

ÖZET

π 'nin gizemli bir sayı değil, ölçülebilir gerçeğe ilişkin insanoğlunun aklında tasarladığı ideal durumları tanımlayan *öteölçümler*den biri olduğu ve *öteölçümler*in ise ancak *tahmin* edilebileceği vurgulandıktan sonra, bir Bernoulli değişkenin beklenen değerini içeren ilişkiden yararlanılarak, π *öteölçümünün sanal* bir deneyle nasıl tahmin edilebileceği çerçevesinde, sanal gerçeğin matematiksel ve istatistiksel boyutları tartışılmaktadır.

Anahtar sözcükler: Sanal Gerçek, Matematiksel Yakınsama, İstatistiksel Yakınsama, Monte Carlo Yöntem

ESTIMATION of π via VIRTUAL EXPERIMENTATION

ABSTRACT

After emphasizing that π is not a mysterious number, but is one of the parameters defining the ideal states related to the measurable reality sketched out in human mind, and the parameters can only be estimated, the mathematical and statistical aspects of virtual reality is discussed within the framework of how the π parameter can be estimated via a virtual experiment utilizing a relationship containing the expected value of a Bernoulli variate.

Key words: Virtual Reality, Mathematical Convergence, Statistical Convergence, Monte Carlo Methods

1. GİRİŞ

İnsanoğlu, günün birinde, muhtemelen açık bir alanda, kendi etrafında dönerek, gözü ile kendisine bir güvenli alan seçti ve bu alanın sınırlarını, bitki liflerinden yapılmış ip benzeri bir nesne ile bağladığı iki kazıktan birini durduğu yere çakıp, diğer kazığı, aradaki esnek nesnenin esnekliği yok oluncaya kadar gerdikten sonra, sabit duran kazığın etrafında dönerek toprağın üzerine çizmeyi akıl etti. Ve yer yüzünde oluşturduğu bu şekile Pygmalion³ gibi aşık olan insanoğlunun, “bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri” olan *Çember*’ini kusursuzlaştırarak yüceltme serüveni başladı.

Yırtıcı hayvanlardan ya da düşman klanlardan korunabilmek için, güvenlik alanını bir çember biçiminde yeryüzü üzerinde işaretlemek elbette yetmezdi. Kulübelerin, köylerin, tapınak ve kalelerin yerleşeceği zeminin sınırlarını belirleyen çemberlerin üzerinde önce ağaç, sonra da taş duvarlar yükselmeye başladı. Bu barınak duvarlarının, “*ne kadar*” ağaç ya da taş kullanılarak yapılabileceği bilgisine *tasarım* aşamasında gereksinim duyan insanoğlu, bu bilgiye, çizilen çemberin çevre uzunluğunu ölçerek ulaşabileceğini akıl etti. Doğal olarak yararlandığı ölçme aygıtı ve ölçek, çemberi çizirken kullandığı, iki ucuna kazık bağlı belli uzunlukta bir ip parçası biçimindeki ilk pergeldi. Çizdiği her çemberin çevresini ölçen insanoğlu, günün birinde, çizdiği çemberin kapladığı alanın büyüklüğü ne kadar değişirse değişsin, *çizilen tüm çemberler için geçerli bir gerçeğin farkına vardı*: bir çemberin çevresi, çizim aracı olarak kullanılan ip parçasının iki katının *yaklaşık* üç katından biraz fazlaydı. *Kusursuz bir çember çizemediği ve kusursuz ölçüm yapamadığı için*, tam değerini bulamadığı *tüm çemberler için değişmez olan bu oranın değerini*, kesirli sayıları akıl edip kullanmaya başlayana kadar, *yaklaşık “3”* olarak kabul etti.⁴

Olgusal dünyada kusursuz bir çember çizemeyen ve kusursuz bir ölçüm yapamayan insanoğlu, yapamadıklarının, “varsayalım ki” diyerek, önce hayalini kurmayı öğrendi. Tümevarımla olgusal dünyada

¹ Bu makalenin kısa bir özeti, İstanbul Kültür Üniversitesi’nce, 5-8.Eylül.2006 tarihinde, İzmir Foça’da düzenlenen, 4. Matematik, Mantık ve Felsefe Ulusal Sempozyumu’nda bildiri olarak sunulmuştur.

² Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500 Teknikokullar, Ankara. yavuzata@gazi.edu.tr

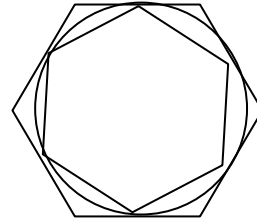
³ Kendisine âşık olan Eski Yunan mitoloji kahramanı.

⁴ İ.Ö.1650 sıralarında, Ahmes adlı Mısırlı bir kâtip tarafından yazılmış olan ve Rhind papirüsü olarak bilinen bir yazıdaki bilgiye göre, bir çemberin çevresinin çapına oranı $256/81 \approx 3,141049 \dots$ dir. Ancak, tarih bu bilginin yayılmadığını ve bin yıl sonra bile Babilliler ve ilk İbraniler’in 3 değerini kullandıklarını gösteriyor. (Blatner, D. , 2003: 3).

eriştiği gerçeği, düş gücü ile kusursuz öteolgusal dünyaya taşıdı ve oradan zincirleme tümdengelimle eriştiği gerçeğe döndü. Böylece, tümdengelimle indirdiği merdiveni tümevarımla tırmanabileceğini, içinde bulunduğu boyuttaki somut gerçekten soyut gerçeğe gidiş-geliş döngüsünün sonsuzluğunu, bu sonsuz gidiş-gelişle, kendi tanımladığı kusursuzluğa erişemeyeceğini, ama her seferinde ona biraz daha yaklaşılabileceğini kavradı.

Bugün de çizdiğimiz çemberler kusurlu, ama 4000 yıl önce çizebildiklerimizden daha az kusurlu. Günümüzde *nanoteknoloji* çağını yaşamaya başlayan insanoğlunun bu yoldaki ilk adımlarından birini, “düşünsel” dünyadaki kusursuz bir çemberin çevresinin, kenarları söz konusu çemberin iç-kirişleri olan düzgün çokgenin çevre uzunluğundan büyük ve kenarları aynı çemberin dış-teğetleri olan düzgün çokgenin çevre uzunluğundan küçük olacağını ve düzgün iç ve dış çokgenlerin kenar sayısı arttıkça, iç ve dış çokgenlerin çevre uzunlukları arasındaki farkın azalarak, çemberin çevre uzunluğunu yakınsayacağını gören Sirakuza’lı Arşimed (İ.Ö. 287–212) attı.

“Düşünsel” dünyada tanımlanan bir çemberle iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenleri aşağıdaki şekilde olduğu gibi çizilebilir; bu çizimin “kusursuz” olduğu varsayılabilir ve çevresi, kusurlu ölçme yerine, kusursuz çemberi ve çokgenleri tanımlayan *değişmezler* arasındaki sağlam bağıntılardan yararlanılarak hesaplanabilir. Kendisinden yaklaşık 300 yıl önce Güney İtalya’da yaşamış olan Pisagor’un (İ.Ö.570-500) ünlü teoremi ile, 4-eşkenarlıdan başlayıp 96-eşkenarlı iç ve dış düzgün çokgenlerin çevresini hesaplayan Arşimed, bu oranın (223/71, 220/70) aralığında olduğunu kanıtladı. (Hooper, A.,1948:60-62)



Şekil 1. Bir çemberin iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenleri.

Arşimed’ten sonra, iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenlerin kenar sayısını arttırarak, bir çemberin çevresinin çapına olan oranın, matematiksel tanımlamalara göre kesin olarak bulunacağı aralığın sınırlarını hesaplama yarışı başladı. Viéte 1579 yılında, 393216 kenarlı çokgenlerin çevresini hesaplayarak söz konusu aralığı (3,1415926535, 3,1415926537) olarak bulduktan sonra, 1593’te yayımlanan bir eserinde bu aralığın sınırlarından birini istenen basamağa kadar

$$(1) \quad \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots}$$

biçiminde sonsuz çarpım yöntemi ile hesaplayacak formülü verdi.

Bu oranın, matematikçiler tarafından 17.yüzyıl ortalarına kadar tanımlanmış bir simgesinin bulunmaması ilginçtir. Bir çemberin çevresinin çapına oranını simgelerle ifade eden ilk kişilerden biri olan William Oughtred, bu oranı 1652’de “çevre ölçüsü” anlamındaki Yunanca "*περίμετρον*" (perimetron) sözcüğünün ilk harfi olan π ile çemberin çevresini; “ikiye bölen ölçü” anlamındaki Yunanca "*διαίρομετρον*" (diairo-metron) sözcüğünün ilk harfi olan δ ile de çemberin çapını simgeleyerek π/δ biçiminde gösterdi. Birim çaplı çemberin çevresi bu orana eşit olduğundan, doğal olarak daha sonraları oranın kendisi için doğrudan doğruya π simgesi benimsendi ve günümüzde, bir çemberin çevresinin çapına olan oranını π ile göstermek evrenselleşti.

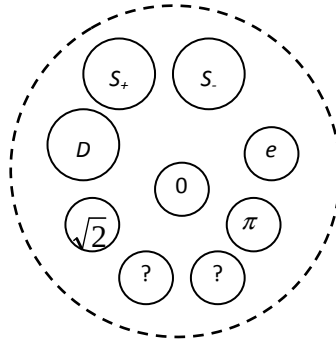
π simgesini 1685’te dönen bir cismin ağırlık merkezinin izlediği dış kenarı göstermek için kullanan John Wallis, Viéte’ninki gibi karışık kök işlemleri gerektirmeyen, tam sayıların çarpımı ve bölümü biçiminde yine sonsuz bir çarpım olan

$$(2) \quad \pi = 2 \times \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \dots}$$

algoritmasını önerdi. Viéte ve Wallis’inki gibi daha sonraları, hesaplama açısından giderek etkinleşen birçok algoritma üretildi. Zaman içinde, matematikçiler arasında daha etkin algoritma arayışları sürse de, π oranının en geçerli algoritmaya göre hesaplanan *yaklaşık değerinin basamak sayısını arttırmak* ağırlık kazandı. Hesaplanan bu değer, π oranına ilişkin değer içinde bulunacağı gerçek sayı eksenindeki bir aralığın alt yada üst sınırı olduğu giderek unutuldu ve bulunan sayısal değer öne çıkarılarak π oranının kendisine “ π sayısı” denilmeye başladı.

Şekil 2’de özetlenen *gerçek sayılar kümesinin* yalnızca sayma sayılarından haberdar olan birinin, bu π oranının pay ile paydasındaki sayıların ve oranının kendisini de S kümesinin bir bireyi olarak görmesi ve değerini “3” olarak benimsemesi doğaldır. “Birim karenin köşegen uzunluğu” olan “ $\sqrt{2}$ ” gibi, π ’nin de doğal *sayılar* kümesi D ’nin bireyleri ile üretilebilen *rasyonel sayılar kümesi* U ’nun bir bireyi olmadığını keşfeden eski Yunanlılar, bu keşiflerini tanrılara yüz inek kurban ederek kutladılar. Doğal sayılar kümesinin bireyleri ile üretilemeyeceği anlaşılan¹, $\sqrt{2}$ gibi yalnızca alt ve üst sınırları kesirli sayılarla belirlenebilen sözde π sayısının da, önce *irrasyonel sayı kümesi* U ’nin bir bireyi olduğu, ancak katsayıları tam sayı bir polinomun çözümü olabilen *cebirsal sayılar kümesi* C ’nin özelliğini taşımadığı görüldüncü de, gerçek sayılar kümesi $G = C \cup C'$ nin cebirsel olmayan *transandantal sayılar* kümesi $C' \equiv T$ ’nin bir bireyi oldu.

Saymakla başlayıp, gerçek ve sanal sayı kümelerine ulaşan ve tanımladığı sayı kümelerinin bireyi olmayan yeni bir sözde sayı ile karşılaşınca, yeni sayı kümeleri tanımlamakta matematik özgürdür. Ancak, varlık nedeni olgusal dünyaya ilişkin *sayısal sorunların* çözümü olan matematik, bu özgürlüğü, istatistiksel gerçekle olgusal dünyaya bağlanamayan salt düşünsel gerçeklik boyutunda kalacak biçimde kullanamaz. (Poincaré, 1998). *Sayılar kuramının* tutarlılığı için tımdengelimle türetilen *her yeni sayı*, zorunlu olarak olgusal dünyaya ilişkin bir gerçekten yola çıkılarak tanımlanır ve olgusal dünyayı daha iyi açıklamakta yararlanıldığında kuram içindeki yeri pekinleşir.



$$\begin{aligned} S_+ &= \{1, 2, 3, \dots\} \\ S_- &= \{\dots, -3, -2, -1\} \\ S &= S_+ \cup S_- \\ D &= S \cup \{0\} \\ U &= \left\{ \frac{a}{b} : a \in D, b \in S \right\} \\ U_- &= U \cup \{\sqrt{2}, \dots\} \\ C &= U \cup U_- \\ C' &\equiv T = \{\pi, e, \dots\} \end{aligned}$$

Şekil 2. Gerçek sayılar kümesinin ayrıltır alt kümeleri ve ayrıltır alt kümelerin tanımladığı diğér sayı kümeleri.

π ’yi “gizemli bir sayı” olarak niteleyenler de var. (Koç, 1996: 64). π ve benzeri sayılarda gerçekten bir gizem var mı? Evet, var... ama, gizem sayılarda yada rakamlarda değil! Peki, öyle ise...

2. GİZEM π ’nin NERESİNDE?

Önce yukarıdaki satırlar arasında değinilen π oranının özüne ilişkin özellikleri, şöyle yeniden bir sıralayalım:

- Çember, bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalardan oluşan *yerölçümsel bir şekildir*.
- *Olgusal dünyadaki bir çember, ölçülebilir* iki özelliğı olan çevresi ve çapı ile tanımlanabilir.
- Olgusal dünyadaki *tüm çemberler kümesi* için, “Bir çemberin çevresine oranı *değışmez*.” önermesi, *istatistiksel tümevarımla doğrulanan bir varsayımdır*.
- Öteolgusal dünyadaki *ideal* tüm çemberler kümesi için, “Bir çemberin çevresine oranı *değışmezdir*.” önermesi, *matematiksel tümevarımla kanıtlanan bir varsayımdır*.
- Bu değışmez için, istatistiksel ve matematiksel olarak *yanlışlanabilir* değérler önerilebilir.

¹ π oranının en yaklaşık değérini, S_+ kümesinin bireyleri olan pay ve payda değérlerinden elde etme çabaları bugün matematiksel ve bilişimsel eğlenceli bir uğraş olarak devam etmektedir. (Heidemann, 2006).

- İstatistiksel tümevarımla doğrulanan değer, *tahmin hatası*; matematiksel tümevarımla kanıtlanan değer ise, *yakınsama hatası* içereceğinden, söz konusu değişmez için önerilen tüm değerler, hata içeren birer *tahmindir*.
- Bu değişmezin, sayısal bir değeri olduğu düşünülse de, *mutlak doğru* değerine, *ölçerek ya da sayarak* ulaşamaz.
- Bilinmeyen sayısal bir değeri olduğu düşünülen bu değişmez, olgusal dünyadaki kusurlu tüm çemberlerden esinlenerek düşünüy kurduğumuz öteolgusal dünyadaki kusursuz tüm çemberleri tanımlayan değişmezlerden biridir.

Bu özellikleri taşıyan bir değişmez için, Yunanca'da "ölçme" anlamındaki "metros" sözcüğünün önüne, "ötesi" anlamındaki "para" önekini ekleyerek türetilen "parametros" sözcüğünden, Latince ve Yunanca kökenli dillerde "parameter" sözcüğü türetilmiştir (Wikipedia, 2006). Bizde de yaygın olarak, dilimize sokulan kökü yabancı ve öneki yabancı çıkmaz sokaklardan biri olan "parametre" sözcüğü kullanılıyor. Bu kavramla ilk karşılaşmalarımız yabancı dille düşünür olduklarından, her düşüncüyü ifade edebilecek yetenek ve güzellikteki Türkçe'mizle türetililecek bir sözcük yakıştırmak yerine, "parameter" sözcüğünü "parametre" olarak Türkçeleştirdiler!¹ Oysa öteölçüm gibi bir sözcük, bu kavramla ilk kez karşılaşana bile hemen anlamı ile ilgili ilk ipuçlarını verebilir.

Şimdiye kadar "π sayısı" demekten dikkatle kaçınıp "π oranı" olarak sözünü ettiğim bu öteölçümün de, bir çemberin çevre uzunluğunun çapının uzunluğuna olan oranı biçimini değil, *bir çemberin çevresinin, çapının katı cinsinden uzunluğu*, ya da kısaca, *birim çemberin çevresinin yarısı* biçimindeki *işlemsel tanımını* öne çıkaracağım. π'nin bu tanımı, bir çemberin kendi çapının katı biçiminde ölçülebileceği düşünülen çevresinin de ancak, π öteölçümü yardımı ile tanımlanabilen bir öteölçüm olabileceğini belirtir.

İdeal bir çemberin çapı da, π öteölçümüne göre çemberin çevresini belirleyen bir öteölçümdür. Dolayısı ile her türlü düşünsel gerçeği tanımlamada olduğu gibi, bu üç öteölçüm birlikte; çevre için $\langle Y \rangle$ ve yarıçap için $\langle X \rangle$ simgeleri kullanılarak,

$$(3) \quad \langle Y \rangle = \pi.2.\langle X \rangle$$

biçiminde, ideal bir çemberin *matematiksel tanımını* verir. Eğer (3)'teki ilişki çember kavramından tümü ile soyutlanarak salt matematiksel bir ilişki gibi görülürse, bu ilişkide, herhangi iki öteölçüm için *doğru olduğu varsayılan sayısal değerler* yerine konarak, aritmetik işlemlerle üçüncünün, bu varsayımlar altında mantıksal olarak doğru olacağı öngörülen değerine ulaşılabilir.

Ancak, yarıçapları $[0, \infty)$ aralığındaki tüm çemberler *evreni* için geçerli olan (3)'teki ilişki çember kavramından soyutlanmadıkça, π öteölçümü için *rasgele* bir değer doğru olduğu varsayılmaz. $\langle X \rangle$ ya da $\langle Y \rangle$ öteölçümlerinden yalnızca biri için rasgele bir değer ve rasgele bir değer verilemeyen π öteölçümünün istatistiksel ya da matematiksel *işlemsel* ve *nesnel* bir tanımına göre elde edilen sayısal değeri doğru varsayılarak, diğer üçüncü öteölçümün, bu varsayımlar altında doğru varsayılacak değeri tahmin edilebilir.

¹ Yabancı bir dilden olduğu gibi sözcükleri devşiren birileri, kendi aralarında, kendilerine özgü karma bir dil geliştirebilirler. Bunların önemli bir bölümü, düşüncelerini kendi aralarında bu karma dille tartışmak yerine, "parametre" gibi sözcükleri bolca ve sıkça araya katarak geniş kitlelerin önünde onların dili ile konuşur görünebilir. Dillerinden bilmediği sözcüklerin döküldüğünü gören sıradan insanların ise, bu bilen (!) insanlara hayranlığı ve saygısı giderek artar. Sonra bilmeyenler, bilenlerin dilindeki sözcüklerin nereden aktarıldığını fark edip, çocuklarının bilen olabilmeleri için, "dilın düşünce" olduğunu ve anadan-atadan öğrenilebileceğini unutarak, evrensel olduğu iddia edilen bir başkalarının ana dilinde eğitim veren kurumlarda eğitilmeleri (!) için çırpınırlar. "Moralim bozuk." demenin "Ahlakım bozuk." demek olacağının ayırında olamayan, *üvey ana* dilinden aktarılan içi boşaltılmış sözcükleri kullandıkça çağ atladığı zannına kapılan bilenler(!) ve bilmeyenler, ana dillerinden giderek uzaklaştıkça, hep birlikte *düşünce üretmez ve konuşamaz* olurlar.

$\langle X \rangle$ ya da $\langle Y \rangle$ öteölçümleri ile, π öteölçümü arasındaki fark, “birim çaplı çemberin çevre uzunluğunun yarısı” olan π öteölçümünün, tüm çemberlerin çevre uzunluğunu yarıçap uzunluğuna göre *belirleyen* “birimsiz”, ama kendisinin *evrensel* bir birim oluşudur. Evrensel bir birim olan π öteölçümünün gizemi, onun *ölçülemeyen-sayılamayan*, ancak belli bir hata ile *yakınsanabilen* ya da *tahmin* edilebilen evrensel bir gerçek oluşunda yatar. *Yaklaşılabilen* ancak *erişilemeyen* tüm öteölçümler için geçerli olan bu gizem, bir öteölçümün sayısal değerini araştırmada yararlanabilecek matematiksel ve istatistiksel yaklaşımların temel mantığı kavranarak çözülebilir.

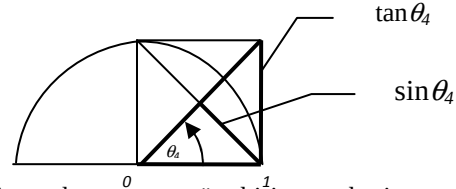
2.1. Matematiksel Yaklaşım

Bir öteölçüme ancak *ereysel* olarak yaklaşılabileceğine göre, Arşimed yöntemi olarak bilinen yöntemin temel mantığı, π öteölçümüne matematiksel olarak nasıl yaklaşılabileceğini gösteren gelmiş, geçmiş ve gelecek tüm yöntemlerin de temeli olmaya devam edecektir. Ancak, Arşimed’in yalnızca Pisagor teoremi ile düzgün 96-genin çevresini hesaplamada gösterdiği sabrı günümüzde gösterebilecek çok az kişi vardır. Bugün, trigonometrik işlevi olan bir hesap makinesi ile hesap makinesinin basamak sayısı kadar duyarlıktaki π öteölçümünün doğru sayılabilecek matematiksel yaklaşık bir değerine, çemberi yakınsayan düzgün çokgenin kenar sayısı 10^{20} olmak üzere birkaç saniyede ulaşabilir.

2.1.1. Matematiksel Tanımlama

(3)’ün, ideal bir çemberin matematiksel tanımı olduğu söylenmişti. Aynı zamanda π ’nin kavramsal ilk tanımı olan (3), eğer varsa π öteölçümünün sayısal değeri konusunda bir fikir vermez. π ’nin sayısal değeri konusunda daha açık fikir verecek Arşimed’inki gibi analitik tanımları gerekir. Şekil 3’deki birim çemberin çevre uzunluğunun 8’de biri olan θ merkez açısının gördüğü yay parçası uzunluğu $\theta_4 = \pi/4$; iç kiriş düzgün 4-genin çevre uzunluğunun 8’de biri $a_4 = \sin(\pi/4)$; ve dış teğet düzgün 4-genin çevre uzunluğunun 8’de biri de, $b_4 = \tan(\pi/4)$ olduğuna göre, matematiksel tümevarımla düzgün n -genler için,

$$\begin{aligned}
 & a_4 < \theta_4 < b_4 \\
 & 4 \times a_4 < \pi < 4 \times b_4 \\
 & 4 \times \sin \frac{\pi}{4} < \pi < 4 \times \tan \frac{\pi}{4} \\
 (4) \quad & 6 \times \sin \frac{\pi}{6} < \pi < 6 \times \tan \frac{\pi}{6} \\
 & \cdot \\
 & n \cdot \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \\
 & n \cdot a_n < \pi < n \cdot b_n
 \end{aligned}$$



Şekil 3 θ_4 merkez açısına göre birim çemberin çevresi.

yazılabilir. Buradan analitik olarak, kenar sayısı ∞ ’a eren iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenin ideal çemberle tam örtüşeceği düşünülerek,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \tan \frac{\pi}{n} = \pi$$

ya da,

$$(6) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan(\theta) = \pi$$

biçiminde π öteölçümü tanımlanabilir. (3),(4),(5) ve (6)’daki gibi türetililecek π ’nin denklik biçimindeki tüm matematiksel tanımları, mantık dili ile “ π , π ’dir.” önermesinden başka bir şey değildir. Ancak, N sonlu ama yeterince büyük bir sayı olmak üzere,

$$(7) \quad a_N = \sin \frac{\pi}{N} \text{ ve } b_N = \tan \frac{\pi}{N}$$

değerleri hesaplanabilirse¹, $\pi - N.a_N$ ve $N.b_N - \pi$ kadar hatalı alt ve üst sınırlar tanımlanabilir. Bu hatanın tanımında yine π 'nin kendisinin yer alması, *mutlak doğru* sayısal bir değerinin elde edilemeyeceğini ve π 'ye ilişkin her hangi sayısal bir değer yalnızca yaklaşık bir değer olabileceğini gösterir.

θ değişkeninin sıfırı yakınsaması durumunda, θ 'nın birer matematiksel işlevi olan $\sin(\theta)$ ve $\tan(\theta)$ işlevlerinin de π 'yi yakınsayacağını belirten (6)'daki tanımın, (3)'teki tanımdan farkı, (3)'teki $\langle X \rangle$ ya da $\langle Y \rangle$ öteölçümleri gibi uzunluk değil, aslında onlar gibi bir öteölçüm olan θ açısının bir *alana* ilişkin olmasıdır.

Şekil 4.'teki, $\theta(\alpha)$ açısı, α öteölçümü ile tanımlı bir $y=\alpha.x$ doğrusu ile $y=0$ doğrusu arasındaki birim çember diliminin,

$$(8) \quad A(\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \int_{1/\sqrt{1+\alpha^2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

biçiminde tanımlanabilecek alanı ile orantılı bir büyüklüktür. Bu alan, $\beta = \sqrt{1+\alpha^2}$ dönüşümü kullanılarak,

$$(9) \quad A'(\alpha) = A'(\beta) \cdot \beta'(\alpha) = \frac{1}{2(1+\alpha^2)}$$

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha A'(\alpha) d\alpha = \int_0^\alpha \frac{1}{1+v^2} dv$$

ŞEKİL 4. $\theta(\alpha)$ açısının taradığı birim çember alanı.

biçiminde de yazılabilir (Hewson,2003: 126).

π 'nin (3)'teki analitik tanımına göre, tam açı, 2π ; yarım açı, π ; dik açı da $\pi/2$ kadar birim çemberin yay parçalarına karşılık gelir. Bu tanımlara göre, dik açının yarısı olan $\theta(\alpha=1)$ açısının birim çemberde taradığı alanın değeri de,

$$(10) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv$$

biçiminde tanımlanabilir. Görüldüğü gibi, π öteölçümünün bu tanımı da, π 'yi yine, değeri tam olarak hesaplanamayacak, ancak *belli bir hata ile yakınsanabilecek bir büyüklük* olarak belirlemektedir.

2.1.2. Yakınsama Hatası

Matematiksel tanımları yapılan öteölçümlerin sayısal değerlerini verecek *işlemsel* tanımları, yaklaşık değer nasıl hesaplanabileceği ve yaklaşık değer öteölçümün kendisini ne kadar hata ile yakınsayacağını ölçüsü olan *yakınsama hatası* tanımlanarak yapılabilir. (10)'daki tümlev, 'kısmi binomiyal açılımla'¹,

¹ Kişisel bilgisayarların donatıları arasındaki sanal bir hesap makinesinde $N=10^{20}$ için 31'inci basamağa kadar π değerinin, $N.a_n=N.b_n=3.1415926535897932384626433832795$ olduğunu göstermek, olsa olsa matematiksel bir *yanılsama* olabilir.

$$(11) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{S-1} x^{2(S-1)}) dx + \int_0^1 \frac{(-1)^S x^{2S}}{1+x^2} dx$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$(12) \quad T_S^X = \sum_{x=1}^S (-1)^{x-1} \frac{1}{2x-1}$$

ile yaklaşık *değeri* hesaplanabilir. S terimli bu yaklaşık değerin,

$$(13) \quad H_S^X = \int_0^1 \frac{(-1)^S x^{2S}}{1+x^2} dx$$

ile de $\pi/4$ 'ü *yakınsama hatası* tanımlanabilir. (13)'teki tümlenenin paydası en fazla 1 değerini alabileceğinden, *yakınsama hatasının mutlak değeri*,

$$(14) \quad 0 \leq \left| T_S^X - \frac{\pi}{4} \right| < \int_0^1 x^{2S} dx = \frac{1}{2S+1}$$

aralığında olacaktır.

2.1.3. Matematiksel Yakınsama Yasası

(14)'teki sonuç, $\hat{\theta}_S^X$ yaklaşık değeri (12)'deki gibi tanımlanabilen, her hangi bir evrensel θ^X öteölçümü için geçerli olacak bir *matematiksel yakınsama yasa*sının sonucudur:

$$(15) \quad \text{er}_{S \rightarrow \infty} \left(\left| H_S^X \right| \equiv \left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{er}_{S \rightarrow \infty} \hat{\theta}_S^X \rightarrow \theta^X.$$

Sayısal bir üst sınırı, (13)'teki gibi belirlenecek bir H_θ^X yakınsama hatasına göre de, (15)'den her zaman,

$$(16) \quad Ol \left(\left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) = 1$$

yazılabilir. (16)'daki aralık, θ^X öteölçümünün *kesinlikle* bulunacağı değer aralığıdır. Bu matematiksel yakınsama yasa, öteölçümlerin yaklaşık sayısal değerlerini elde etmeye yönelik tüm *sayısal yöntem*lerin temel mantığı olan matematiksel tümevarımdır.

2.2. İstatistiksel Yaklaşım

Matematiğin kusursuz dünyasındaki bir çemberin ideal tanımına olgusal dünyadan bakıldığında, bir çemberin (3)'de verilen *matematiksel modeli*, ancak *sanal* bir çemberin *eksik* bir modeli olabilir.

$$(1-y^S)(1-y)^{-1} = 1+y+y^2+\dots+y^{S-1} \Rightarrow (1-y)^{-1} = 1+y+y^2+\dots+y^{S-1} \wedge h_S(y) = y^S \cdot (1-y);$$

$$^1 \quad y = -x^2, (1+x^2)^{-1} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{S-1}x^{2(S-1)} + h_S(-x^2) \bullet$$

Olgusal dünyada gerçek bir çemberin çapı ve çevresi, ölçeklenmiş bir ölçüm aygıtı yardımı ile ölçülebilir. Aynı çemberin her hangi bir ölçümünde yarıçap için elde edilen değeri x_s ile simgelersek, bu değerlerin $\langle X \rangle$ öteölçümünden

$$(17.a) \quad h_s^x = x_s - \langle X \rangle$$

biçimindeki farkları, X rassal değişkenine ilişkin, x_s ölçüm değerlerinin içerdiği *doğrudan ölçülemeyen* hata değerleri olup, ölçme hatası olgusunun matematiksel tanımı olan

$$(17.b) \quad H^X = X - \langle X \rangle$$

H^X rassal değişkenine ilişkin sözde gözlem değerleridir. Aynı çemberin *yenilenen* ölçümlerinin farklı değerlerle sonuçlanabileceği gerçeğini göz ardı etmeyen deneysel fizik, kimya ve biyoloji gibi *istatistiksel bilimler* için bu ölçüm değerleri, *rassal bir değişkenin* (17)'de tanımlanan ölçme hatasını içeren *gözlenen değerleridir*.

2.2.1. İstatistiksel Tanımlama

Bir çemberin *istatistiksel tanımı*, (3)'teki $\langle X \rangle$ ve $\langle Y \rangle$ öteölçümlerinin ilişkin olduğu olgusal dünyada değerleri ölçme yolu ile gözlenebilen X ve Y rassal değişkenlerinin (17)'deki gibi ölçme hatası olgusunu içeren tanımları (3)'te yerine konarak, X ve Y 'ye ilişkin ölçme hataları birlikte H olmak üzere,

$$(18.a) \quad \begin{aligned} Y - H^Y &= 2\pi(X - H^X) \\ Y &= 2\pi X + (H^Y - 2\pi H^X) \\ Y &= 2\pi X + H \end{aligned}$$

ya da X , Y ve H rassal değişkenlerinin her hangi bir gözleme ilişkin değerleri cinsinden

$$(18.b) \quad y_s = 2\pi x_s + h_s$$

biçiminde yapılabilir.

Bir çemberin (18)'deki istatistiksel tanımı, evrensel π öteölçümünün tahmini için düzenlenecek bir deneyin tasarımıdaki başlangıç noktasıdır. (18)'deki istatistiksel model, π öteölçümünün tahmini için önce X 'in sonra Y 'nin ölçüleceğini ve bu ölçümlerin hatalı olacağını söylüyor. Hatalı verilere dayalı bir çıkarımla elde edilecek öteölçüm değerleri de hatalı olacaktır.

Deneysel bilimlerin ortak ve temel amaçlarına¹ ulaşabilmek için, neden-sonuç ilişkisi içinde açıklanabilen söz konusu olgunun davranışını önceden öngörebilmelidirler. Bu öngörülerin de hatalı olacağı bellidir. Bilimlerin mutlak kesin bilgi üretme gibi bir saplantısı olamaz. Deneysel bilimlerin için, öngörülerindeki hatanın nesnel ve nicel tanımını verebilmeleri yeterlidir. Son derece duyarlı da olsa, ölçüm yolu ile elde edilen gözlemlerin ne kadar hata içerdiği konusunda güvenilir bir bilgi olmadan bu başarılamazdı.

¹ Bu bilimlerin ortak ve temel amaçları,

- kendi araştırma alanları kapsamındaki rassal değişkenler arasındaki neden-sonuç ilişkisinin işlevsel tanımı ile bu işlevsel tanımda yer alan rassal değişken değerlerine ilişkin gözlemsel değerlerin işlemsel tanımını yapıp,
- ölçerek elde ettiği gözlemlerden istatistiksel tümevarımla, işlevsel tanımda yer alan evrensel öteölçümlerin tahminlerine ulaşmak ve
- öteölçümlerin bu tahminlerine dayalı olarak olgusal dünyanın güvenilir bir açıklaması ve davranışının önceden öngörülmesinden sonra, olgusal dünyanın işlevsel tanımında neden konumundaki rassal değişkenlerin öteölçümlerini değiştiren, sonuç konumundaki rassal değişkenlerin öteölçümlerini denetim altına almaktır.

2.2.2. Ölçme Hatası

Doğrudan ölçülemeyen h_s^x ölçme hata değerleri H^X gibi bir rassal değişkenin *sözde gözlenen değerleri* olup, $\langle X \rangle$ için $\langle X \rangle'$ gibi bir *doğru değer* kabul edilerek, bu sözde gözlenen değerlerin ancak,

$$(19) \quad \hat{h}_s^x = x_s - \langle X \rangle'$$

biçiminde tahminleri üretilebilir.

Farklı olanların birleşebileceği bir *denge* noktasının ancak onların *ortasında* olabileceğini söyleyen mantık, $\langle X \rangle$ öteölçümü için *doğru kabul edilebilecek değerin* de, S kere yinelenen x_s gözlem değerlerinin

$$(20) \quad \bar{x}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_s$$

biçimindeki *aritmetik ortalaması* olacağını söyler (Yıldırım, 1991: 99). Buna göre, (17.a) ve (18)'den,

$$(21) \quad \sum_{s=1}^S \hat{h}_s^x = \sum_{s=1}^S (x_s - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{\hat{h}}_s^x = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{h}_s^x = 0$$

olacağı kolayca görülebilir. Kısaca (21), H^X rassal değişkenini betimleyen öteölçümlerden yalnızca biri olan $\langle H^X \rangle$ öteölçümü için doğru kabul edilebilecek değerin *her zaman ve yalnızca* "0" olduğunu söylüyor.

S kere yinelenen x_s gözlem değerlerinin her birinin ayrı bir X_s rassal değişkenine değil de aynı tek bir X rassal değişkenine ilişkin olabilmesi için, her zaman eldeki ölçüm değerleri ile,

$$(22) \quad \begin{aligned} V : \langle H^{X_s} \rangle &= 0, \quad s = 1(1)S \\ V' : \langle H^{X_s} \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

varsayımının doğrulanması yanında, başlangıca göre denge noktası olan $\langle H^{X_s} \rangle$ 'e göre H^{X_s} rassal değişkeninin

$$(23) \quad \left\langle \left(H^{X_s} - \langle H^{X_s} \rangle \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(H^{X_s} \right)^2 \right\rangle$$

biçiminde tanımlanan ikinci momenti¹ ya da kısaca *değişkesi* için de, X_s rassal değişkeninin *değişkesi*,

$$(24) \quad \sigma_{X_s}^2 = \left\langle \left(X_s - \langle X_s \rangle \right)^2 \right\rangle, \quad s = 1(1)S$$

olmak üzere,

¹ Dönen bir cismin, dönme eksenine etki eden kuvvetlerin eksen üzerindeki etki noktalarının dönme merkezine olan uzaklığı ile etki eden kuvvetlerin çarpımı olan döndürme kuvveti. Toplam momentin sıfır olduğu nokta, ters yöndeki döndürme kuvvetlerinin denge noktası olup, dönme merkezi denge noktasına kaydırılan bir cisim dönmez.

$$(25) \quad \begin{aligned} V: \left\langle \left(H^{x_s} \right)^2 \right\rangle &= \sigma_x^2 \quad , \quad s = 1(1)S \\ V': \left\langle \left(H^{x_s} \right)^2 \right\rangle &\neq \sigma_x^2 \end{aligned}$$

varsayımının doğrulanması gerekir.

(22) ve (25)'deki varsayımlar, sistematik ölçme hatasına yer vermeyen bir ölçme yöntemi ile S kere yinelenen x_s gözlem değerlerinin her birinin aynı X rassal değişkenine ilişkin olması sağlandığında doğrulanmış olurlar. Ölçme hatasının yalnızca iki öteölçümünün değerleri konusunda bir fikir veren bu varsayımların doğrulanması, belli bir ölçüm değerinin ne kadar ölçme hatası içerdiğini söylemez.

2.2.3. Olasılık Dağılımı ve Beklenen Değerler

Bir rassal değişkeni tanımlamak için yalnızca, denge noktası biçimindeki birinci momentinin ve denge noktasına göre ikinci momenti olan değişkesinin tanımlanması yetmeyeceği gibi, rassal bir değişkenin *moment üreten işlevi*¹ ile tüm momentlerinin genel bir tanımını vermek ve gerektiğinde ölçülmüş değerlerden bu momentlerin tek tek sayısal tahminlerini elde etmek de bir rassal değişkeni tanımda ve belirlemede pek etkin bir yol değildir.

Bir X rassal değişkeninin alabileceği değerleri hangi olasılıkla alabileceğini belirleyen,

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$$

koşulunu sağlayan *olasılık yoğunluk işlevi* $f(x)$ ile, söz konusu rassal değişkenin yalnızca başlangıca göre birinci momenti ve buna göre diğer momentleri gibi özel işlevleri değil, tanım aralığı (a,b) olan rassal bir değişkenin her hangi matematiksel bir işlevi biçiminde tanımlanacak $g(x)$ rassal değişkeninin

$$(27) \quad \left\langle g(X) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).f(x).dx$$

biçiminde *beklenen değeri* tanımlanabilir. Kuramsal fizik gibi *matematiksel bilimlerin*, (3)'teki gibi matematiksel tanımlarında yer alan ölçülebilen değişkenlere ilişkin öteölçümler, deneysel fizik gibi istatistiksel bilimlerde tahmin edilmeleri amaçlanan birer beklenen değerdir. Olgusal dünyadaki her hangi bir *ölçme olgusunun ideal tanımı* olan (17.b)'deki H^X , X rassal değişkeninin bir işlevi olduğundan, $f(x)$ olasılık yoğunluk işlevine göre beklenen değeri,

$$(28) \quad \left\langle H^X \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \langle X \rangle).f(x).dx = 0 \quad \text{ve}$$

değişkesi de,

$$(29) \quad \left\langle \left(H^X - \langle H^X \rangle \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(H^X \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H^X \right)^2 .f(x).dx = \sigma_x^2$$

biçiminde tanımlanabilir. $\langle X \rangle = \mu_x$ ve $\left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle = \sigma_x^2$ olmak üzere, ölçme olgusunun ideal tanımındaki olasılık işlevinin açık biçiminin,

¹ $f(x)$, X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk işlevi ise, $\left\langle e^{tx} \right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$, X 'in moment üreten işlevidir.

$$(30) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2}$$

olduğunu *Abraham De Moivre* (1677-1754) keşfetti.

(17.b)'deki matematiksel tanım, şimdi *Normal Olasılık Yasası* olarak bilinen (30) ile birlikte, ölçme olgusunun istatistiksel tanımını verir. Buna göre, ölçülebilen bir X rassal değişkeninin *dağılımı*¹, beklenen değeri μ_X ve değişkesi σ_X^2 olan normal bir dağılım olup kısaca,

$$(31) \quad X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

olarak gösterilir. Ölçme hatasının dağılımı da, (17.b), (22), (25) ve (30)'a göre,

$$(32) \quad H_X \sim N(0, \sigma_X^2)$$

olup, *Hatalar Yasası* ya da *Johann Karl Friedrich Gauss*(1777-1855)'a atfen *Gauss Yasası* olarak bilinir.

2.2.4. İstatistiksel Yakınsama Yasası

X yığını tanımlayan evrensel öteölçümlerden biri olan θ^X beklenen değeri, kabul edilebilir bir tahmin hatasının üst sınırı H_θ^X ve alabileceği değerlerden biri belli bir X yığından rasgele seçilen S tane gözlem biriminden hesaplan örnek istatistiği değeri $\hat{\theta}_S^X$ olmak üzere, *tahmin sanatının* temel mantığını oluşturan

$$(33) \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Ol} \left(\left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) \rightarrow 1 \Rightarrow \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{\theta}_S^X \rightarrow \theta^X.$$

biçimindeki *istatistiksel yakınsama yasasına* göre tahmin edilebilir. Bu gün, *Büyük Sayılar Yasası* olarak bilinen bu teoremi, yeğeni *Nicolas Bernoulli*(1687-1759) tarafından ölümünden sekiz yıl sonra yayınlanan *Ars Conjectandi*² adlı eserinde ilk kez ifade ederek kanıtlayan *Jacob Bernoulli*(1654-1705) *çağdaş istatistiksel bilimlerin* de yolunu açan kişi oldu. (Hacking,1975:143-165).

(15)'deki matematiksel yakınsama yasasındaki X , alabileceği değerler belli bir *sayı kümesinin* bireyleri olan bir *değişkeni*; (33)'teki istatistiksel yakınsama yasasındaki X ise, belli bir *gözlem kümesinin* bireylerine ilişkin *rassal* bir değişkenin gözlenen değerlerini simgelemektedir. Dolayısı ile istatistiksel yakınsama yasasında, matematiksel yakınsama yasasında olduğu gibi doğrudan yakınsama hatasının, yaklaşık değerlerin hesaplanmasında kullanılan terim sayısı S sonsuza giderken yakınsayacağı değer değil, kendisi de rassal bir değişken olan tahmin hatasının, örnek istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan örnek bireyleri sayısı S sonsuza giderken, belli bir tahmin hata değerinden büyük ya da küçük olma olasılığının yakınsayacağı değer söz konusu olabilir. Bu nedenle de *istatistiksel yakınsama yasasında*, θ^X öteölçümünün (16)'daki gibi *kesinlikle* bulunacağı bir değer aralığı değil, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, θ^X beklenen değerinin (30)'a göre $1-\alpha$ *olasılıkla* bulunacağı

$$(34) \quad \text{Ol} \left(\left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) = 1 - \alpha$$

¹ $F(x < a) = \int_{-\infty}^a f(x).dx \equiv F(x)$, $-\infty < a < \infty$.

² Bernoulli, J. (1713), *Ars Conjectandi*, Basle.

bir değer aralığı tanımlanabilir.

(33) ve (34)'de ifade edilen istatistiksel yakınsama yasası, beklenen değerlerin tahminlerini gözlemsel değerlerden elde etmeye yönelik tüm *istatistiksel yöntemlerin* temel mantığı olan *istatistiksel çıkarımdır*. Bu çıkarımın işlevsel olabilmesi için, bir rassal değişken olan $\hat{\theta}_S^X$ örnek istatistiğinin olasılık dağılımının bilinmesi gerekir.

2.2.5. Merkezsel Erey Teoremi

Örnek istatistiği $\hat{\theta}_S^X$ 'in gözlenen değerinin, X yığınyından rasgele seçilen S tane bireye ilişkin (20)'de tanımlandığı gibi bir aritmetik ortalama olması durumunda, istatistiksel yakınsama yasasına göre, beklenen değerinin

$$(35) \quad \langle \hat{\theta}_S^X \equiv \bar{X}_S \rangle = \left\langle \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S X_s \right\rangle = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \langle X_s \rangle = \frac{1}{S} \cdot S \cdot \mu_X = \mu_X \cdot$$

ve değişkesinin

$$(36) \quad \begin{aligned} \langle (\bar{X}_S - \mu_X)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}_S^2 dF(\bar{x}_S) - \mu_X^2 = \dots \\ &= \frac{1}{S^2} \cdot \sum_{s=1}^S X_s^2 - S \cdot \mu_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{S} \equiv \sigma_{\bar{X}}^2 \cdot \end{aligned}$$

olduğu biliniyor.¹

De Moivre'un 1733'de elde ettiği, $X_S \sim \text{Binomiyal}(p, S)$ için,

$$\bar{X}_S = \frac{X_S}{S} \xrightarrow{\text{Olasılık}} p \text{ ve } \sqrt{S}(\bar{X}_S - p) \xrightarrow{\text{Dağılımda}} N(0, p.q)$$

sonucunu², her hangi bir F dağılımına sahip birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı $\{X_s : s = 1(1)S\}$ rassal değişkenlerin ortak beklenen değeri $\langle X \rangle = \mu_X$ ve değişkesi $\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sigma_X^2 < \infty$ olmak üzere,

$$(37) \quad \bar{X}_S \xrightarrow{\text{Dağılımda}} N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{S}\right).$$

biçiminde genelleştiren *Pierre Simon de Laplace*(1749-1827)'ın 1810'daki katkısı³ ile tahmin sanatının kapısı istatistiksel bilimlere için ardına kadar açıldı. (37)'deki sonuç, *Piérre de Fermat*(1601-1605) ve *Blaise*

¹ (35)'deki tanım için, $\{X_s : s = 1(1)S\}$ kümesinin bireylerinin birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı (b.a.d.) olması ve $\{X_s : s = 1(1)S\}$ örnek bireylerinin aynı X yığınyından rasgele örnekleme ile elde edilmesi yeterlidir. Ancak (33)'ün çıkarımı için S 'ye göre ereysel bir dağılım olan $F(\bar{X}_S)$ dağılımının bilinmesi gerekir.

² De Moivre, A.(1733), "Approximatio ad summam termorum binom in seriem expansi", Printed for private circulation, London.

³ Laplace, P.S.(1810), "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités", Mémoires de l'académie des Scienes de Paris, 1809:353-415.

Pascal(1623-1662)'ın birlikte ilk adımlarını attıkları *olasılık kuramı* bahçesinin tam merkezinde, Bernoulli'nin 1713'de ilk biçimini verdiği (33)'deki istatistiksel yakınsama yasası ile tanımladığı yerden fıskıran bu pınarın adı, haklı olarak Polya¹ tarafından *Merkezsiz Erey Teoremi* (MET) olarak kondu.

$$Z_S^X = \frac{\bar{X}_S - \mu_X}{\sigma_{\bar{X}_S}} \text{ rassal değişkeninin, MET'ne göre,}$$

$$\text{er } \bar{X}_S \rightarrow \mu_X \therefore \langle Z_S^X \rangle = 0 \text{ beklenen değerli ve}$$

$$\langle (Z_S^X)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\bar{X}_S - \mu_X}{\sigma_{\bar{X}_S}} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_S}^2} \langle (\bar{X}_S - \mu_X)^2 \rangle = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_S}^2} \sigma_{\bar{X}_S}^2 = 1 \text{ değişikli,}$$

$$(38) \quad \Phi(z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z^*} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

standart normal dağılımı yakınsayacağı açıktır.

Artık, bir X yığınınından rasgele seçilen $\{x_s : s = 1(1)S\}$ örnekleminin (20)'deki ortalamasına göre μ_X 'in bulunacağı *güven aralığının* alt ve üst sınırlarını belirleyecek (34)'deki *istatistiksel yakınsama hatasının değeri*, $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ olmak üzere,

$$(39) \quad H_{\theta}^X = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}}$$

alınarak, μ_X beklenen değerinin $(1-\alpha)$ güvenle,

$$(40) \quad \left(\bar{x}_S - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}}, \bar{x}_S + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}} \right)$$

aralığında olacağı söylenebilir ve (33)'deki istatistiksel yakınsama yasasının (34)'deki sonucu, bu durumda

$$(41) \quad O_{\ell} \left(\left| \bar{x}_S - \mu_X \right| \leq z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}} \right) = 1 - \alpha.$$

biçiminde ifade edilir.

2.2.6. π Öteölçümünün İstatistiksel Tahmini

Bu bilgilerin ışığında, (18)'de verilen bir çemberin çapı ile çevresi arasındaki zorunlu ve nedensel ilişkinin istatistiksel modelindeki π öteölçümünün istatistiksel tahmini, $\langle X \rangle$ yarıçaplı bir çember çizilerek, Y rassal değişkeni için (22), (25) ve (32) varsayımlarının geçerli olduğu

¹ Polya, G. (1920), "Über den Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Moment problem", *Math.Z.*,8. 171-178.

$$(42) \quad \{y_s : s = 1(1)S \mid x_s = \langle X \rangle, \forall s\}$$

deneyisel verilerinden elde edilir. Y rassal değişkeninin beklenen değerinin ve değişkesinin tahminleri olan $\bar{y}_s$ ve $\hat{\sigma}_{y_s}^2$ değerleri, (42)'deki verilerden ve bu değerlerden de,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_s = \frac{\bar{y}_s}{2\langle X \rangle} \text{ ve } \sigma_{\hat{\pi}_s}^2 &\equiv \langle (\hat{\pi}_s - \pi)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\bar{y}_s}{2\langle X \rangle} - \frac{\langle Y \rangle}{2\langle X \rangle} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \langle (\bar{y}_s - \langle Y \rangle)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \sigma_{\bar{y}_s}^2 = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \frac{\sigma_Y^2}{S}; \hat{\sigma}_{\hat{\pi}_s}^2 = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \frac{\hat{\sigma}_{y_s}^2}{S}. \end{aligned}$$

tahminleri bulunarak, eldeki deneyisel kanıtlara göre gerçek π değeri için, (41)'deki gibi,

$$(43) \quad O\ell\left(\left|\hat{\pi}_s - \pi\right| < z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\pi}_s}\right) = 1 - \alpha$$

olduğu söylenir.

3. SANAL GERÇEK

Bir çemberin (3)'de verilen matematiksel modelinin, ölçme hatası olgusunu göz ardı ettiği için, olgusal dünyada çizilmek üzere tasarlanan sanal bir çemberin ancak eksik bir modeli olabileceği daha önce belirtilmişti. (18)'de verilen istatistiksel model de, bir dizi varsayıma dayalı olarak, yine sanal bir çemberin tanımı olmakla birlikte, olgusal dünyada ölçme eylemi ile çizilecek bir çembere ilişkindir. Bu varsayımların yeterince geçerli olduğu yaklaşık bir durum, çok dikkatli bir deney tasarımı ile gerçek dünyada oluşturulabilirse, (42)'deki verilerden (43)'teki bilgiye ulaşılabilir. Tasarlanan deneyisel ortamın, gerçekleşen deneyisel ortamla ne kadar benzeştiği, gerçek deney verileri kullanılarak, “Model hatası, ölçme hatası ile örtüşür.” varsayımının, a posteriori sınanması ile belirlenir. Gerçek dünyanın, tutarlı, yeterli ve güvenilir bir açıklaması ve öngörüsüne, kuramla uygulama arasında, bu varsayımın her aşamada doğrulandığı, yönlendirilmiş gelgitsel bir süreç sonunda ulaşılır. (Box, 1979: 791-799).

Tasarlanan deneyisel ortamın tam benzeştiği, başka bir deyişle, “model hatasının ölçme hatası ile tam örtüştüğü”, sanal deney ortamları da oluşturulabilir. Sanal deneyin ön koşulu, söz konusu olguya ilişkin istatistiksel modelde, temel girdi niteliğindeki,

- öteölçüm değerlerinin doğru olduğu varsayılan değerlerinin a priori belirlenebilmesi ve
- rassal değişkenlere ilişkin gözlemsel değerlerin, gerçek bir deneyde olduğu gibi ölçme ile değil, olasılık dağılımlarından rasgele örnekleme ile

elde edilebilmesidir. Bu koşulu sağlayan istatistiksel bir modelin, neden-sonuç ilişkileri görünürde ne kadar karmaşık olursa olsun, temel girdi değerleri modelin yapısal biçiminde yerlerine konarak, çıktı değerleri matematiksel hesaplamalarla elde edilebilir. Bu tür istatistiksel modeller, sanal bir gerçek canlandırılarak, çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin bilinmeyen öteölçümlerinin tahmininde kullanılırlar.

3.1. Monte Carlo Tahmin Yöntemi

Gerçek deneyin olanaksız olduğu, girdi niteliğindeki değişkenlerin olasılık dağılımları üzerine geçerli varsayımlarla, çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin *sözde gözlem değerlerini* tanımlayan istatistiksel modelin kurulabildiği ve çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin bilinmeyen öteölçümlere ilişkin tahminlerin amaçlandığı durumlarda, istatistiksel bilimlerin hepsi *sanal deney* yoluna başvurur. Sanal deneyle sözde gözlem üretmeye, *benzetim*; bu yöntemle istenildiği kadar çok *büyük sayılarda* benzetim verilerinden istatistiksel yakınsama yasasının sonlu biçimi olan,

$$(44) \quad \text{er}_{S \rightarrow S^*} \bar{X}_S \rightarrow \bar{X}_{S^*} \approx \mu_X$$

ile X rassal değişkenin beklenen değerini tahmin etmeye de *Monte Carlo(MC) tahmin yöntemi* diyoruz. Veri elde etme maliyetinin çok düşük olduğu durumlarda, MC tahmin yöntemi biçilmiş kaftandır.

Sanal gözlem üretme, ya da benzetim yöntemi, gerçek bir yığın yerine, belli bir olasılık dağılımından rasgele örneklemedir. Herhangi bir $R=F(x)$ olasılık dağılımının dağılımı, *standart tekdüze dağılım* olduğundan, $F(x)$ olasılık dağılımının tersi varsa, r standart tekdüze rassal bir değişkenin gerçek ya da sanal bir gözlem değeri olmak üzere,

$$(45) \quad x = F^{-1}(r)$$

biçiminde sanal gözlem değerleri elde edilecek X rassal değişkeninin dağılımının $F(x)$ olacağı açıktır (DeGroot, 1975: 127).

Gerçekten tek düze dağılmış bir rassal değişkenin değerini gözlemek yerine, *sözde* tek düze olan bir rassal değişkenin sanal gözlem değerleri, $K \in \square$ katsayı, $h \in \square$ hane sayısı ve r_0 bir başlangıç değeri olmak üzere,

$$(46) \quad r_i = \left[K \cdot 10^h \cdot r_{i-1} \bmod (10^h + 1) \right] / 10^h$$

biçiminde belli bir algoritmayla üretilerek, bir olasılık dağılımından rasgele örnekle yapmak, MC yöntemi açısından daha uygundur. (46)'daki algoritmaya göre üretilecek bir birinden bağımsız,

$$(47) \quad \left\{ r_s^{(1)}, s = 1(1)S \mid K, h, r_0^{(1)} \right\}, \left\{ r_s^{(2)}, s = 1(1)S \mid K, h, r_0^{(2)} \right\}$$

tek düze dizilerinden, örneğin

$$(48) \quad \begin{bmatrix} z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{-2 \ln r_i^{(1)}} \cdot \sin(2\pi r_i^{(2)}) \\ \sqrt{-2 \ln r_i^{(1)}} \cdot \cos(2\pi r_i^{(2)}) \end{bmatrix}$$

biçiminde iki değişkenli standart normal dağılımdan rasgele değerler elde edilebilir. (Box-Muller, 1958: 610-611). Böylece, sanal gerçeğin istatistiksel modelinde temel girdi niteliğindeki rassal değişkenlerin her biri için, bir birinden bağımsız, sözde tek düze rassal değişkenlerin değerleriyle belli bir sanal gerçek, istenen sayıda canlandırılabilir. (Ross, 2002)

3.2. π 'nin Monte Carlo Tahmini

Sanal bir çemberin (18)'deki istatistiksel genel modelinde temel girdiler; π öteölçümünün kendisi ve çemberin yarıçapı X ile ölçme hatası H rassal değişkenleri; çıktı ise çemberin çevresi olan Y rassal değişkenidir. $\pi, \langle X \rangle$ ve

σ_H^2 öteölçümlerinin doğru olduğu kabul edilen değerleri ile (46) ve (48)'deki algoritmalara göre elde edilen rassal değerler (18)'deki modelde yerlerine konarak, (42)'deki verilerin sanal değerleri,

$$(49) \quad y_s = 2 \cdot \pi \cdot \langle X \rangle + \sigma_H \cdot z_s^{(1)}, s = s(1)S$$

biçiminde üretilir.

$\pi, \langle X \rangle$ ve σ_H^2 öteölçümlerinin doğru olduğu kabul edilen değerleri, (42)'deki verilere göre elde edilen istatistiksel tahminler olabilir. Ancak, (49)'daki sanal gözlem değerlerinden, π öteölçümünün (43)'teki gibi istatistiksel bir tahminini MC yöntemiyle elde etmek, uygulanan yöntemlerin başarısını belirleme dışında, anlamsızdır. Eğer π 'nin doğru olduğu baştan kabul edilen istatistiksel tahmini ile MC tahmini uyuşuyorsa, MC sanal deneyde işlemsel ve yöntemsel bir yanlış yapılmadığı sonucundan başka mantıksal bir sonuç çıkmaz. Dolayısı ile (18)'deki model, π 'nin kendisini de bir girdi olarak içerdiğinden, π öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modeli olamaz.

(18)'deki istatistiksel modelin temeli, (3)'te verilen matematiksel modeldi. π öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modelini kurabilmek için, π öteölçümünün diğer matematiksel tanımlarından yararlanılabilir. Bu tanımlar arasından, istatistiksel modele temel oluşturacak matematiksel modeldeki, π 'nin dışındaki tüm öteölçümlerin, gerçek verilerle istatistiksel tahminlerinin elde edilebilmesi gerekir. Bu açıdan bakıldığında, (10)'daki matematiksel model, π öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modelini kurulmasında temel alınabilir. Bu tanıma göre π , birim çemberin alanıdır. Birim çemberin alanı ise, istatistiksel tahmini gerçek deneysel verilerden elde edilebilir bir öteölçümdür.

Bu amaçla, Şekil.5'deki gibi kenarları birim çembere teğet olan kare bir alanın içine rasgele atışlar yapılabilir ve çemberin içine düşen atışlar sayılabilir.

Çemberin içine düşen atışların oranı, istatistiksel yakınsama yasasına göre, deneme sayısı arttıkça

$$(50) \quad \theta = \frac{\text{Çemberin Alanı}}{\text{Karenin Alanı}} = \frac{\pi}{4}$$

olasılığını yakınsar. Söz konusu kare alan içine rasgele bir atışın çemberin içine düşme olasılığı olan θ 'nın ; $(x_s^{(1)}, x_s^{(2)})$, s. rasgele atışın koordinatları olmak üzere,

$$(51)$$

$$y_s = \begin{cases} 1, & \sqrt{(x_s^{(1)})^2 + (x_s^{(2)})^2} < 1 \\ 0, & \sqrt{(x_s^{(1)})^2 + (x_s^{(2)})^2} \geq 1 \end{cases}, s = 1(1)S$$

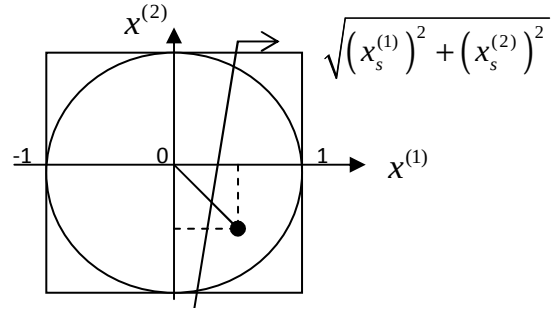
biçiminde tanımlanacak bir Bernoulli değişkenin beklenen değeri olup,

$$(52) \quad \bar{y}_s = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S y_i$$

MC örnek ortalamasının yakınsayacağı,

$$(53) \quad \text{er}_{s \rightarrow S}(\bar{y}_s) \rightarrow \overline{\text{er}}(Y=1)_{MC} \equiv \hat{\theta}_{MC}$$

değerle, MC tahmini elde edilebilir.



Şekil 5. Kare içine rasgele atış.

Gerçek bir deneyde, (42)'deki değerler doğrudan gözlem yolu ile bulunur. Deney çıktısı olan bu değerlerin (51)'deki matematiksel tanımında, $(x_s^{(1)}, x_s^{(2)})$ değerleri, bir birinden bağımsız, $(-1,1)$ aralığında tek düze rassal iki değişkenin değerleri olarak algılanıp, (47)'ye göre üretilcek standart tek düze dizilerinden,

$$(54) \quad \begin{aligned} x_s^{(1)} &= 2r_s^{(1)} - 1 \\ x_s^{(2)} &= 2r_s^{(2)} - 1 \end{aligned}$$

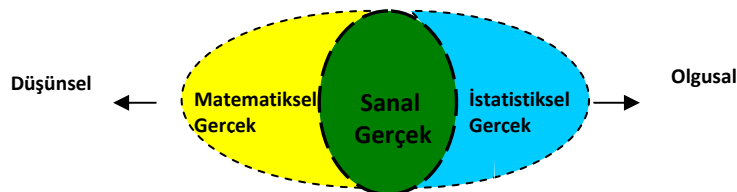
biçiminde elde edilebileceğinden, sırası ile (47), (54) ve (51) algoritmaları, π öteölçümünün doğru kabul edilecek bir değerini kullanmadan, (42)'deki gözlem değerlerinin sanal benzerleri olan (51)'deki değerleri üretir. Bu sanal verilerden de, (52), (53) ve (50)'ye göre, π 'nin MC tahmini elde edilir.

Tasarlanan sanal bir deneyin, ancak bir bilgisayar ortamında gerçekleştirilebileceği açıktır. Genel amaçlı programlama dillerinden birini bilen sanal deneyci için böyle bir ortamı oluşturmak ise oldukça kolaydır. (Ata, 2006: 56-77).

4. SÖZÜN ÖZÜ

Olgusal dünyadaki gözlemlerimizden yola çıkarak, olgu ve nesnelerin ideal biçimlerini salt matematiksel dünyamızda soyutlayarak oluşturabildiğimizi, bu ideal tanımlarda yer alan öteölçümlerin de, matematiksel yakınsama ve istatistiksel yakınsama yasalarından yararlanılarak tahmin edilebileceğini, ideal bir çemberi tanımlayan π öteölçümü çerçevesinde tartıştık. Benzer biçimde, günümüz teknolojisinin genetik ve uzay başarımlarının temelinde olduğu gibi, bir birleri ile tutarlı matematiksel gerçeklikle istatistiksel gerçeklik bir araya getirilerek, son derece karmaşık ve kapsamlı sanal gerçekler de oluşturulabilir. Böylece, olgusal dünyanın istatistiksel yaklaşımla keşfedilen rassallık yasaları kullanılarak tasarlanan yeni olgusalılıkların da öteölçümleri sanal deney verilerinden, Monte Carlo yöntemlerle tahmin edilebilir ve rassallık yasaları keşfedilebilir. Monte Carlo yöntemlerle keşfedilen yeni olgulara ilişkin olasılıklara dayalı bilgi, yaşam güvenliği ve niteliğinin olumlu yönde artacağını söylüyorsa, söz konusu sanal gerçek olgusal dünyaya aktarılır. Evrensel gerçeğe ilişkin bilişsel kavrayışımız, salt matematik dili ile tanımlanan matematiksel gerçeğin düşünsel gerçeği; matematiksel gerçeğe rassallık boyutu kazandırarak tanımlanan istatistiksel gerçeğin de olgusal gerçeği keşfetme gücü ile doğru orantılı olarak giderek artmaktadır. Evrensel gerçeği kavramaya çalışan tüm bilimlerin ve onun güzelliğini anlatmaya çalışan tüm güzel sanatların olgusal dünyada ürettikleri, matematiksel gerçeğe dönüştürülebilen düşünsel gerçekle, istatistiksel gerçeğe dönüştürülebilen olgusal gerçeğin örtüştüğü sanal gerçekler, giderek daha geniş bir boyutta, olgusal dünyamızı ve düşünsel dünyamızı biçimlendiriyor.

Gerçek ve sanal gerçeğe ilişkin bilgimizi ayıran kesin bir sınır da yoktur. Tümevarımla ulaştığımız olgusal dünyaya ilişkin genellemelerimizi, bir kuram altında toplarken, bu kuramın tutarlılığını sağlamak için doğruluğu a priori kabul edilerek öne sürülecek önermeler, olgusal dünyadan tümü ile kopuk yeni önermelerle yalnızca matematiksel olarak kanıtlanabilir üst düzeyde *icat edilen* önermeler değil, aynı zamanda gelecekte deneysel yoldan da yanlışlanabilir *keşfedilen* önermeler olmalıdır. Çağdaş bilim, gerçek ve sanal gerçeğe ilişkin bilgimizi, zaman içinde sanal gerçeği gerçeğe dönüştürerek ilerleyen devingen bir denge üzerinde yürümektedir. Bu nedenle, tüm bilimlerin ortak dili olan matematik başta olmak üzere, tüm bilimler çağdaşlığın gereği olan bu dengeyi hiçbir zaman unutmamalı ve gözden kaçırmamalıdır.



Şekil 6. “Bir şekil bin söze bedel.” - Çin Atasözü

5. KAYNAKLAR

- Ata, M. Y. (2006), “Sanal Bir Deney Laboratuvarının Tasarımı ve Uyarlanması İlk Adımlar”, **G.Ü. Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi Dergisi**, 18(1).
- Blatner, D. (2003), **Pi Coşkusu**, 3.Basım, Çev. N.Arık, TÜBİTAK, Ankara.
- Box, G. E. P. (1976), Statistics and Science, **Journal of the American Statistical Association**, 71(356).
- Box, G. E. P., Muller, M. E. (1958), “A Note on the Generation of Random Normal Deviates” **The Annals of Mathematical Statistics**, 29.
- DeGroot, M. H. (1975), **Probability and statistics**, Addison-Wesley, California.
- Hacking, I. (1975), **Emergence of Probability**, University Pres. Bristol, Cambridge. Hewson, S. F. (2003), **A Mathematical Bridge-An Intuitive Journey in Higher Mathematics**, World Scientific Publishing, Co.Pte.Ltd., New Jersey.
- Heidemann, J. (2006), “Rational Approximations to π ”, <http://www.isi.edu/~johnh/index.html>
- Hooper, A. (1948), **Makers of Mathematics**, Random House, Inc., New York. 60-62.
- Koç, S. (1996), “Gizemli Bir Sayı, π ”, **Bilim ve Teknik**, Sayı:340, TÜBİTAK, Ankara.
- Poincaré, H. (1998), **Bilim ve Hipotez**, Çev. F.Yücel, MEB, İstanbul.
- Ross, S. M. (2002), **Simulation**, Academic Pres., San Diego.
- Wikipedia (2006), <http://www.m-w.com/cgi-bin/dictionary?book=Dictionary&va=para-meter>.
- Yıldırım, C. (1991), **Bilim Felsefesi**, 3. Baskı, Remzi Kitabevi, İstanbul.