DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN BAZI SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Yrd. Doç. Dr. Mine AKTAŞ*

Özet

Bu makalede, Bernstein polinomları kullanılarak Diferensiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri verilir.

SOME NUMERICAL METHODS FOR THE SOLUTIONS OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

In the present paper, using the Bernstein polynomial, we give some numerical methods for the solutions of some differential equations.

ANAHTAR KELİMELER : Bernstein, polinom, Diferensiyel, denklem.

KEY WORDS : Bernstein, polynomial, differential, equation.

1. Giriş:

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

diferensiyel denklemini için;

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

başlangıç şartı verilsin. Aşağıda verilen (y_n) fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$y(x_0) = y_0$$

* Yrd.Doç.Dr. Mine AKTAŞ Gazi Üniversitesi Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi

$$y_n(x) = y_0 + \int_{a+x_0}^{x} B_n\left(s; f\left[s; y_{n-1}(s)\right]\right) ds \qquad , n = 1,2,\ldots \tag{3}$$

$$B_n(x,\varphi) = \frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \varphi\left(a + x_0 + \frac{ih}{n}\right)\left(x-(a+x_0)\right)^i (a+x_0+h-x)^{n-i} \tag{4}$$

Burada $B_n(x,\varphi)$, φ fonksiyonuna ve $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığına karşı gelen Bernstein polinomudur. Bazı şartlar dahilinde (3) dizisinin $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında (1) diferensiyel denkleminin $y(x)$ çözümüne düzgün yakınsadığını gösterelim.

ŞARTLAR: Kabul edelim ki (1) diferensiyel denklemdeki $f(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

α) $f(x,y)$, $a + x_0 \le x \le a + x_0 + m$, $y_0 - n \le y \le y_0 + n$, $m,n > 0$ eşitlikleriyle tanımlanmış bir D bölgesinde süreklidir ve bu bölgede y değişkenine göre L sabiti ile Lipschitz şartını sağlar, yani

$$\left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|$$

dir.

β) $M = \max_{(D)}\left|f(x,y)\right|$, $h \le \min\left\{m, \frac{n}{m}\right\}$, $h < \frac{2}{L}$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif sayı olsun.

γ) D^*, $a + x_0 \le x \le a + x_0 + m$, $y_0 - n \le y \le y_0 + n$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bir bölge olsun. $f(x,y)$ fonksiyonunun D^* bölgesinde birinci ve ikinci basamaktan sürekli kısmi türevleri vardır. Aşağıda (1) diferensiyel denkleminin (2) şartını sağlayan çözümünü $y(x)$ ile göstereceğiz.

TEOREM: α, γ, β şartları dahilinde (3) dizisi $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında $y(x)$ çözümüne düzgün yakınsar.

İSPAT:

1) $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında keyfi x için n.inci ardışık yaklaşım var ise

$$y_0 - n \le y(x) \le y_0 + n \quad , \quad n = 1,2,\ldots \tag{5}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten de n=1 için $\xi \in (a+x_0, a+x_0+h)$ olmak üzere

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| y_0 + \int_{a+x_0}^{x} B_1(s; f[s; y_0(s)])ds - y_0 \right|$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{a+x_0}^{x} B_1(s; f[s; y_0(s)])ds \right| \le \int_{a+x_0}^{x} |B_1(s; f[s; y_0(s)])|ds$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le (x - (a+x_0))|B_1(\xi; f(s; y_0(s)))|$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le (x - (a+x_0))|B_1(s; M)|$$

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &\le (x - (a+x_0))|B_1(s; M)| \\ &= M(x - (a+x_0)) \le Mh \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$|y_1(x) - y_0(x)| < h$$

elde edilir. Burada belirli integraller için ortalama değer teoremi kullanıldı. Kabul edelim ki n.inci ardışık yaklaşma mevcut olsun ve $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında (5) eşitsizlikleri sağlansın.

Ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_0(x)| &\le \int_{a+x_0}^{x} |B_1(s; f[s; y_n(s)])|ds \\ &= |B_{n+1}(\zeta; f[s; y_n])| \int_{a+x_0}^{x} ds \\ &= |B_{n+1}(\zeta; f[s; y_n])|(x - (a+x_0)) \\ &\le M(x - (a+x_0)) \le n \quad , \quad x \in [a+x_0, a+x_0+h] \end{aligned}$$

bulunur.

Tümevarım yöntemine göre (5) eşitsizlikleri $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında keyfi n için vardır.

2) (3) dizisinin yakınsaklığı;

$$y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)] \tag{6}$$

serisinin yakınsaklığına denktir. Bu serinin $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında bu seri düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Bu serinin genel terimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \epsilon_n(x) &= y_{n+1}(x) - y_n(x) \\ &\le \int_{a+x_0}^{x} |B_{n+1}(s; f[s; y_n(s)])| - |B_n(s; f[s; y_{n-1}(s)])|ds \end{aligned}$$

$$\epsilon_n(x) \le \int_{a+x_0}^{x} |B_{n+1}(s; f[s; y_n(s)]) - B_n(s; f[s; y_n(s)])|ds$$

$$+ \int_{a+x_0}^{x} |B_n(s; f[s; y_n(s)]) B_n(s; f[s; y_{n-1}(s)])|ds \tag{7}$$

Arama (1957) deki (1.2) formülünü ve T.Popoviciu (1953) tarafından ispatlanmış ortalama değer teoremini kullanırsak birinci integrali aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$I_1(x) = \int_{a+x_0}^{x} \left| B_{n+1}\left(s; f\left[s; y_n(s)\right]\right) - B_n\left(s; f\left[s; y_n(s)\right]\right) \right| ds \tag{8}$$

$$I_1(x) \leq \int_{a+x_0}^{x} \frac{\left(s-(a+x_0)\right)\left(a+x_0+h-s\right)}{2n(n+1)} \max_{D^*} \left| \frac{d^2}{dx^2} f\left[x, y_n(x)\right] \right| ds$$

Aşağıdaki gösterimleri kullanalım.

$$M_1 = \max_{D^*}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \qquad M_2 = \max_{D^*}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \qquad M_{11} = \max_{D^*}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$$

$$M_{12} = \max_{D^*}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| \qquad M_{22} = \max_{D^*}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$$

Lorenz'in (1953)'deki

$$\frac{d}{dx} B_n(x,\varphi) - \frac{1}{h^{n-1}} \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i} \left[a+x_0+\frac{ih}{n}, a+x_0+\frac{(i+1)h}{n}; \varphi \right] \left(x-(a+x_0)\right)^i \left(a+x_0+h-x\right)^{n-i}$$

formülünü kullanırsak [0,1] aralığındakine benzer olarak

$$y_n(x) = \int_{a+x_0}^{x} B_n\left(s; f\left[s; y_{n-1}(s)\right]\right) ds$$

$$\left[y_n(x)\right]_x \leq M$$

$$\left[y_n(x)\right]_{xx} \leq M$$

olduğundan

$$\max_{D^*} \left| \frac{d^2}{dx^2} f\left[x, y_n(x)\right] \right| \leq M_{11} - M_{12} + M\left(2M_{12} + M_2^2 + MM_{22}\right) - N_2$$

elde ederiz. Buradan

$$I_1(x) \leq \frac{N_2}{2n(n+1)} \int_{a+x_0}^{x} \left(s-(a+x_0)\right)\left(a+x_0+h-s\right) ds$$

$$I_1(x) \leq \frac{hN_2}{4n(n+1)} \left[x-(a+x_0)\right]^2 \tag{9}$$

elde edilir. (10)'daki integralin içindeki ifadeye Lipschitz eşitsizliğini uygularsak

$$I_2(x) = \int_{a+x_0}^{x} \left| B_n\left(s; f\left[s; y_n(s)\right]\right) - B_n\left(s; f\left[s; y_{n-1}(s)\right]\right) \right| ds$$

$$I_2(x) \leq \int_{a+x_0}^{x} B_n\left(s; L\left|y_n(s) - y_{n-1}(s)\right|\right) ds$$

$$I_2(x) \leq \int_{a+x_0}^{x} B_n\left(s; B_n\left(s; \varepsilon_{n-1}(s)\right)\right) ds \tag{10}$$

buluruz. (7), (8), (10) dan

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{h\left(x-(a+x_0)\right)^2}{4n(n+1)} N_2 - L \int_{a+x_0}^{x} B_n\left(s; \varepsilon_{n-1}(s)\right) ds \quad , \quad n = 1,2,\ldots \tag{11}$$

elde edilir.

$$\varepsilon_0(x) \leq M\left(x-(a+x_0)\right) = \delta_0(x)$$

dir. (11)'ü kullanırsak

$$\varepsilon_1(x) \leq \frac{h\left(x-(a+x_0)\right)^2}{4.1.2} N_2 + L \int_{a+x_0}^{x} B_1\left(s; \varepsilon_0(s)\right) ds$$

(4) kullanılırsa

$$B_1(s;\varepsilon_0(s)) = \frac{1}{h}\left[\varepsilon_0(a+x_0)(a-x_0+h-s)+\varepsilon_0(a+x_0+h)(s-(a+x_0))\right]$$

bulunur.

$$\varepsilon_0(x) < M(x-a+x_0)$$

idi. Buradan

$$\varepsilon_0(a+x_0)=0$$

bulunur. O halde

$$B_1(s;\varepsilon_0(s)) = \frac{1}{h}\left[\varepsilon_0(a+x_0+h)(s-(a+x_0))\right]$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa

$$\varepsilon_1(x) \le \frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.1.2}N_2 + \frac{L}{h}\int_{a+x_0}^{x}\varepsilon_0(a+x_0+h)(s-(a+x_0))ds$$

$$\varepsilon_1(x) \le \frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.1.2}N_2 + \frac{L}{h}\varepsilon_0(a+x_0+h)\frac{(x-(a+x_0))^2}{2} \qquad (12)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_0(a+x_0+h) = Mh$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\varepsilon_1(x) \le \frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.1.2}N_2 + \frac{1}{h}\frac{LMh}{2}(x-(a+x_0))^2$$
$$\varepsilon_1(x) \le \left[\frac{hN_2}{4.1.2}+\frac{LMh}{2}\right](x-(a+x_0))^2 = \delta_1(x)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_2(x) \le \frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.2.3}N_2 + L\int_{a+x_0}^{x}B_2(s;\delta_1(s))ds$$

olduğu açıktır. $\delta_1(x)$ ifadesinin $[a+x_0, a+x_0+h]$ aralığında birinci basamaktan konveks olduğunu ve Popoviciu (1953) deki teorem 1'i kullanırsak (bak[2])

$$0 \le B_2(s;\delta_1(s)) \le B_1(s;\delta_1(s))$$

buluruz. Buna göre

$$\varepsilon_2(x) \le \frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.2.3}N_2 + L\int_{a+x_0}^{x}B_1(s;\delta_1(s))ds$$

çıkar.

$$B_1(s;\delta_1(s)) = \frac{1}{h}\left[\delta_1(a+x_0)(a+x_0+h-s)+\delta_1(a+x_0+h)(s-(a+x_0))\right]$$

dir.

$$\delta_1(s) = \left[\frac{h}{4.1.2}N_2+\frac{LM}{2}\right](s-(a+x_0))^2$$

olduğunu biliyoruz.

$$\delta_1(a+x_0)=0$$

dır. Buradan

$$B_{\cdot}(s;\delta_{\cdot}(s))=\frac{1}{h}\delta_1(a+x_0+h)(s-(a+x_0))$$

olduğu görülür. Böylece

$$\varepsilon_2(x)\le\frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.2.3}N_2+\frac{L}{h}\int_{a+x_0}^{x}\delta_1(a+x_0+h)(s-(a+x_0))ds$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\varepsilon_2(x)\le\frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.2.3}N_2-\frac{L}{h}\delta_{\cdot}(a+x_0+h)\frac{[x-(a+x_0)]^2}{2}$$

$$\varepsilon_2(x)\le\left[\frac{h}{4.2.3}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_1(a+x_0+h)}{h}\right][x-(a+x_0)]^2$$

$$=\delta_2(x)$$

çıkar. Benzer şekilde

$$\varepsilon_3(x)\le\frac{h(x\quad(a+x_0))^2}{4.3.4}N_2+L\int_{a+x_0}^{x}B_3(s;\delta_2(s))ds$$

$$\varepsilon_3(x)\le\frac{h(x-(a+x_0))^2}{4.3.4}N_2+L\int_{a+x_0}^{x}B_1(s;\delta_2(s))ds$$

$$\varepsilon_3(x)\le\left[\frac{h}{4.3.4}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_2(a+x_0+h)}{h}\right][x-(a+x_0)]^2$$

$$=\delta_3(x)$$

bulunur. Devam edersek

$$\varepsilon_n(x)\le\left[\frac{h}{4n(n+1)}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_{n-1}}{(a+x_0+h)h}\right][x-(a+x_0)]^2=\delta_n(x) \qquad (13)$$

elde edilir. Buradan

$$\delta_n(a+x_0+h)=\frac{Lh}{2}\delta_{n-1}(a+x_0+h)+\frac{h^3}{4n(n+1)}N_2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha=\frac{Lh}{2}\ ,\ \beta=\frac{h^3}{4}N_2$$

olmak üzere

$$\delta_n=\alpha\delta_{n-1}+\frac{\beta}{n(n+1)} \qquad n=1,2,\ldots \qquad (14)$$

$$\delta_0=Mh$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikleri kullanırsak

$$\alpha=\frac{Lh}{2}\le 1$$

olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(a+x_0+h)$ serisi yakınsaktır ve

$$S=\frac{\delta_0+\beta}{1-\alpha}$$

$$S=\frac{Mh+\frac{h^3}{4}N_2}{1-\frac{Lh}{2}}$$

dır. (13) den görülür ki $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(a+x_0+h)$ serisi $[a+x_0,a+x_0+h]$ aralığında $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(x)$ fonksiyon serisi için Majorant seridir. Dolayısıyla (3) fonksiyon dizisi bu aralıkta $y(x)$ fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır. $n\to\infty$ iken (3) eşitliğinden

$$y(x) = y_0 + \int_{a=x_0}^{x} f[s; y(s)]ds$$

buluruz. Bu da gösteriyorki $y(x)$ fonksiyonu (1) denkleminin (2) şartını sağlayan çözümüdür.

KAYNAKLAR

ARAMA, O., 1957. Proprietati Privind Monotonia Sirului Polinomelor de Interpolare ale lui S.N. Bernstein si Aplicarea lor la Studil Approximarii Functiilor. Acad. R.P. Rom. Fil. Cluj. Studii Cerc. Mat. 8,195-210.

LORENZ, G.G., 1953. Bernstein Polynomials, Toronto.

POPOVICIU, T., 1953. Sur L'approximation des Fonctions Convexes D'ordre Superieur. Mathematica Cluj. 10,49-54.

LORENZ, G.G., 1953. Bernstein Polynomials, Toronto.