altıparmak & Öziş, 2005; Ross, 1998). Ayrıca öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine öğrenebilmesi muhakeme becerilerinin geliştirilmesiyle mümkün olur. Öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için de matematiksel kavramların öğretiminde uygulamadan önce matematiksel ispatlarının ayrıntılı bir şekilde yapılması faydalı olacaktır (Güler & Dikici, 2012).

İspat okuma ve yazma üniversite matematiğinin temel ayırt edici özelliklerinden biridir (Almedia, 2000). Lisans öğrencileri için önceki deneyimleri sınırlı olduğunda ispat yapma oldukça zor olacaktır. Matematiksel muhakeme okul yılları boyunca öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin bir parçası olursa, öğrenciler bu düşünce tarzına alışmış olur (Jones & Rodd, 2001).

Matematiksel ispatın bu kadar önemli olmasına ve eğitiminde üzerinde durulmasına rağmen öğrenciler ispat yapmada güçlükler yaşamaktadır (Marrades & Gutierrez, 2001). İspat yapma sürecinde bu sıkıntılar yaşanırken bu problemin çözümüne katkı sağlamak amacıyla matematik öğretmen adaylarının değişik konuklardaki ispat yapabilme yeteneklerini analiz etmek önemli olacaktır.

Matematikte ispatın önemi ve rolündeki artışla değişik yaş gruplarının zihinsel ve gelişimsel sürecinin izlenmesi matematik eğitiminde araştırma konusu olmaya başlamıştır (Şengül & Güner, 2013). Ayrıca matematik öğretmenliği bölümlerinde matematiksel ispat yapabilme becerisi kazandırmanın önemli bir amaç olduğu anlaşılmaktadır (Stylianou, Blanton & Rotou, 2015).

Alan yazın incelendiğinde matematiksel ispata yönelik yapılan çalışmaların daha çok ispata yönelik görüşleri incelemeye ve ispat sürecini incelemeye yönelik yapılan nitel çalışmalar olduğu görülmektedir (Öztürk, Akkan, Kaleli-Yılmaz, & Kaplan, 2015). Nitel çalışmalar doğası gereği analitik genellemeye imkan vermektedir. Ayrıca süreç incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda genellikle betimsel analiz yapıldığı içerik analizinin az sayıda çalışmada var olduğu belirlenmiştir (Güler & Dikici, 2012; Güler & Ekmekci, 2016). Bu çalışma karma araştırma yöntemi kullanılarak yapılacak ve içerik analizi kullanılacak olduğundan çalışma diğer çalışmalarda var olan sınırlılıkları biraz olsun kaldıracaktır.

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü son sınıfında okumakta olan öğretmen adaylarının Elementer Sayı Kuramı dersi kapsamında gördükleri bölünebilme konusundaki değişik önermeleri ispatlayabilme süreçlerinin incelenmesi amacıyla yapılmıştır. Çalışmada "son sınıf matematik öğretmen adayları bölünebilme ispatı yapma sürecinde ne tür beceriler sergilemektedirler?" problemine yanıt aranmıştır.

2. Yöntem

2.1. Araştırma Modeli

Çalışmada karma araştırma yöntemlerinden açımlayıcı desen kullanılmıştır. Açımlayıcı desen nicel araştırmanın ardından nitel verilerin toplanarak analiz edilmesine dayalı süreçtir (Creswell & Plano Clark, 2014). Bu çalışmada nicel veriler toplandıktan sonra elde edilen veriler doğrultusunda nitel veriler toplandığından bu desen seçilmiştir.

2.2. Katılımcılar

Araştırma 2016-2017 eğitim öğretim yılı güz döneminde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 29 son sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür.

Katılımcılar 15 kişi kız, 14 kişi erkek olup ortalama yaş 22'dir. Araştırmada katılımcıların belirlenmesi aşamasında son sınıfta öğrenim görmekte olan öğrenciler çalışmanın amacı hakkında bilgilendirilerek gönüllülük esas alınmıştır. Ayrıca katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemleri içerisinde yer alan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Elementer Sayı Kuramı dersini almakta olmak katılımcıların seçiminde ölçüt olarak belirlenmiştir. Çünkü bu ders kapsamında öğrencilerin tamsayıların bölünebilme özellikleri ile ilgili ispat yapma hakkında yeterli bilgiye sahip olmaları sağlanmaktadır. Araştırmaya katılan her bir öğrenciye isimlerinin gizli kalması için Ö1, Ö2,…,Ö29 şeklinde kod isimler verilmiştir.

2.3. Veri toplama aracı ve analizi

Araştırmada veri toplama aracı olarak etkinlik kartları, gözlem formları ve sesli düşünme protokolü tekniği kullanılmıştır. Etkinlik kartlarında kullanılan önermelerin özellikle ilköğretim matematik öğretmenlerinin Elementer Sayı Kuramı dersi kapsamında öğrendikleri bölünebilme ve özelliklerini kullanarak yapılan önermelerden oluşmasına dikkat edilmiştir. Bu doğrultuda etkinlik kartlarında matematik öğretmen adaylarına bölünebilmenin tanımını kullanarak yapılabilen önermelerden başlanarak zorluk derecesi giderek artan dört adet önerme soru olarak hazırlanmıştır. Bu şekilde oluşturulan etkinlik kartlarının öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olup olmadığını tespit edebilmek için hazırlanan etkinlik kartları matematik eğitimi alanında 3 uzman tarafından incelenmiştir. Son olarak uzman görüşleri doğrultusunda gözden geçirilen önermeler kullanılarak etkinlik kartlarına son şekli verilmiştir.

Araştırmanın veri toplama süreci iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk olarak ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 29 son sınıf öğrencisine hazırlanan dört sorudan oluşan etkinlik kartları bir ders saati süresinde uygulanmıştır. Daha sonra etkinlik kartlarında kullanılan soruların ispatları doğrultusunda verdikleri yanıtları güçlü, orta ve zayıf olarak sınıflandırılan 6 öğrenci ile klinik mülakat tekniği kullanılarak yüz yüze görüşmeler yapılmıştır. Üst, orta ve alt sınıftan birer kız ve birer erkek öğrenci gönüllülük şartıyla seçilmiştir. Seçilen altı öğrenciye ilk aşamada kullanılan dört sorudan iki tanesi klinik mülakat tekniği ile yöneltilmiştir. Yapılan mülakatlar öğrencilerin izinleri alınarak ses kayıt cihazı ile kayıt edilmiştir. Son olarak mülakatlardaki ses kayıtları yazıya dökülerek verilerin analizine başlanmıştır. Öğrencilere mülakat esnasında sorulan sorular aşağıda gösterilmiştir.

Soru 1. a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.

Soru 2. Ardışık dört tamsayının 24 ile bölünebildiğini gösteriniz.

Araştırmada elde edilen verilerin analizi sürecinde ilk olarak öğrencilerin önermelere verdikleri yanıtlar doğru, eksik ve yanlış kategorilerine göre analiz edilmiştir. Bu sorulara seçilen altı öğrencinin verdiği cevaplar incelenirse ilk soruyu genel olarak altı öğrencinin de doğru çözdüğü anlaşılmaktadır. İkinci soruya ise sadece iki öğrencinin doğru cevap verdiği anlaşılmaktadır. Birinci soru bölünebilmenin tanımı ve birbiri cinsinden yazabilme gibi temel özellikler barındırırken ikinci sorunun bölme algoritması ve ilave bazı kazanımları barındırdığı görülmektedir. Yani ikinci sorunun daha karmaşık bir soru olduğu anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının önermelerin ispatlarında takip ettikleri stratejileri desteklemek için de klinik mülakat verileri betimsel olarak analiz edilerek doğrudan alıntılar şeklinde sunulmuştur. Düşük kategorisinde ele alınan kız öğrenciye Deniz, erkek öğrenciye Doğu; orta kategorisinde ele alınan kız öğrenciye Oya, erkek öğrenciye Orhan ve yüksek kategorisinde ele alınan kız öğrenciye Yeşim, erkek öğrenciye Yüksel takma isimleri verilerek mülakatlar sıralanacaktır.

3. Bulgular ve Yorum

Öğrencilerin mülakat esnasında yöneltilen sorulara verdiği cevaplar ve bu cevapların analiz edilmesi neticesinde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Doğu takma isimli öğrenciyle yapılan mülakat sonucunda elde edilen sonuçlar şunlardır.

1. Öğrencinin ispatı daha matematiksel bir formda göstermek isterken hedeften saptığı anlaşılmaktadır. Bu sonucun çıkarıldığı öğrenci mülakatı şu şekildedir.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösterebilir misin?

Doğu: $a \mid b$ ise $b = ak$ olduğunu bölünebilmenin tanımından söyleyebilirim. Daha sonra bu eşitliği $a + b = c$ denkleminde yerine yazarım.

$$a + ak = c$$
$$a(1 + k) = c$$

Daha sonra c yi a nın paydasına $(k + 1)$ i ise karşı tarafa bölü olarak atarım.

Yani

$$a / c = 1 / (k + 1)$$

olur.

M: Peki buradan a nın c yi böldüğünü söyleyebilir misin? a / c oranını bir basit kesir olarak yazmışsın?

Doğu: İspatı daha güzel ifade edebilmek için böyle yazdım.

2. Yaptığı ispattan emin olamadığı için iddianın doğruluğunu araştırmacıya sormuştur. Bu sonucun elde edildiği kısım mülakatta şöyle geçmiştir.

M: Bu yaptığın ispat sence geçerli oldu mu?

Doğu: Bu önerme doğru bir önerme mi?

M: $a(1 + k) = c$ eşitliğinde dikkat edersen c, a nın bir tamkatı olur. Bunun için ne söyleyebilirsin?

Doğu: Bölünebilmenin tanımından $a \mid c$ olduğunu söyleyebilirim.

3. İkinci sorunun doğruluğunu sezgisel olarak değerlendirir.

M: İkinci soruya geçebiliriz. Onu nasıl çözebilirsin?

Doğu: $a.(a + 1).(a + 2).(a + 3) \div 24$

olduğunu göstermemizi istiyor. Bence güzel soru ama bu soruyu çözebileceğimi düşünmüyorum.

M: Sence bu soruda iddia edilen şey doğru mudur?

Doğu: Bence doğrudur.

4. Özel örnekler yoluyla önermenin doğruluğuna karar verir. Mülakattaki kısım ise şu şekildedir.

M: İkinci soruda ardışık dört sayının çarpımın 24 ile bölünebildiğini nasıl gösterirsin?

Doğu: Örnek olarak 3, 4, 5, 6 sayılarını ele alalım. Çarpımları 360 olup 24 ile bölünür.

5. Tanım kümesinin farkındadır ama 0 ın bölünebilme durumuyla ilgili kafa karışıklığı yaşamaktadır. Bu kafa karışıklığını bilinen bölme çizelgesiyle bölme yaparak aştığı anlaşılmaktadır. Mülakatta ilgili kısım şu şekildedir.

M: Peki bütün tamsayılar için geçerli olur mu?

Doğu: 0 hariç geçerli olur.

M: Neden?

Doğu: Sayıların bir tanesi 0 olunca ifade bölünmez.

M: Sayıların bir tanesi 0 olsun sonuç 0 olur. Bu durumda ardışık dört sayının çarpımı 24 e bölünemez mi bir deneyelim? Yani 0 ı, 24 e bölelim.

Doğu: 0÷ 24=? 0 ın içinde 24, 0 kere kalan 0.

M: Demek ki 0, 24 e bölünebilirmiş. Değil mi?

Doğu: Evet.

Deniz takma isimli öğrencinin verdiği cevaplardan şu sonuçlar çıkarılabilir.

Birinci öğrencinin bölünebilme konusunu kavramsal düzeyde bile öğrenemediği anlaşılmaktadır. Öğrencinin verdiği cevaplar arasında ilgili kısım şöyledir.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.

Deniz: $a \mid b$ ise b, a ya kalanlı da bölünebilir kalan 0 da olabilir.

M: $a \mid b$ ise kalan sence ne olabilir?

Deniz: 0 da olabilir 0 dan farklı da olabilir.

M: Bölünebilmekten kasıt sence bu mudur?

Deniz: Kalanın 0 olduğunu kabul edelim. Buna göre $a \mid b$ ise $b = ak$ dır.

M: Önermenin hipotez kısmında bir de $a + b = c$ eşitliği var bunu nasıl kullanabilirsin?

Deniz: $a + b = c$ eşitliğinde b nin değerini yazarım.

$$a + ak = c$$

$$a(1 + k) = c \text{ olur.}$$

$(1 + k) = m$ alırsam $am = c$ olur ki buradan $a \mid c$ elde edilir.

M: İkinci soruyu nasıl çözersin?

Deniz: Bu soruyu çözemem.

İkinci öğrencinin $a \mid b$ ifadesindeki bölünebilmeden kastın tam bölünme olduğunu bilmediği anlaşılmaktadır. Birinci öğrencinin önermenin hipotezinde verilenleri adım adım veriye dönüştürdüğü gözlenmiştir. Öğrencinin parça parça veriye dönüştürdüğü verileri ipuçları gibi kullandığı anlaşılmaktadır. Orhan takma isimli öğrencinin verdiği cevaplardan elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.

Orhan: Bakar bakmaz $a \mid b$ ise $b = ak$ olacak şekilde bir k tamsayısının varlığını bölünebilmenin tanımından yazarım.

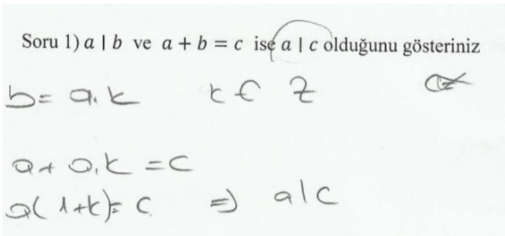
M: Sorunun tamamını okumadan parça parça mı ilerliyorsun?

Orhan: Evet. Daha sonra bu eşitliği $a + b = c$ denkleminde yerine yazarım.

$$a + ak = c$$

$$a(1+k)=c \ \Rightarrow a \mid c \text{ elde edilir.}$$

Öğrencinin etkinlik kartında bu kısım aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 1. Orhan takma isimli öğrencinin etkinlik kartındaki ilk soruya yaptığı çözüm

İkinci soruda olamayana ergi yöntemini kullanarak sonuca gitmek istediği bundan sonuç alamayınca özel örnekler üzerinden önermenin doğruluğuna karar verdiği anlaşılmaktadır. Mülakatta ilgili kısım şöyledir.

M: Ardışık dört sayının çarpımının 24 ile bölünebildiğini gösterebilir misin?

Orhan: Ben bu soruyu olmayana ergi yöntemi ile çözerim. $n, n+1, n+2, n+3$ ardışık tamsayılar olmak üzere $n.(n+1).(n+2).(n+3) \neq 24$ olduğunu kabul edelim.

M: Olmayana ergi metodunu kullanarak bu aşamada ne yapabilirsin?

Orhan: Bir çelişki yakalamam gerekiyor ama bulamadım.

M: Peki bu soruda geçen ifadenin doğru olduğunu nasıl kontrol edebilirsin?

Orhan: Ardışık dört sayı alırım. 1, 2, 3, 4 olarak bu sayıların çarpımı 24 olup iddia doğrudur.

Üçüncü öğrenci çok karşılaşılan ispat metotları dışında farklı bir yaklaşım gösterememiştir. Oya takma isimli öğrencinin verdiği cevaplar aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir. İlk soruda aksiyomatik ispat yapar. Bu sonucun çıkarıldığı mülakat parçası şu şekildedir.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a+b=c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.

Oya: $a \mid b$ ise $a+b=a+ak=c$

$= a(1+k)=c \Longrightarrow a \mid c$ olur.

Ardışık dört tamsayı ile ilgili soruda ispatın anahtar kavramını tespit edebilmiştir. Ardışık dört sayının çarpımını dördüncü derece bir polinoma dönüştürerek köklerini bulmak istemiş ama bu konudaki bilgi birikimi yeterli olamadığı için sonucu elde edememiştir. Polinomların rasyonel köklerini bulmak için bazı pratik yöntemler mevcut olduğundan bu da bir çözüm olabilirdi. Bununla ilgili kısım şöyledir.

M: Ardışık dört sayının çarpımının 24 ile bölünebildiğini gösterebilir misin?

Oya: Ardışık dört sayının ikisi çift ikisi tek olması lazım.

M: Bu bilgiyi sorunun çözümünde nasıl kullanabilirsin?

Oya: $a, a+1, a+2, a+3$ ardışık sayılarını çarparım.

M: Bu dört sayıyı çarparsan a nın dördüncü kuvveti olacak şekilde bir polinom elde edersin. Bu polinomun köklerini nasıl bulabileceğini biliyor musun?

Oya: Bilemiyorum.

Yüksel takma isimli öğrencinin mülakatı sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Öğrenci ilk soruda aksiyomatik ispat yapabilmiştir. Yaptığı ispatı ezberden yapıp yapmadığını anlamak için yöneltilen ek soruya sözel olarak gerekçe bulmakta zorlanmadığı, bulduğu sonucu matematiksel olarak da rahatlıkla ifade edebildiği gözlenmiştir. İlgili mülakat kısmı şu şekildedir.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösterebilir misin?

Yüksel: $a \mid b$ ise $b = ak$, $k \in Z$ vardır. Bu eşitlik kullanılarak,

$$a + b = c$$
$$a + ak = c$$
$$a(1 + k) = c \Rightarrow a \mid c \text{ elde edilir.}$$

M: Bu soruyu çok seri çözdün. Müsaadenle bölünebilmenin temel özelliklerinden bir tanesini daha ispatlamanı isteyebilir miyim?

Yüksel: Elbette.

M: $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid bx + cy$ olduğunu gösterebilir misin?

Yüksel: $a \mid b$ ise a, b nin bir x katını da böler yani $a \mid bx$ tir. Benzer olarak $a \mid c$ ise $a \mid cy$ yazılabilir. Yine a iki sayıyı bölüyorsa bunların lineer birleşimlerini de böler. Buradan $a \mid bx + cy$ olur.

M: Biraz fazla sözel oldu sanki bu ifade edilenleri matematiksel olarak gösterebilir misin?

Yüksel: $a \mid b$ ise $b = at$ olacak şekilde $t \in Z$ vardır.

$a \mid c$ ise $c = as$ olacak şekilde $s \in Z$ vardır.

$$bx = atx$$
$$cy = asy$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$bx + cy = atx + asy$$
$$= a(tx + sy) \Rightarrow a \mid bx + cy \text{ olur.}$$

İkinci öğrenci ikinci soruda analojik akıl yürütme yoluyla ispat yapabilmiştir. İkinci soruda sorulan önermenin daha basit bir şekliyle daha önceden karşılaştığını ve çözümünü bu sayede yapabildiğini belirmiştir. İspat yapma süreçlerinde önceden elde edilen tecrübelerin önemli bir avantaj sağladığı anlaşılmaktadır. Bu sonuçların gözlendiği mülakat kısmı şu şekildedir.

M: Ardışık dört sayının çarpımının 24 ile bölünebildiğini gösterebilir misin?

Yüksel: Bu sorunun bir benzerini bir yerde 'ardışık üç sayının çarpımı 6 ile bölünebilirdir' şeklinde görmüştüm.

M: Nasıl çözüldüğünü hatırlıyor musun?

Yüksel: Bölme algoritmasında bölen sayı 6 alınarak çözülmüştü.

M: Bu soruyu daha önce gördüğün soruya benzeterek nasıl çözersin bu durumda?

Yüksel: $a = bq + r$ bölme algoritmasında $b = 12$ alarak çözebilirim. Bu durumda

$a = 12q + r$ olmak üzere $0 \leq r < 12$ dir. Yani bir tamsayı $12q, \dots, 12q + 11$ gruplarının birinin içindedir. Bunların herbiri için önermenin doğruluğu gösterilebilir.

M: Bir tanesini örnek olarak gösterebilir misin?

Yüksel: Ardışık sayılar $n, n+1, n+2, n+3$ olsun. Bu durumda $n = 12q$ için

$$n.(n+1).(n+2).(n+3) = 12q\,.(12q\ +1).(12q\ +2).(12q\ +3)$$
$$= 24q\,.(12q\ +1).(6q\ +1).(12q\ +3)$$

olur ki buda istenen şeydir.

Yeşim takma isimli öğrencinin mülakatından elde edilen sonuçlar aşağıda gösterilmiştir. Öğrencinin ilk soruda aksiyomatik ispat yapabildiği anlaşılmaktadır. Yüksel takma isimli öğrenciye uygulandığı şekliyle öğrencinin ezberlediği şekliyle ispat yapıp yapmadığını kontrol etmek amacıyla ek bir soru daha kullanılmıştır. Bu sonucun elde edildiği mülakat kısmı şu şekildedir.

M: a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a \mid b$ ve $a + b = c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösterebilir misin?

Yeşim: $a \mid b$ ise $b = ak$ olacak şekilde $k \in Z$ vardır. Bu eşitlik $a + b = c$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$a + ak = c$$
$$a(1+k) = c \Rightarrow a \mid c \text{ elde edilir.}$$

M: Bu soruyu gayet seri bir şekilde çözdüğünden bölünebilmenin özelliklerinden bir tanesini ispatlamanı isteyebilir miyim?

Yeşim: Tabi ki.

M: $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid bx + cy$ olduğunu gösterebilir misin?

Yeşim: Hipotezden

$a \mid b$ ve $a \mid c$ olduğundan $b = ak$ ve $c = al$ olacak şekilde $k, l \in z$ vardır.

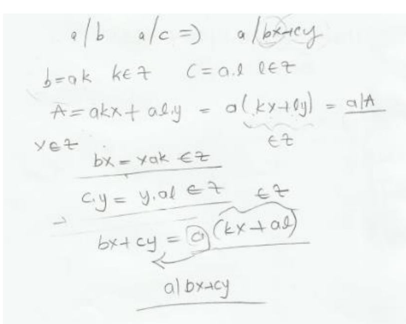
Buradan

$$bx = akx$$
$$cy = aly$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsam

$$bx + cy = akx + aly = a(kx + ly) \Longrightarrow a \mid bx + cy$$

olur. Öğrencinin etkinlik kartındaki bu kısım Şekil 2 de gösterilmiştir.



Şekil 2. Yeşim takma isimli öğrencinin etkinlik kartındaki ilgili kısım

Öğrenci ispatın anahtar kavramını belirleyebilmiştir. Ardışık dört sayının çapımı ile ilgili soru için Cebire Giriş dersinden öğrendiği kalan sınıflarıyla ilişkilendirdiği gözlenmiştir. Özel örneklerle önermenin doğruluğuna karar vermiştir. İkinci soruda mod 12 yi seçmesinde deneme yanılma yoluyla karar verdiği görülmüştür. Bölme algoritması için ilişkilendirme yapmıştır. Bölme algoritması ile modül gruplardaki denklik sınıfları arasındaki bağlantıyı sağlıklı bir biçimde kurduğu gözlenmiştir. Ardışık dört sayının çarpımı ile ilgili mülakat parçası aşağıdaki gibidir.

M: Ardışık dört sayının çarpımının 24 ile bölünebildiğini gösterebilir misin?

Yeşim: Bu soruda denklik sınıflarını kullanarak çözüm yapabilirim. Mod 12 ye göre kalanların oluşturduğu denklik sınıflarını kullanacağım.

M: Denklik sınıfları derken neyi kastettin?

Yeşim: Cebire Giriş derslerinden öğrendiğimiz modülo gruplardaki kalan sınıflarını kullanacağım.

M: Nasıl?

Yeşim: Tamsayıların mod 12 ye bölümünden kalanların oluşturduğu $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{11}$ den oluşan denklik sınıflarını alacağım.

M: Peki modu 12 olarak nasıl belirledin?

Yeşim: Ardışık dört sayı olarak 1, 2, 3, 4 ve 2, 3, 4, 5 aldığımda bu iki durumun ortak bölenlerinden biri 12 olduğu için 12 olarak aldım.

M: Peki buradan devam edelim.

Yeşim: Ardışık dört sayı $k, k+1, k+2, k+3$ olsun.

$\overline{0} = 12q,\ \overline{1} = 12q+1 \dots,\ \overline{11} = 12q+11$ olarak bölme algoritmasına göre denklik sınıfları elde edilir. Bunların hepsi için önermenin doğru olduğunu göstermeliyim.

M: Bir tanesi için göstermen yeterli olur. Diğerleri benzer yolla elde edilir.

Yeşim: $\overline{0}$ için göstereyim o zaman.

$$\begin{aligned} k.(k+1).(k+2).(k+3) &= (12q).(12q+1).(12q+2).(12q+3) \\ &= 24q(12q+1)(6q+1)(12q+3) \end{aligned}$$

olur. Bu da zaten ardışık dört sayının çarpımının 24 ile bölünebilmesi demektir.

Tablo 1.
İspat süreçlerinde öğrencilerin gösterdiği yeterlikler tablosu

Öğrenciler	Doğu		Deniz		Oya		Orhan		Yüksel		Yeşim	
Soru	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Aksiyomatik ispat yapar.	✓		✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓
İspatın anahtar kavramını tespit eder.	✓		✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Kavramsal düzeyde öğrenme sağlayabilmiştir.	✓				✓		✓		✓	✓	✓	✓
İddianın doğruluğunu araştırmacıya sorar.	✓											
İddianın doğruluğunu sezgisel olarak değerlendirir.		✓										
Özel örnekler yoluyla önermenin doğruluğuna karar verir.		✓						✓				✓

Tanım kümesinin farkındadır.		✓								✓		✓
Verilen bilgileri adım adım veriye dönüştürür.							✓	✓				
Analojik akıl yürütme yoluyla ispat yapar.										✓		
Farklı kavramlarla ilişki kurabilir.												✓

4.Tartışma Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının bölünebilme konusundaki bazı önermeler için ispat yapabilme süreçleri incelenmiştir. Bunun için Elementer Sayı Kuramı dersini almakta olan öğrencilere ilk aşamada dört önerme bir ders saatinde uygulanmıştır. Daha sonra ise seçilen altı öğrenciye iki soru esas alınarak mülakat yapılmıştır.

Bölünebilme konusu tamsayılar için çok önemli bir kriter olup sayıların teklik, çiftlik, asallık vb. bazı özellikleri bölünebilme özelliklerine göre belirlenmektedir. Öğretmen adaylarının bölünebilmenin tanımı kullanılarak yapılabilecek temel seviyedeki ispatlar için bile zorlandıkları hatta bazı öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde bile öğrenemediği anlaşılmaktadır. Bu da Uğurel, Moralı, Koyunkaya & Karahan (2015), Doruk & Kaplan (2015) ve Güler & Ekmekçi (2013) tarafından yapılan çalışmalarla uyumludur. Mülakat esnasında yöneltilen ve ilkine göre daha karmaşık bir soru olan ikinci soruyu, bir öğrenci benzer olan başka bir önermeyi daha önce gördüğü için cevaplayabildiğini belirtmiştir. Öğrencilerin takma isimleriyle beraber her iki sorunun ispat sürecinde gösterdikleri yeterlikler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Öğrencilerin ispat yaparken zorlanmalarının sebebinin muhakeme noksanlığı ve ispatlardaki anahtar düşüncelerin farkına varmadan ezberleme yoluyla dersleri geçebilmeleri olduğu söylenebilir (Doruk & Kaplan 2013).

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar kullanılan önermelerle sınırlıdır. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapabilme yeterliklerinin arttırılabilmesi için ileri düzeyde düşünme becerisi gerektiren matematik problemleri derslerde daha fazla kullanılabilir.

Kaynakça

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates’ interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869–890.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi, 6*(1), 25–37.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2014). *Karma yöntem araştırmaları: Tasarımı ve yürütülmesi*. (Y. Dede, S. B. Demir, Dü, & A. Delice, Çev.) Ankara, Türkiye: Anı Yayıncılık.

Çifci Tekinarslan, İ. (2014). Zihinsel yetersizliği olan öğrenciler. İ. H. Diken içinde, *Özel eğitime gereksinimi olan öğrenciler ve özel eğitim* (10. b., ss. 135-166). Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: A theoretical study, *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, *4*(2), 47-71.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Doruk, M. & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proof and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(2): 571-590.

Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği, *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 59-83.

Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(3), 446-462.

Hanna, G. (1989). More than formal proof, *For the Learning of Mathematics*, *9*(1), 20-25.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5- 23.

Jones, K. & Rodd, M. (2001). Geometry and proof. *A report based on the meeting at Manchester Metropolitan University*, 21(1), 95-100.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16 (July), 1-13.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Öztürk, M., Akkan, Y., Kaleli-Yılmaz, G. ve Kaplan, A. (2015). Ortaokul öğrencileri ve öğretmenleriyle yapılan matematiksel ispat araştırmaları: Nitel meta-sentez çalışması. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu*-2 (s. 62). Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi. http://www.bilmat.org/ adresinden alınmıştır.

Polat, K. ve Akgün, L. (2016), Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri, *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438.

Ross, Kenneth, A. (1998). The place of algorithms and proofs in school mathematics, *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252-255.

Rotman, J. (2002). *Journey into mathematics: An introduction to proofs*. Mineola, NY: Dover Publications.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91-134.

Şengül, S. & Güner, P. (2014). Relationship between proof schemes used by preservice mathematics teachers and gender, views towards proof. *Procedia- Social Behavioral Sciences, 116*, 617-620.

Şimşek, E., Şimşek A. ve Dündar, S. (2013). Lise 12. sınıf öğrencilerinin geometric ispat süreçlerinin incelenmesi, *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(4), 43-57.

Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya M.Y. & Karahan Ö. (2016). Pre-service secondary mathematic teachers' behaviours in the proving process. Eurasia *Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(2), 203-231.

Extended Abstract

One of the most important objectives of mathematics education is to ensure that students can receive reasonable answers from the questions of why and for what purpose regarding the concepts they will learn (Güler & Temizyürek, 2015). Therefore, the importance of proof in mathematics and mathematics education increases rapidly (Dede & Karakuş, 2014).

The primary purpose of a mathematical proof is to indicate not only whether it is right or wrong but also why it is right or wrong (Hanna, 2000). A good proof helps us understand the meaning of the given theorem. Also, it shows both the accuracy of a theorem and the reasons of this accuracy. This kind of proof is so persuasive that it has a wide range of benefits and functions. One of these benefits can be that it helps us provide good definitions and useful algorithms (Dede & Karakuş , 2014).

The study was carried out with 29 last-grade students studying in the departments of elementary mathematics teaching during the spring semester of the 2016-2017 academic year. The students were receiving Elementary Number Theory lesson. This study is made on divisibility properties of integers.

The data collection process of the study was conducted in two stages. Firstly, the four prepositions on divisibility subject was applied to 29 last-grade students studying in the departments of elementary mathematics teaching at Bayburt University Education Faculty within a course hour. In the second stage, clinic interviews were conducted with 6 students.

The data obtained in the study, were collected as the task cards, observation forms and think aloud protocol methods. In the task cards, some propositions were asked to students and wanted them proving these. The prepositions used in the study were selected without needing previous theorems during proof. Furthermore, the prepositions used are selected to prove end of a process *instead of proving by insight.* In the analizing process of the study, the descriptive analysis and content analysis were used. At the end of the study it was seen that some of the mathematics teacher candidates were forced to prove elemantary prepositions by using definiton of divisibility. Moreover it was seen that some of the mathematics teacher candidates can't learn also based on conceptual level.