OYUN TEORİSİ

Faruk ALPASLAN*

KARAR MODELLERINDEN OYUN TEORISI :

Herhangi bir şart altında ya da durumda karar vermenin esası iki ya da daha fazla faaliyet yahut olay dizisi arasındaki seçimdir.[1] Seçimde optimal kararı verebilmek için olaylar serisini çeşitli varsayımlarla içermek gerekir. Olayları bağımlı ve bağımsız değişken gruplarına göre sıralamak ve sonra sıra seçimleri yapmak gerekecektir.

Olaylar dizisi karar verme durumunda olan kişinin kontrolu altındaki bir ya da daha fazla inputlardan oluşur ve kararın sonucu sadece bu kişinin davranışına değil, kontrolu altında olmayan inputlara da bağlıdır. Her elverişli olayı "A_i" ile gösterelim. Kontrol edilemeyen değişkenleri de "B_j" ile gösterirsek her mümkün olay ve doğal durum değişkeni için tek bir sonuç, "S_{ij}" vardır. Bu ifadeleri bir matrix ile gösterebiliriz. [2]

Karar matrix'i :

Doğal durum / Olaylar dizisi	B_1	B_2
A_1	S_{11}	S_{12}
A_2	S_{21}	S_{22}

Oyunlarda tarafların her hamle sonunda birbirine ödedikleri veya ödemeye mecbur kaldıkları miktarlara oyun parası veya ödeme denir. Bir taraf ödese, diğer taraf alsa dahi alan tarafınki pozitif olmak üzere her iki tarafta ödedi veya ödemede bulundu denir. [3]

(*) Atatürk Üniversitesi İşletme Fakültesi Doktora Öğrencisi.

(1) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları yayın no. 396-53. Sevinç Matbaası. Ankara 1975 s. 80

(2) Aynı eser, s. 80-81.

(3) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no. 730 Gümüşsuyu İst. 1968 s. 107.

Bu nedenle matrix'te "ödemeler matrix'i" yada "sonuç matrix'i" olarak isimlendirilir. (4)

Karar matrix'i ile herhangi bir seçme durumu karşısında karar vermenin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Herhangi bir olay ve buna bağlı olarak seçenek bir veya tek taraflı ise, konu ve seçenek hakkında karar verme yoluna gidilmez. Dolayısiyle olay tek yönlü ise ve problemin bu yönüyle ilgilenilmediği durumlarda ortada çözümü aranacak bir problem de kalmayacaktır. Olayın sonucu bütünüyle iyi veya kötüdür. O halde karar verme işlemi aşağıdaki gibi izah edilebilir. (5)

1 — Bir şahıs veya bir grup şahıslar için tercih etmek veya maksada uygun bir konu seçmek durumu vardır.

2 — Bu şahıslar, hadiselerin muhtelif durumları ile karşı karşıyadırlar. Bu yönlerden bazıları onlar için iyidir, isteklerine yakındır, diğer bazıları ise, onlar tarafından arzu edilmemektedir.

3 — Yine bu şahıslar, bu karşılaştıkları ve seçimini yapmak durumunda bulundukları konu ile yetinmeyip, bu konulardan en iyisini aramaktadırlar.

Aynı düşünceden hareket eden bir çok kişiler bulundukları durumlarda karar doneleri ışığında seçenekleri kullanmaya çalışacaklardır. Problemin çözümü bu çatışmalar arasında uzlaşmayı sağlamak olmalıdır. Bu uzlaşmanın saptanabilmesi de iyi bir şekilde belirlenmiş karar süreci ve unsurlarının dizilişine bağlıdır.

Karar verme sorununu ve sürecini oluşturan unsurların tümü göz önüne alınırsa izlenecek yöntemi belirlemek mümkündür. (6)

1 — Önce bir karar kriteri seçilir.

2 — Karar sürecinin mümkün sonuçları ile mümkün kararlar tanımlanır.

3 — Karar sürecinde ne tür olasılık dağılımının uygulanacağı saptanır ve karar matrix'inin inputlarına mümkün olan olasılık değerleri verilir.

4 — Faydayı ölçecek bir fonksiyon saptanır.

---

(4) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası, A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara 1975. s. 81

(5) Jr. Hanshaw. R.C., K. Gülçür, Fazıl. İstatistik karar teorileri, İhtimaller - Belirsizlikler, İst. İ.T.A. Yayınları yayın no : 48-100 Berksoy mat. İst. 1969 s. 3

(6) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim ekonomisi ve Politikası. s. 83

5 — Karar seçenekleri için bir deney yapılır.

6 — İnputlara verilen olasılıklar gözden geçirilerek deney sonuçlarına göre gerekiyorsa düzeltme yapılır.

7 — Her mümkün karar için süreç inputlarının riski hesaplanır.

8 — İnputlara verilen olasılıklar kullanılarak her mümkün kararın umulan riski hesaplanır.

9 — Minimum umulan riskli karar optimumdur.

Olayları mümkün olan bütün yönleriyle düşünmek ve sonucunun ne olabileceğini tahmin etmek, sonra en iyisini seçmek tarafları çelişkili kılabilir. Bu nedenle oyun teorisi karar verenin veya seçim yapanın kazancını maxsimize, kayıplarını ise, minimize etmek esasına bağlıdır. Bu nedenle her bir tarafın belli stratejilerinin olacağı doğaldır.

Oyuncular oynamayı kabul ettiklerinde oyunun başlamasıyla kayıp ve kazançlarını düşüneceklerdir. Oyun esnasında tarafların birbirlerinin nasıl oynayacaklarından haberleri olmayabilir. Daha önce taraflar kendi aralarında aynı oyunu oynamışlarsa, deneysel tahminler olabilecektir. Taraflar oyunu, oyun kurallarına uyacak biçimde oynamalıdırlar. Uyulması gerekli olan hareketlerin tümüne oyun denir.

Tarafların belli bir oyunda seçecekleri hareketlerin tümüne strateji de denir. Diğer bir ifade ile strateji, bir oyuncunun eylemler setidir... Oyuncunun önceden belirlenmiş seçim yapma yöntemleridir. (7)

Stratejiler alt stratejiler olabildiği gibi alternatif de olabilir. Oyun sırasındaki hareketlerin bir kısmında bir oyun (alt strateji) diğerinde diğer bir oyun uygulanırsa, karma strateji izleniyor denilebilir. Oyuncu tarafından yalnız ve yalnız tek bir strateji hamlesi de olabilir. (saf strateji). Oyunda tarafların belli bir gayeleri vardır. Bu gayeleri gerçekleştirmedeki etkenliği ölçmek için yine belli bir ölçü seçilebilir. Bu seçilen ölçüye tesirlilik ölçüsü denir. Tarafların çeşitli stratejileri için birbirlerine yapacakları ödemelerin bir tablo halinde gösterilmesine oyunda ödemeler matrix'i adı verildiğini belirtmiştik.

Çok sayıda oyuncuların olması halinde matrix çoklu hatta uzay matrix'i olarak alınır. Bu gibi durumlarda stratejiler sonsuz limite gidecek ve optimal çözüm sonsuza akarak sonsuz değer alacaktır.

Ödemeler matrix'inde maximin ve minimax stratejilerde bulunabilir. Oyunda Max-min, matrix'te minimum değerli stratejilerden maxi-

---

(7) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara. 1975 s. 84

mum olanını, min-max, maximum değerli olan stratejilerden minimum olanını seçmek demektir.

Oyun stratejisi gereği seçilen alternatiflerle seçim sonunda tarafların yaptığı ödemelerin toplamı sıfır veya sıfırdan farklı olabilir. Bunlara sıfır toplamlı ve sıfırdan farklı toplamlı ödemeler oyunu denir.

Oyunda oyuncuların seçenek sayıları eşit de olabilir. Bu gibi hallerde eşit olan iki taraflı oyunlara kare oyunlar, farklı olanlara farklı veya dikdörtgen oyunlar denmektedir. Oyunda ödemeler matrix'inin sıra minimumu ile kolon maximumu eşit olabilir. Eşitliğin meydana geldiği, yani max = min olduğu noktaya denge noktası denir. Böylesi matrix'lere de denge noktalı matrixler veya denge noktalı oyunlar denmektedir.

Oyunun çözümü, her oyuncu için en iyi stratejinin bulunmasıdır. En iyiden kasıt, ödeme durumunda olan oyuncunun ödenmesinin ki -matematiksel umutlar- minimum olduğu stratejidir. Başka bir deyişle, kazanan oyuncunun kazancını maximum yapan stratejisidir. [8]

OYUN TEORİSİ VE REKABET MODELLERİ :

Bir çok ekonomik problemlerde, problemin şartları tarafından empoze edilen belli sınırlamalara konu olmak kaydı ile çözüm maximum durumun tayini olarak belirir. Örneğin, bir tüketici bütçesinin dengede olması şartına bağlı olarak faydasını maximize etmek isteyebilir. Çoğu zamanlar problem alternatif olarak bir maximum veya minimum durum olarak ifade edilir. Bir firma belli bir input için maliyeti minimize eder veya belli bir maliyet için output'u maximize eder. Esas olarak çözüm doğrudan doğruya yapılabildiği gibi maximizasyon veya minimizasyon durumu da çözümde aranarak yapılabilir.

Serbest ekonominin, teorik de olsa, temel özelliklerinden birisi rekabet halidir. Bir işletmenin rakipleri vardır. Dolayısiyle de işletmenin iç problemine en iyi çözümleri bulması yetmeyecektir. Üstelik bu defa, umumiyetle kontrolü dışında olan rakiplere göre kendisini ayarlaması ve rakipleri karşısında kendisine mümkün maximum geliri (ödemeyi) temin edecek bir strateji tayin etmesi gerekecektir. [9] Son-

(8) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara 1975. s. 85.

(9) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları Yayın No. 730 Gümüşsuyu İst. 1968 s. 106

ra bir rekabet piyasasında çok sayıda alıcı ve satıcı da olabilir. Böylesi bir piyasada her fert kendi maximum getirisini elde etmeye çalışırken diğerinin davranışlarından etkilenmez.

Aynı eşkilde tek satıcının veya çok alıcının bulunduğu veya bunun tersi bir monopol veya monopson problemler de basit olarak maximum durum şeklinde ifade edilir. Bununla beraber diğer ekonomik durumlarda, Nevman ve Magenstern tarafından (1944-1954) üzerinde duruldığu gibi oldukça farklı problemler doğar. Genellikle bu gibi haller bazı menfaat çatışmalarının mevcut olduğu ve çözülmesi gerektiği durumlarda ortaya çıkar. [10]

Bu şahısların, işletmelerin bir olayda menfaatlarının karşılanması (çatışmanın çözülmesi) halinde, kendi aralarında ikili yada çoklu oyun oynamalarından başka bir şey değildir. Eğer menfaat çatışması belli bir grupların arasında cereyan ediyorsa, örneğin; piyasada belli bir alıcı ile satıcı arasında ise, piyasanın veya grupların özellikleri belirlenmelidir. Şayet piyasada bir alıcı ile bir satıcı varsa ikili monopol, iki veya daha mahdut sayıda satıcı ile çok sayıda alıcı varsa düopol veya oligopol piyasalardan söz edilecektir. Buna benzer durumlar grev ve lokavt problemlerinde ve bu problemlerin çözümünde de olabilir. Üstelik ücretlerin bir grup tarafından tayininde problemin çözümü maximum ve minimum değerlerin bulunmasıyla da halledilemez. Bu tür problemler taraflar tarafından benimsenen stratejiler açısından daha karışık sorunlar ortaya çıkarır. Örneğin; sendika ücret tayininde işverene A ve B gibi alt ve üst sınır önermişse, işveren her iki sınır aralığında nasıl davranacağını ve en uygun ücretin ne olabileceğini bazı tahminlere dayamak zorunda kalacaktır. Buna benzer olarak, piyasada A ve B gibi iki satıcı varsa A davranışlarını B nin ne yapabileceği üzerindeki bazı tahminlere göre satışını planlamak zorundadır.

Herhangi bir davraniş veya strateji gözönüne alındığında A, B nin yaptığının aksine bir davranışa kalkışabilir. O halde A, B nin tepkisinin en kötüsüne müsaade ederek en iyi strateji için karar verir. Aynı zamanda B de A nınkine benzer bir görüşle kararını verir. Böylece her iki tarafın da davranışları bir minimum veya maximum kararın beraberce bulundurulduğu min-max görüşe dayandırılmış olacaktır. Daha sonra tarafların çeşitli davranışlarının belirli bir sonucunun olup olmadığı, yani A nın min-max durumunun B nin min-max durumuyla uyup uymadığı sorusu ortaya çıkacaktır. [11]

---

(10) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New York. St martin's press. 1956. s. 493

(11) a.g.e., s. 493-494.

OYUN TEORİSİ MATEMATİĞİ :

Matematiğin genellikle konusu kontrolsuz değişkenlerdir. Yani kendi kararımızla gözönünde tutulan sistemde yapılan değişiklikler sonunda belirlenemeyen değişkenlerdir. Matematiksel problemlerde oyun teorisinde bu şekilde gözden geçirilir. Eğer oyunda iki şahıs varsa, taraflar kurallara uygun olarak oynamak ve stratejiyi sayısal olarak buna uydurmak zorundadırlar.

Bu şekilde oynanan bir oyunda, oyunculardan her biri kendi kazancını veya puanını maximize rakibininkini minimize etmeye çalışır. Oyunun herhangi bir optimum veya sabit sonucunun olup olmaması diğer oyuncununkine bağlı olacak biçimde bir oyuncu tarafından min-max duruma hedef olarak alınıp alınmamasına bağlıdır. Bu nedenle de oyun teorisinin ekonomik problemlerle ilgisi vardır. (12)

Böylece, oyun teorisi basitte olsa, matematiksel terim veya ifadelerle formülize edilebilir. Belli bir grupta hangi ekonomik problemlerin bulunduğuna teknik ilişkiler şebekesi şeklinde de tanımlanan matematiksel oyun teorisi yardım eder.

Doğrusal proğramlama ile bilinen daha genel ekonomik problemler veya hareket analizleri oyun teorisinin ekonomik uygulama alanı içinde bulunur.

İyi bir ekonamist, istatistik uzmanı, problemin en ince noktasına kadar basit hükümler ile yetinebilir. Fakat daha karmaşık problemlerde onlar matematiksel oyun teorisini kullanmakla fayda sağlarlar. (13)

İKİ ŞAHIS - SIFIR TOPLAM OYUNU VE ÖDEMELER MATRİX'İ :

Bu tür oyunlarda önceden kabul edilmesi gereken varsayımlar vardır. (14) Bunlar;

1 — Her şahıs olaylar dizisinin diğer şahıs için de var olduğunu bilir.

2 — Her şahıs olaylar dizisini ve almaşıklarını bilir.

3 — Her şahıs maximin yada minimax ölçüsünü kullanır.

---

(12) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New York. St martin's press. 1956 s. 494

(13) Yukarıda adı geçen eser. s. 494

(14) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53. Sevinç matbaası. Ankara. 1975 s. 86

Oyunda herhangi bir hareket noktası oyuncuları çeşitli alternatiflerle karşı karşıya getirebilir. Oyunun oynanmasında seçim reel alternatiflerin toplamıdır. Ödemeler, her bir hareket sonunda (hamle) oyunun sonuçlarına uygun olarak yapılır. Kaldıki ödemelerin para veya puanla olmasının hiç bir önemi yoktur. Oyunda ikiden fazla oyuncu varsa, onların herhangi birinden diğerlerine para veya puan olarak ödemelerin yapılması gerekir.

Oyunun sonunda iki şahıs sıfır toplam oyununda, oyuncu A oyuncu B den a kadar net bir miktar alırken, buna eşit olarakta oyuncu B de oyuncu A dan a = b kadar net bir miktar alacaktır. Böylece A nın a kadar pozitif bir kazancı olurken, B nin a kazancına eşit —b kadar bir kaybı olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken husus her iki oyuncu arasında olan devamlı bir ödemeler devridir. Bu devir A dan B ye olabildiği gibi ters olarak B den A ya doğru da olabilir. Pratikte daha çok kullanılan oyun şekli budur. Örneğin; Briç, iki şahıs sıfır toplam oynudur. Oyunda dört şahıs vardır. Oyuncular eşli olarak (çift-çift) oyunu oynayarak kazanç ve kayıplarını rölant ederler.

Fakat oyunda iki şahıs dahi olsa iki şahıs sıfır toplam oyunları sonlu değişkenlidirler. Hareketlerin sayıları sonlu olup, her bir hareket sayısı alternatifleri açıklar.

Oyun esnasında herbir oyuncu mevcut bilgi değerlerini değiştirebilmelidirler. Örneğin; kurallara uygun olarak oynanan bir oyunda önceden tesbit edilen veya hareket ettirilen bilgi, sadece iki sıfır toplam oyunlarında ortak olan, iki oyuncu arasındaki menfaat çatışmalarıdır. Ve bu çatışmalarda birinin kazançlarının diğerinin kayıplarının sonuçta ne olacağıdır?. ([15])

Oyunda her bir hareket ve alternatiflerin sonlu sayıları olduğunu belirtmiştik. Oyunun sonlu olması halinde oyuncuları belirleyen stratejiler sayılabilir. Bu fikirler sadece oyunun oyuncu açısından değil, gelişmedeki sınırlamalar açısından da önemlidir.

Konvex setlerin matematiksel araştırması yüksek düzeyde gelişmiş olarak oyun teorisinde vardır. Konvex set teorisi matematiğin branşı değildir. Bununla beraber oyun teorisinde elde edilmeye çalışılan yaklaşımlar basit ve fakat geneldir. Basit teknik hesaplamalar 1952 yılında Mc Kinsey ve 1954 yılında Williams tarafından herkesce sevilen ve benimsenen biçimde geliştirilmiş olarak verildi. ([16]) Kural-

(15) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New York. St martin's press. 1966 s. 495
(16) Adı geçen eser s. 496

lara uygun olarak oynanan bir oyunda iki şahıs (A ve B) varsa, A, m stratejilerini seçerken (r = 1, 2, ... m) B de n stratejilerini seçer (s = 1, 2, ... n). Otomatik olarak bir defasında A, B nin, B de A nın stratejilerini seçer.

Oyunculardan herhangi birisi diğerinin stratejisini seçerken kendi stratejisinden vazgeçme zorundadır. Böylece herbir oyuncunun stratejileri numaralandığı gibi sayılma olanağıda bulunabilecektir. Oyunda bir hamle varsa, numaralama işlemi basit olarak yapılır ve buda yeterlidir. Hareket anında A, sonlu alternatif sayıları tercih ederse (r = 1, 2, ... m) B de açıkça sonlu alternatif sete sahip olacaktır. (s = 1, 2, ... n) Oyun kurallarına uygun olarak demekki; A, r sayısını B de s sayısını sabit olarak tercih edecektir.

Herhangi bir oyunda bütün farklı stratejileri pratik olarak numaralamak zor olabilir. Fakat bu işlemin yapılmasında bütünüyle kavramsal olunulsa bile güç değildir. Müsaade edilmiş oyunda A tarafından seçilmiş r. nci strateji ve B tarafından seçilmiş s. nci strateji oynanabilir. Oyunda B olan A tarafından alınan $[a_{rs}]$ miktarı olmalıdırki, karar verilen r ve s de $[a_{rs}]$ de positif-negatif veya sıfır olabilsin.

Oyunda, (mxn) farklı yollarla oynamak için ve herbir oyuncunun sonlu ödemeleri a_{rs} (r = 1, 2, ... m,, s = 1, 2, ... n) vardır. Bu miktarlar A nın ödemeler matrix'inde düzenlenmiştir. [17]

$$A = [a_{rs}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Burada B için ödemeler matrix'i $B = [b_{rs}]$, $b_{rs} = a_{rs}$ Böylece $B = -A$ dır

Şimdi ödemeler matrix'inin yorumunu yapmaya çalışalım. Sıralar, A tarafından seçilen alternatif birimleri gösterir. Ayrıca A nın herbir stratejisi için bu sıraların toplamı m dir. Sütunlar ise B tarafından seçilen alternatif birimleri belirler. B nin herbir stratejisi için kolonların toplamı n dir. Yukarıdaki matrix'te sıra ve sütunlar toplam a_{rs} şeklinde gösterilmiştir.

Yukarıda açıklamaya çalıştığımız iki şahıs sıfır toplamlı oyun teorisinin daha iyi anlaşılması için bir örnek çözüm yapalım.

A ve B gibi iki oyuncu olsun. A nın stratejileri m_1, m_2, m_3 B nin stratejileri n_1, n_2, n_3 olarak kabul edilsin. Şayet A kendi m_1 strate-

(17) D. Allen, R. G. Mathematıcal Economıcs. London, Mac mıllan and co LTD. Newyork. St martın's press. 1956. 2. 496

jisini seçerse B ye 10 TL, B kendi n_1 stratejisini seçerse A ya 5 TL ödüyor. A kendi m_2 stratejisini seçerse B ye 5 TL, B kendi n_2 stratejisini seçerse A ya 15 TL ödüyor. A kendi m_3 stratejisini seçtiğinde B ye 5 TL, B kendi n_2 stratejisini seçtiğinde A ya 10 TL ödüyor. Bu durumda A ve B nin optimal stratejisi nedir?

Yukarıda verilen doneleri tablo halinde gösterelim.

Oyuncular

	A	B		A ve B nin ödemeleri	
St.	m	—	$m_1 n_1$	A→B	10 TL.
	m_2	—	$m_1 n_2$	B→A	10 TL.
	m_3	—	$m_3 n_1$	A→B	5 TL.
	—	n_1	$m_3 n_2$	A→B	10 TL.
	—	n_2	$m_3 n_1$	B→A	15 TL.
	—	—	$m_3 n_2$	B→A	10 TL.

Şimdi ödemeler tablosunu düzenleyelim.

oyuncu B

	Seçim	n_1	n_2
Oyuncu A	m_1	- 10	10
	m_2	- 5	15
	m_3	5	20

Her iki tarafta kazancını maximum kılmaya çalışacaktır. B oyuncusunun n_1 ve n_2 diye iki hareket tarzı vardır. n_2 ödemeleri daima pozitiftir. Dolayisiyle B, n_2 yi seçmeyecek daima n_1 i seçecektir. Bu A için $r_A = +10$ dur ve A nın en düşük değeridir. O halde oyunun minimum değeri $+10$ dur. Yani $\min_{SB} = +5$ dir. En yüksek değerler ise tek olup $\max_{SB} = -10$ dur. Bu A için $r_a = +10$ dur. Ayrıca A için endüşük değerdir. O halde A nın optimal stratejisi m_3, B için optimal strateji n_1 dir. Bu stratejilerin seçimi halinde oyunun değeri 5 dir.

İki Şahıs-Sıfır Toplam oyunlarından beklenilen ve oyunda saf ve Karma **Stratejiler** (Oyunun olasılığı, saf ve karma stratejileri) :

Klasik yada objektif anlamda olasılık, birbirine benzemeyen ve belirlilik ile kişisel olarak tahmin edilemeyen, fakat oransal frekanslar şeklinde tanımlanabilen bir tekrarlama sürecidir. Daha teknik bir deyimle olasılık., bir radyom serisinde, denemeler sonsuza yaklaştığında frekansın limit değeridir. (18)

---

(18) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. YYayın no: 396-53. Sevinç Matbaası Ankara. 1975 s. 99

Olasılık kavramı her an rastlanan ve en çok kullanılan kavramdır. Olasılık teorisi kesin ispatın mümkün olmadığı durumlarda kullanılır. Kesin neticeye ulaşmanın sağlanamadığı problemler hakkında kararların tümünün gerçekleşme oranı matematiksel karar ve umutların derecesini belirten ve değerlendiren tüm kuralları içerir. O halde problem hakkında kesin hükme varmak için eldeki bilgi ve donelerin noksan olduğu hallerde olasılıklar teorisi uygulanır.

Herhangi bir olayın olasılığı genellikle E (A) şeklinde ifade edilir, ve E (A) = A şeklinde gösterir. A olayının tekrarlanma sayısı 1,2, ...∞ kadar gidebilir. Tekrarlanan olayın deneme sayısı, değişkenlerden bir veya birkaçının değişken olarak olasılık dağılımında bulunan değeriyle ters orantılıdır. Yani tekrarlanan olay sayısı toplam olarak X_i ise, deneme sayısı bir defada $1/n(X_i)$ ile ifade edilir. Demekki bir A olayının tekrarlanma sayısı limite yaklaştığında olayın olasılığı;

$$E(A) = \text{Lim}\, x \rightarrow \infty \text{ için } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ olmaktadır.}$$

Buradan da lim $\Sigma\, X_i/n$ bağıntısı yazılabilmektedir.

Bir şans sürecinin işleyişinden doğan bir kütle A + B elementlerinden oluşur veya oluştuğu varsayılır. Bir element radyom olarak seçilmiş ise başarı olasılığı A/A + B dir. Yani başarı sayısının bütün kütle sayısına oranıdır. (19)

Oyunlarda tarafların karşı stratejiler ışığında kayıpları veya kazançları umumiyetle farklı olmaktadır. Bu bakımdan da mümkün en-az kazançların en büyüğüne tekabül etmek üzere maximum ve mümkün en fazla kayıpların minumuma tekabül etmek üzere minimax kavramları kullanılmakta, bu mefhumlarda bu tip oyunların kolayca çözümlerini bulmakla kullanılmaktadır. (20)

Oyunlarda olasılığın toplam maximum değeri 1 olmaktadır. Yani E (~ A), A olayının vuku bulmama olasılığı ise, diğer bir deyişle oyuncu A nın başarısızlığı ise toplam daima sıfırdan büyük olmalıdır.

$$E(A) + E(\sim A) = 1$$

---

(19) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. yayınlar yayın no: 396-53 Sevinç matbaası. Ankara. 1975 s. 99

(20) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no: 730 Gümüşsuyu-İşt. 1968 s. 109

Olaylar serisi sonsuza kadar gidebilir. Bu taktirde olaylar toplamının olasılı değeri yine 1 e eşit olacaktır.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \text{ veya } \lim_{x \to \infty} \frac{\Sigma X_i}{n} = 1 \text{ olmalıdır.}$$

A olayının olasılığı ile, A olayının vuku bulmama olasılığının 1 e eşit olması iki değişken arasında linear ilişki doğurur.

E (A) + E (~ A) = 1 buradan

E (A) = 1 — E (~ A) veya E (~ A) = 1 — E (A)

Olaylar serisinde iki olay varsa bunların olasılı toplamlarının olasılı vuku bulmama toplamlarına eşit olacağı söylenebilir,

E (A veya B) olayları varsa;

E (A U B) = E (A) + E (B) buradan

E (A ∩ B) = [E (A) + E (B)] = [E (A) + E (B) —E (A, B)] A, B ε E olmak üzere, iki olayın çarpımları bireysel olasılıkların çarpımına eşittir.

E (AUB) = E (A) . E (B)olayları birbiri ile bağımlı ise, yani A ←→ B ise, o taktirde olayların olasılı oranları bağlı olayla çarpılacaktır.

E (A ∩ B) = E (A). E (B/A) buradan

E (B/A) = E (A∩B)/E (A) bulunur, A → B ise,

E (B/A) = E (B). E (A/B) : E (A) yazılabilir. Buradan marjinal olasılık bulunabilir.

E (B). E (A/B) = E (A U B) — P (A). E (A/B)

E (A U B) = E (A) + E (B) — E (A,B) idi. O halde yukarıdaki eşitlik,

C = E (A) + E (B) — E (A, B). E (A/B) Şeklinde yazılabilir.

C = E (A) [1 - E (B)] + E (B). E (A/B), E (A/B) = E (A)/E (A). E (B) yazılacak olunursa,

C = E (A) [1 — E (B)] + E (B). E (A) / E (A). E (B) buradanda

C = E (A) [1 — E (B)] + E (B). E (A)/E (A)/E $(B)^{-1}$ ve

C = E (A) [1 — E (B)] bulunur.

1 — E (B) = P (—B) dir, O halde E(A) = P (~ B) bulunur.

E (A) P (~ B) = E (A, B) + E (A, ~ B) dir.

Olasılık dağılımının matematiksel ortalaması oyunun beklenilen değeridir ve $MU = \sum_{i=1}^{n} U_i E_i$ ile gösterilir.

A ve B oyuncularının ödeme matrix'i aşağıdaki gibi olsun :

B \ A	A	B	T
A	5	10	15
B	15	18	33
T	20	28	58

Şimdi herbir oyuncunun oyunda kazanma olasılıklarını bulalım.

E (A) = 20/58 = 10/29 A nın kazanma olasılığı

E (B) = 28/58 = 14/29 B nin kazanma olasılığı

E (A, A) = 5/58

E (B,∼ A) = 18/58 = 9/29

E (A,∼ A) = 15/58

E (A) = E (A, A) + E (A,∼ A) = 5/58 + 15/58 = 20/58

E (A/A) = E (A, A)/ E (A) = 5:20/58 = 5 x 58/20 = 58/4 = 14,5

E (A,A) = 5/58 idi. Buna karşılık B nin A ya göre oynaması halinde;

E (B, ∼ A) = 18/58 = 9/29

Marjinal olasılık ise;

E (A) = E (A, A) + E (A,∼ A) = 20/58

Şartlı olasılık ise;

A nın oynadığını varsayarak: E (A/A) = E (A, A)/E (A) = 5/58 : 20/28 $= \frac{1}{4}$

B nin oynadığını varsayalım :

E (B/B) = E (B,B)/ E/B) = 10/58 : 28/58 = 10/28 = 5/14 bulunur.

Eğer oyunda ödemeler matrix'i $A = [a_{rs}]$ ($r = 1,2, \ldots\ldots m$) ise, her iki oyuncu tarafından seçilen stratejilere uygun $s = 1,2 \ldots\ldots n$ olarak oyuncu A vasıtasiyle ödenen miktar a_{rs} olur demiştik. B nin amacı E yi mümkün olduğu kadar küçük yaparak rakibinin strateji modelini seçmektedir.

Oyuncu A veya B bir tek strateji seçiyorlarsa, seçilen strateji her iki oyuncunun saf stratejisidir. Oyuncu A saf stratejisini tekrar tekrar oynarsa, ayrıca oyuncu A benzer stratejileri seçmişse bu taktirde rakibinin bütün alternatiflerini oyunda açıklıyacaktır. Şayet oyunda A ve B kendi saf stratejilerini seçmişlerse oyunu kurallara uygun olarak oynasalar bile hiçbiri diğerine benzemeyecektir.

Oyuncu A, B nin stratejileri için r_{th}, B, A nın stratejileri için s_{th} değerini ödemeler matrix'ine adapte eder ve bu a_{rs} ile gösterir. Böylece bu durumun eşitlik değeri (fonksiyon olarak ve herbir oyuncu için);

$$E(r, s) = a_{rs} \quad (r = 1,2, \ldots\ldots m, \ s = 1,2, \ldots\ldots n)$$ yazılabilir.

A, amaç olarak r yi seçtiği zaman E mümkün olduğu kadar genişler Basit bir ifade ile eğer B, s yi seçerse A tarafından seçilen r ile E yi mümkün olduğu kadar küçültmeye teşebbüs eder. (21)

Sorun, r ve s nin hangi seçimlerle optimal olacağıdır. Bu nedenle çözüme gidilirken saf stratejiler alınmaya çalışılır. Saf stratejilerin kullanımıyla oyun teorisinin çözümü enteresan değildir. Oyun setinde oynama esnasında kesif alanlarda optimal sonuç elde edilebilir.

Daha önemli sorun, kurallara göre oynanmış oyunda her bir oyuncunun adapte ettiği farklı stratejilerde, birbirini izleyen oyunları aramalarıdır. Eğer bir oyunda karma strateji varsa, karma stretiji içeren oyun kuralara göre oynanmış oyundan başka diğer birçok modelleri de birleştirir. Bu model açısından problemlere bakıldığında tarafların strateji düzenlerinin yerinde olmadığı görülür. Bu gibi hallerde stratejiyi oransal olarak görmek yerine tesadüfi değişken kombinasyonları teşekküllerine getirmek yerinde olacaktır. Diğer bir ifadeyle strateji oluşmaları yerine bu gibi hallerde tesadüfi oluşmalar daha çok olacaktır. Örneğin; modelde oynanabilecek 20 strateji varsa, oyunculardan herhangi birisi birinci stratejiyi oynamak istediğinde, 20. nci stratejiyi oynamak yerine 21. nci stratejiyi seçmek isteyebilir. Dolayısiyle tahminde E daha çok karmaşık olur.

İki oyuncunun stratejilerinin nasıl ve ne biçimde olacağı hususunda oyuncuların ödeme değerlerine bağlı olarak karma strateji çoğuzaman olabilir. İki değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi bağımlı olan bu değişkenlerin formülize edilmesi kolay olmaktadır.

Birçok halerde bir oyuncunun birtek stratejiyi takibetmesi en iyi neticeyi vermez. Bu durumda hiç bir tepe noktası (oyunlarda taraflar için en iyi bir veya birkaç strateji noktası) mevcut değildir

(21) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and and co LTD Newyork. St martın's press. 1956. s. 499

Böyle durumlarda herbir oyuncunun kazancını azami kılması veya kayıplarını minimum kılması için bir karma stratejiye yönelmesi zaruri olabilir. (22)

Karma strateji mevcut olan oyunlarda muhtelif stratejilerin oranı bulunduktan sonra, bu nisbeti oyunun değerine eşit kılan tesadüfi değişkenler setinin sayısal olarak bulunması gerekecektir. Yukarıda ifade etmeye çalıştığımız karma strateji kavramını bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Oyunda tepe noktası yoksa ve A bir zaman periyodu içerisinde α, diğer zaman periyodu içerisinde β yı, B ise α, β oynadıkları varsayılırsa. Ödemeler matrix'i aşağıdaki gibi olur.

B / A	α'	β'
β	2	4
α	5	9

Oyun modeli :

$$a — (\alpha + \beta) . \alpha'$$
$$b — (\alpha + \beta) . \beta' \text{ olacaktır.}$$

Bu modele bağlı olarak A nın beklenen kârını bulalım;

$$a) \; A = 1\,(2) + 1\,(5) = 7$$
$$b) \; A = 1\,(4) + 1\,(9) = 13$$

Modelde B nin karma stratejisinin olduğunu kabul edelim. Böylece bu problem modele uygulanırsa;

$$(\alpha + \beta)\,\alpha' \quad (\alpha + \beta)\,\beta'$$
$$1\,[1\,(2) + 1\,(5)] + [1\,(4) + 1\,(9)] = 20$$

Zaman periyodlarını belli oranlarda parçalara ayırdığımızda (1/2,1/4, ...$1/2^n$) yukarıdaki modelimiz aşağıdaki şekli alacaktır,

$$a) \; \frac{1}{2^{n\,(n-1)}} (\alpha + \beta)\alpha' \qquad b) \; \frac{1}{2^{n\,(n-1)}} (\alpha + \beta)\beta'$$

(22) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no: 730 Gümüşsuyu-İst. 1968 s. 114

Oyunu B, A ya benzer şekilde tesadüfi olarak 1/2 zamanında β' oynadığı zaman, karma stratejinin modele uygulanmasıyla yukarıda bulunan değer düşürülen zamanla orantılı olarak azalacaktır.
$1/2\ [1/2\ (2) + 1/2\ (5)] + 1/2\ [1/2\ (4) + 1/2\ (9)] =$
$1/2\ (3.5) + 1/2\ (6.5) = 5$

Çeşitli stratejilerin farklı nisbetlerde seçilmesi halinde A nın oyun değerini bulmaya çalışalım. (oyun değeri E)

$A\ (1/4\ \alpha + 3/4\ \beta)\ B\ (1/3\ \alpha' + 2/3\beta')$

$E_1\ (A) = 1/3\ [1/4\ (2) + 3/4\ (5)] + 2/3\ [1/4\ (4) + 3/4\ (9)] = 79/12 = 6.58$

Veya;

$E_2\ (A) = 1/4\ [1/3\ (2) + 2/3\ (4)] + 3/4\ [1/3\ (5) + 2/3\ (9)] = 6.58$ (yaklaşık olarak) bulunur.

Oyuncu A ve B için optimal karma stratejilerin tesbiti de gerekmektedir. Model a ve b den A nın kazancı 7 ile 13 lira arasında değişmektedir. Oyuncu acaba asgari kazanç olarak kaç lirayı elde edecektir? Oyunda A nın kazançlarının maximumu aranırken, B nin kayıplarının da minimum olması saptanmalıdır. O halde maximum kayıpları bulabilmek için B için karma stratejilerin tayini gerekmektedir.

Yukarıda verilen oyun matrix'inde :

$A = yx\alpha_s + (1 - x)\ \beta_s$ ....x B nin daima optimal stratejisini uygulaması hali.

$E\ (A_B \rightarrow \alpha') = x\ (2) + (1 - x)\ 5$....
$= 2x + 5 - 5x$
$= 5 - 3x$

Öyle bir A stratejisiki B ne olursa olsun veya B neyi oynarsa oynasın minimum kar maximum kılınmış olacaktır.

$E\ (A_B \rightarrow \beta') = x\ (4) + (1 - x)\ 9$
$= 4x + 9 - 9x$
$= 9 - 5x$

$A\ (x_i)$, $g\ (A_B \rightarrow \alpha) = g\ (A_B \rightarrow \beta')$ olacak şekilde seçerse, bu karma stratejinin, yani $x_o . \alpha + (1 - x_o)\beta'$ en iyi strateji olacağı matematiksel olarak ispat edilebilir.

Problemde esasen B nin α yımı yoksa β yımı oynayacağını bilemiyoruz. O halde :

$E\ (A_B \rightarrow \alpha') = E\ (B_B \rightarrow \beta')$ yazılabilecektir. Yukarıdaki değerler birbirine eşit kılınırsa;
$5 - 3x = 9 - 5x$ buradan $x = 2$ bulunur.

$E\,(A_B \rightarrow \alpha') = 2\,(2) - 1\,(5) = -1$

$E\,(A_B \rightarrow \beta') = 2\,(4) - 1\,(9) = -1$ bulunur. Şimdi irdelemesini yapalım.

$$E \left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (1/4 + 3/4) \right] = 3/4 \left[2\,(4) + (1-2)\,(9) \right] + 1/4$$

$$\left[2\,(2) + (1-2)\,(5) \right] = 3/4\,(8-9) + 16\,(4-5) = -1$$

veya

$$E \left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (1/4\alpha' + 3/4\beta') \right] = 3/4 \left[2\,(4) + 2^{-2}\,(9) \right] + 1/4$$

$$\left[2\,(2) + 2^{-2}\,(5) \right] = -1$$

bulunur.

$x = 2$ olduğundan $1 - x = 1 - 2 = -1$ dir. Yani x değer değişkeni $x, x^{-1}, x^{-2}, \ldots\ldots\ldots x^{-n}$ kadar akmaktadır. Oyun olasılığının değeri 1 olmalıdır. Bu değer olasılığının oransal frekans gerçeğine temel olmaktadır. Burada değer $x < O$ olduğundan her iki oyuncu için risk altında karar verme söz konusudur. Örnekte netice olarak $A = [2\ ,\ 2^{-2}, (-1)]$ dir. Yani A oyuncusu risk altında karar verirken $2\alpha'$, $-\ \beta'$ stratejisiyle kendisine -1 lik bir minimum zarar getirecektir. Oyuncu A, hangi stratejiyi seçerse seçsin kâr elde edememektedir. Aynı metodolojiyi B nin azami kaybını verecek stratejinin tesbitinde de kullanabiliriz.

k modele sokulan tekrarlamayı göstersin, Bu halde

$B\,[k\,\alpha' + (1\text{-}k)\,\beta']$ en iyi stratejiyi verecektir.

$E\,(B_A \rightarrow \alpha) = k\,(2) + (1\text{-}k)\,(4) = 2k + 4 - 4k = 4 - 2k$

$E\,(B_A \rightarrow \beta) = k\,(5) + (1-k)\,(9) = 5k + 9 - 9k = 9 - 4k$

$4 - 2k = 9 - 4k$

$4 - 2k - 9 + 4k = O$ buradan $k = (5/2)$ bulunur. O halde $B\,[(5/2\alpha + -3/2\beta)]$ yazılabilir. $(1 - k) = (1 - 5/2) = -3/2$

$E\,(B_{A \rightarrow \alpha}) = 5/2\,(2) - 3/2\,(4) = 5 - 6 = -1$

$E\,(B_{A \rightarrow \beta}) = 5/2\,(5) - 3/2\,(9) = 25/2 - 27/2 = -1$ veya

$E\,(B_{A \rightarrow \alpha}) = 2^{-5}\,(2) - 2^{-3}\,(4) = -1$

$E\,(B_{A \rightarrow \beta}) = 2^{-5}\,(5) - 2^{-3}\,(9) = -1$ bulunur. Oyun modeli sıfır toplamlı olduğu için kural olarak $E_A = E_B = -1$ bulunmuştur. O halde oyunun çözümü : Çözüm kominasyonları,

$A\ (2\alpha - \beta) \rightarrow A\ (2\alpha - \beta)$
$B\ (5/2\alpha, -3/2\beta) \rightarrow B\ (5\alpha - 3\beta/2)$
$E_A = E_B = -1$

E nin formülize edilmesinde iki strateji değişkeni vardır. Oyuncuların herbiri iki stratejiye sahiptir. Ödemeler matrix'i ise 2x2 şeklindedir. Yani,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ Şeklindedir.

Oyuncu A, oyuncu B nin stratejilerini karma kılabilir. Birinci kararın tayininde x, ikinci kararın tayininde (1 - x) oynanır. (Örnekte olduğu gibi)

A ve B için seçilen n kombinasyonlar ödemeler stratejisinde N oyunla çarpılır.

$$\begin{bmatrix} xyN & x(1-y)\,N \\ (1-x)\,yN & (1-x)\,(1-y)\,N \end{bmatrix}$$

oyuncu A tarafından herbir oynamada alınan ortalama miktar (23)

$E(x, y) = a_{11}\,xy + a_{12}\,x\,(1\text{-}y) + a_{21}\,(1\text{-}x)\,y + (1\text{-}x)\,(1\text{-}y)$ ....
$O \leq x, y \leq 1$ veya $O \leq y, x \leq 1$
$E(x, y) = a_{11}\,xy + a_{12}\,x\,(1-y) + a_{21}\,(1-x)\,y + a_{22}\,(1-x)\,(1-y)$ ....

Denklemi çözülürse :
$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,xy - (a_{22} - a_{12})\,x - (a_{22} - a_{21})\,y + a_{22}$
bulunur. Burada $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \neq O$ olduğunu varsayalım.
Butaktirde buradan da;

$a = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$
$b = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$
$\alpha = a_{22} - a_{21} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ ve
$\beta = a_{22} - a_{12} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ bulunur.

Bu ikinci dereceden hiperbolik bir fonksiyondur. Fonksiyonda $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$ kabul edilecektir. Bu değerlemeyi bir örnekle açıklayalım. Ödemeler matrix'imiz

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ olsun.

(23) D. Allen, R.G. Mathematical Economocs. London. Macmillan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 500

Bu matrix'te $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$ şartını arayalım.

$a_{11} = 5, a_{12} = 6, a_{21} = 2, a_{22} = 3$ dür.
$5 - 6 - 2 + 3 = 8 - 8 = 0$ bulunacaktır. Genel denklemimiz:
$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, xy - (a_{22} - a_{12})\, x - (a_{22} - a_{21})\, y + a_{22}$ idi.

Bu denklemde,

$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) =$ yerine konulursa yukarıdaki denklemi şöyle yazabiliriz.

$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, xy - (a_{22} - a_{12})\, x - (a_{22} - a_{21})\, y + a_{22}$
$E(x, y) = (a_{22} - a_{12})\, x - (a_{22} - a_{21})\, y + a_{22}$ burdan
$a — E(x, y) = a_{22} - (a_{22} - a_{12})\, x - (a_{22} - a_{21})\, y$
$b — E(x, y) = a_{22}\, (1 - x) - y\, (a_{22} - a_{21}) + x\, a_{12}$ yazılabilir.

Yukarıda bulunan bağıntıyı bir örnekle açıklayalım.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrix'i verilmiş olsun.

$a — E(x, y) = -1 - (-1-1)\, x - (-1-0)\, y$
$= 2x + y - 1$

$b — E(x, y) = -1\, (1 - x) — y\, (-1-0) + x\, (1) = 2x + y - 1$

$E(x, y) = a_{11}\, xy + a_{12}\, x\, (1 - y) + a_{21}\, ((1 - x)\, y + a_{22}\, (1 - x)\, (1 - y)$

$E(x, y) = — xy + 1.\, x\, (1 - y) + 0\, (1 - x)\, y - 1\, (1 - x)\, (1 - y)$

$= -3xy + 2x + y - 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$$E(x, y) = -4\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(4 - \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$E(x, y) = x — 4y + 2$ yazılır.

Oyunlarda ikiden fazla strateji bulunabilir. Böyle oyun matrixlerine (mxn) oyun matrix'i denir. Oyununda genel adı dikdörtgen oyunudur. Yukarıda kısmende olsa bu konuya değinilmiştir. Oyuncu A nın stratejileri $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_m$ ve oyuncu B nin stratejileri $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_n$ olabilmektedir.

B \ A	1	2	m
1	a_{11}	a_{12}	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	a_{2m}
...			
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{nm}

Matrix'in özelikleri :

a — Her dikdörtgen oyununun tek bir oyun değeri vardır.

b — B oyuncusu s_i ($i = 1,2,$ .... n) tekrarlamalarını yapmak ve mümkün olan stratejileri B_1, B_2, B_3 .... B_n olmak üzere ($s_1 A_1 + s_2 A_2 +$ .... $s_n A_n$) şeklinde bir karma strateji ile, kendine en az kazancı sağlayabilir.

C — A oyuncusu içinde r_i ($i = 1,2,$ ...... m) ($r_1 + r_2 + r_3$......... $+ r_n = 1$) olmak üzere ($r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 +$ .... $+ r_n A_n$) şeklinde en fazla bir değerdeki kayıpla kurtulacak en iyi strajisi vardır.

A için

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_m = 1 \qquad r_i \geq 0$$
$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m = 1 \qquad s_j \geq 0$$
$$r_1 a_j + r_2 a_{2j} + \ldots + r_m a_{mj} \geq E$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots n)$$

yazılabilir. Yani A nın ($r_1 A_1 + r_2 A_2 +$ .... $+ r_m A_m$) karma stratejisi karşısında, B nin daima j oyununu ($j = 1, 2,$ ...... n) uyguladığı varsayılmıştır.

oyuncu (B)

oyuncu (A) — A \ B	1	2
1	-3	7
2	6	1

Yukarıdaki oyun matrix'inden aşağıdaki eşitlikleri elde etmek mümkündür. $x_1, x_2 \geq O$, $y_1, y_2 \geq O$ olmak üzere

(1) $x_1 + x_2 = 1$

(2) $y_1 + y_2 = 1$

(3) $-3x_1 + 6x_2 = E$

(4) $7x_1 + x_2 = E$

(5) $-3y_1 + 7y_2 = E$

(6) $6y_1 + y_2 = E$

Birinci denklemi ele alalım; $x_2 = 1 - x_1$ dir.

Ikinci denklemi ele alalım; $y_2 = 1 - y_1$ dir. (3) denklemde $x_2 = 1 - x_1$

yerine konulursa, $-3x_1 + 6(1-x_1) = E$ bulunur. x_2 nin ve y_2 nin yukarıdaki değerleri sıra ile denklemlerde yerine konulursa;

$$-3x_1 + 6(1-x_1) = E \qquad 9x_1 + y = 6 \quad (7)$$
$$7x_1 + (1-x_1) = E \qquad 6x_1 - E = -1 \quad (8)$$
$$-3y_1 + 7(1-y_1) = E \qquad 10y_1 + E = 7 \quad (9)$$

(7) ve (8) denklemlerinden $9x_1 + E = -1$

$6x_1 - E = -1$ den $15x_1 = 5$ .... $x_1 = 1/3$

$x_2 = 1 - x_1$ den $x_2 = 2/3$ bulunur. (7) ve (9) dan

$$E = 9\left(\frac{1}{3}\right) + E = 6 \ ...... \ E = 3$$

lo $y_1 + 3 = 7$ .... $y_1 = 2/5$

$y_2 = 1 - y_1$ den $y_2 = 3/5$ bulunur. Bu değerler (6) da yerine konulursa;

$6(2/5) + 3/5 = 3$ ve ilave olarak

$$x_1 = 1/3 > 0, \quad x_2 = 2/3 > 0$$
$$y_1 = 2/5 > 0, \quad y_2 = 3/5 > 0$$

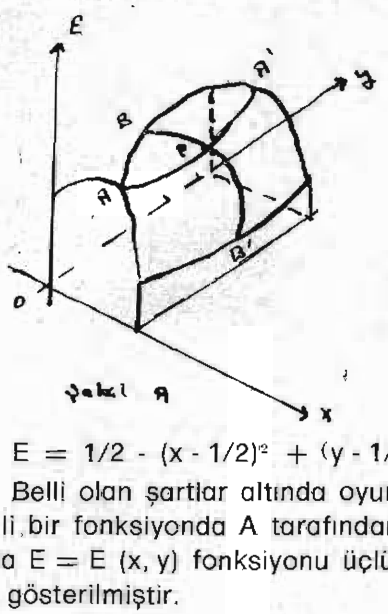
olduğundan oyunun tam çözümü olarak,

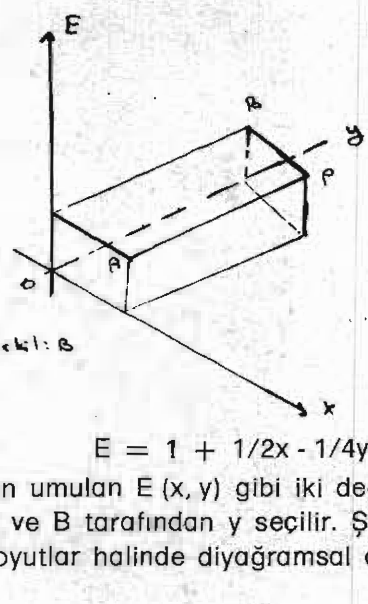
$A\ (1/3\alpha + 2/3\beta) \rightarrow A\ (\alpha + 2\beta/3)$

$B\ (2/5\alpha' + 3/5\beta') \rightarrow B(2\alpha' + 3\beta'/5)$

$E_A = E_B = 3$ bulunacaktır.

MİN - MAX, DENGE NOKTASI VE OYUNUN ÇÖZÜMÜ :





$E = 1/2 - (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \qquad E = 1 + 1/2x - 1/4y$

Belli olan şartlar altında oyundan umulan E (x, y) gibi iki değişkenli bir fonksiyonda A tarafından x ve B tarafından y seçilir. Şekil A da E = E (x, y) fonksiyonu üçlü boyutlar halinde diyağramsal olarak gösterilmiştir.

Oyundan beklenilen değişim varyansları şekil A da x ve y ayrı ayrı seçilmek üzere üçlü yüzeylere adapte edilmiştir. Karma strateji ile oynanan 2x2 ödemeler matrix'i simgeleri yüzeye uygulanmıştır. Bu nedenle $0 \leq x, y \leq 1$ için problemde verilen yüzey alanları şekil A ile tanımlanmaktadır. (24)

Her iki oyuncu tarafından oynanan dikdörtgen oyunlar (mxn) ödeme matrix'i şekilde uygulanabilir. Bu taktirde değişkenlerdeki herhangi bir değişme belli değer değişmeleri olarak ele alınır. O halde $x = 1, 2, \ldots\ldots m$ ve $y = s = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ belli değer değişmeleri olarak kabul edilebilir. Şekil yüzeyi ayrıca bütün set değişmelerini de içerir.

Oyuncu A nın amacı x i seçmektir. Oyuncu B nin mümkün olan reaksiyon sayımları yükseltilinebileceği en yüksek noktaya kadar (tepe) çıkar. Problemde B nin amacı oyunda en yüksek düzeyi elde etmektir. (B bu amacını gerçekleştirmek için en yüksek düzeye sahip olmalıdır.) Eğer oyunda optimal olarak ortaya çıkabilecek bir çözüm varsa, x ve y nin optimal seçim değerlerini almak gerekecektir. Buna en zor bakış min-max problemlerde olur. (25)

Oyunda maximizasyon noktası minimum değerler setidir. Minimizasyon noktası veya minimizasyon şekli ise, maximum değerler setidir.

Oyuncu A en kötü kararı seçerken oyuncu B, A nın seçmiş olduğu herbir kötü karar için kendi seçimlerini en kârlı (maximum) kılabilecektir. Ve böylece yapılan en iyi (maximum) seçim mümkün olan dezavantajlarıda içermiş olacaktır. Şekil A yı yeniden düşünelim. Esas olarak x ve y muhtelif değişmelere sahiptir. AA doğrusu ile BB' doğrusunun kesiştiği P noktası eyer noktasıdır. Ox doğrusu bu P noktasının altından aşağıya doğru Oy doğrusu ise, Ox doğrusunun üstünde yukarıya doğru hareket eder.

Basit olarak x ile y değişkenleri E (x, y) i verir, $\max_{x} \min_{y}$ E (x, y) denge noktası olan P nin üstünde bulunan AA' doğrusu üzerinde aranmalıdır.

Eğer (x, y), (x^*, y^*) nin P noktasındaki değişim değerleri ise, o taktirde bu eger noktasını veren özellik :

$$\operatorname{Max}_{x} - \min_{y} (x, y) = \min_{y} \max_{x} E (x, y) = E (x^*, y^*) \ldots\ldots\ldots \text{dir.}$$

(24) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Mac millan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 502

(25) a.g.e. s. 503

$x \leq 0$ ve $y \leq 1$ için;

$x^* = y^* = 1/2$ dir (26)

Min E (x, y), BB' doğrusu üzerindedir. Yani en az bir ödeme ile A nın x seçimlerinin en yüksek değerini veren min E (x, y), BB' üzerindedir. A, x seçimlerinin max-min olarak E (x, y) için B B' üzerinde bulunan A noktasında olmasını ister. B ise, BB' doğrusu üzerinde bulunan en yüksek değerden (ki P noktası) aşağıya inmeye çalışacaktır.

Oyuncu B tarafından bütün y ler seçilir. AA' eğrisi üzerinde B nin rakibi olan A nın ödemelerinin en yüksek olduğu noktanın altına düşülmelidir. B eğri üzerinde en düşük seviyeye sahip olduğu gibi y seçeneklerini $\min_y\text{-}\max_x E(x, y)$ olacak şekilde A ya öder. Gerçekten P denge noktasına herbir oyuncu ulaşır. Bu nedenle de x^* ve y^* optimal ve dengeli seçimlerdir. (27)

Bu durumda A nın arzu ettiği;

$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ eşitliğinin oluşmasıdır.

Gerçekten oyunun çözümünde bu eşitliğin oluşturulması önemli olduğu gibi bir bakıma zorunludur da. Şekilde bu zorunluluğun çözüm olarak gösterildiği P noktasında $E = E(x, y)$ bağlı olarak x^* ve y^* seçimleri temel olarak görülmektedir.

Bu noktada da basit olarak ifade edildiğinde $\max_x \min_y = \max_y \min_x$ dengesi vardır denilir. A ayuncusu kendine açık olan x, stratejileri içinden optimal x^*i seçer, B ise y^* seçeneklerinden y yi seçmeye çalışır. Tarafların birisi bu denge çiftinde sabit olarak kabul edilirse, Örneğin; A, B nin davranışlarına aldırış etmeden x^* seçmişse, rakibinin davranışı ne olursa olsun oyundan $E(x^*, y^*)$ denge çiftini elde edeceğinden emin olacaktır. Herbir rakibin (taraf) sert ve kesin tutumlarla en fazla almaya yani kazançlarını maximum, kayıplarını minimum yapmaya çalışması doğaldır. Fakat seçimlerde bazı sınırlamaların olması tam anlamıyla tarafları hür kılmamıştır. Örneğin; oyuncu B, y ile y^* arasındaki seçeneklerin dışına çıkamaz, aksi halde oyun bozulduğu gibi çözümde bulunamaz. Rasyonel davranışlar kurallara uygundur. A, x^*i B de y^* yi oynuyorsa, her iki oyuncuda $E(x^*, y^*)$ de karar kılmalıdırlar. Hareket tarzı bu kurallara uyduğu zaman oyunda optimal çözüm elde edilmiş olacaktır. Şayet değişkenler arasında P denge

(26) Yukarıda adı geçen eser s. 503

(27) Yukarıda adı geçen eser s. 504

noktası yoksa oyunda optimal çözüm bulunamaz. Çünkü herbir oyuncu için uygun $\underset{x}{\max}\text{-}\underset{y}{\min} = \underset{y}{\min}\text{-}\underset{x}{\max}$ denge çifti yoktur. Bir taraf alabildiğine kazancını maximum kılarken, diğer taraf devamlı kayıp durumundadır. Esas olan oyuncuların sınır seti içerisinde denge çiftinin optimal oluşunu sağlamalarıdır. Bu sağlanmadığı zaman herbir oyuncuya yönelik optimal strateji bulunamaz.

Şekilde, bölümler arasında (yüzey alanları) herbir oyuncu ile kendi kararları paralelinde anlaşma yapılacak bir nokta yoktur. Fakat bölüm alanları içerisinde bir nokta bulunabilir. Bu durum Şekil B de $E = E(x, y)$ olacak biçimde görülmektedir. x ve y nin uygun görülen değişmelerinin sınır aralığı ile denge noktası arasındaki düzeyde bölümlerle ilgili olarak bir köşe noktası vardır.

Ox, P noktasından direkt olarak aşağıya doğru (PB boyunca) ve Oy direkt olarak yukarıya doğru (PA boyunca) geçmesi hiç kabul edilmeyen bir harekettir. Eğer P (x, y) de değerler alabilecekse, bu şekildeki ifade altında formül;

$\underset{x}{\max}\,\underset{y}{\min}\, E(x, y) = \underset{y}{\min}\,\underset{x}{\max}\, E(x, y) = E(x^*, y^*)$ şeklinde min-max ilişkilerin ifadesi olarak verilir ve bu tatmin edicidir de. (28)

Basit olarak değişme aralıklarındaki minima ve maxima kararlarının en yüksek ve en düşük değerlerine sınır setleri içerisinde yaklaşılır. Özel ve birinci dereceden problemlerde (dikdörtgen oyunlarında) oyuncular saf stratejilerini oynadıkları gibi bu sınır setlerine bağlı olarak $A = a_{rs}$ ödeme matrix'i ile de hareket ederler. Oyuncu A nın diğer taraftan $E(r, s) = [a_{rs}]$, ($r = 1,2, \ldots\ldots\ldots m$ ve $s = 1,2, \ldots\ldots\ldots n$) kadar beklediği varsa, E iki değişkenli olmak üzere r ve s her iki tarafın integral değerleri arasındadır.

(2x2) oyununda karma strateji için beklenilenlerin E (x, y) de tüm değerleri ayrı türden bir fonksiyon oluştururlar. Basit olarak 2x2 oyununda saf stratejiler oynandığı vakit $x = 0,1$ veya $y = 0,1$ olur. Bununla beraber boyutsuz oyunlarda saf stratejileri veren formül maxmin $(x^*, y^*) = E(x^*, y^*)$ dir. Bu gibi hallerde saf stratejiler arasında çözüm veya sabit sonuç vardır. Eğer matrix'te denge noktası varsa, ki bu denge noktası $\underset{r}{\max}\,\underset{s}{\min}\, E(r, s) = \underset{s}{\min}\,\underset{r}{\max}\, E(r, s) = E(r^*, s^*)$ şeklinde yazılabilir, Stratejiler bazen r ($r = 1, 2. \ldots\ldots m$) ve bazende s ($s = 1,2 \ldots\ldots\ldots n$) aralığında değer alırlar. (29)

---

(28) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London, Mac millan and co LTD Newyork. St martın's press. 1956, s. 504 - 505

(29) yukarıda adı geçen eser s. 505.

Herbir oyuncu saf stratejilerini oynarsalar oyunda optimal çözüm bulunabilir. Min-max prensip içerisinde oyuncular buna uymak zorundadırlar. En yüksek nokta A nın kendi birimlerini verdiği gibi aranan denge noktası da onların arasındadır.

Şayet A sadece saf stratejisini oynayabilmek için oyunda var olan denge noktasını arzu ediyorsa diğer bir ifade ile denge noktasını destekliyorsa, problemde karma strateji yoktur. Bu gibi hallerde araştırma noktasının çözümü de birinci dereceden denklem çözümüyle olacaktır. Fakat genel olarak denge noktası ile karma strateji çözümde birlikte aranır.

Bazı durumlarda bir oyunda denge noktası olmadığı gibi, saf stratejilerle de oynanmak istenebilir. Örneğin; ödeme matrix'i

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

A strateji 1 ile oyuna başlarsa B de A ya 1 ödeme yapabilmesi için strateji 2 yi seçecektir. A kararında strateji 2 yi seçer ve oynamak isterse bu takrirde B nin ödediği veya A nın aldığı 3 tür. Bu işlem ters yönden işlediğinde netice değişmeyecek ve hiçbir antlaşma sağlanmadan oyun skloid çember etrafında dönecektir.
2x2 ödemeler matrix'i çözümü :

Oyunda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ödeme matrix'i vardır. Oyun karma strateji ile oynanır.

Oyuncu A, x i oynamak için birinci stratejiye nazaran onun ikinki stratejisini oynar ve B, y yi oynayacak biçimde ikinci stratejiye nazaran onun birinci stratejisini oynar. Oyundan beklenilen değer eşitliği;

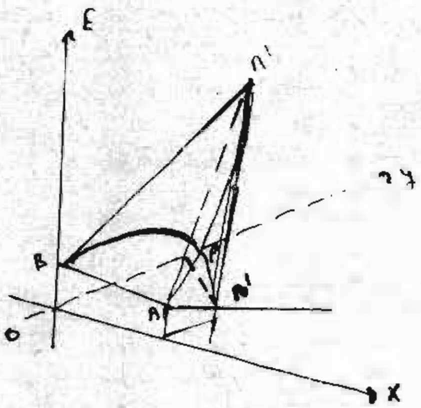
$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*)$$

Özel şekilde alınmış E (x, y) — min max denge noktası olan bir oyunu düşünelim. Bu halde yukarıdaki ifade şu şekli alacaktır;

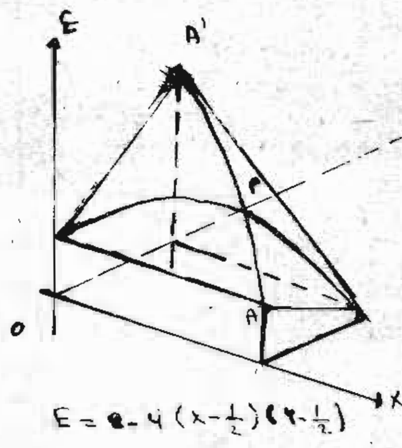
$$E(x, y) = a\ (x - \alpha)\ (y - \beta) + b \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Bu halde daima bir denge noktası vardır. $x = \alpha$ ve $y = \beta$ gibi.

(30) D. Allen, R.G. London. Mathematical Economics. Macmillan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 507



Şekil A



Şekil B

x ve y de sınırlamalar vardır. y, x $\leq$ 1 ve o $\leq \alpha$ ile $\beta \leq$ 1 uygunluk şartı vardır. Denge noktası çözümde bulunacaktır. Bölümler arasında denge noktasını bulmak mümkündür. Aksi halde yüzeyin bölümler arası tesirliliği denge noktasının dışında kalacaktır. Böylece çözüm olmadığı gibi arama metodu da reddedilecektir.

Bölüm boyutlarında (hudutlarında) olabilen yoğunlaşmaya dikkat edilmelidir ki, oyuncular saf stretejilerini oyuna adapte edebilsinler. (31) (x = 0 veya 1 ve y = 0 veya y = 1)

Şekil B de köşe noktaları ile sınırlanan alan yüzeyi, köşe noktaları etrafında parabolik olarak dönüştürülebilir. x ve y nin aralık limitleri uygun bir şekilde verilmeli, sınırlama demetinde E (x, y) $\geq$ 1 olma olasılığı bulunmalıdır. Sınırlama probleminde geometrik yaklaşımla aritmetik kavramlar ve şartlar göz önünde tutulurken, matematiksel yaklaşımda oyunun optimal değerinin sıfırdan büyük veya positif olması sonucu aranmalıdır.

2x2 oyunlarında ilk önce oyundan beklenilen için özel bir şekilde bilgiye ihtiyaç vardır.

Tanım : x* ve y* optimal değerleri herhangi bir x ve y için bulunabiliyorsa, yani x*, y* $\rightarrow$ x, y ise,

o $\leq \alpha$, y $\leq$ 1 şartları altında

(31) D. Allen, R.G. Mathematıcal Economocs. London. Mac mıllon and co LTD Newyork. St martın's press, 1956 s. 507

$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y)$ yazılabilir. (32)

Denklemde denge noktası olduğu gibi, çözümde vardır. Denge noktası optimal strateji değerlerinin koordinat ekseninde geometrik değerleri ile belirlenir. (x^*, y^*)

Oyuncular optimal strateji yönüyle birbirlerine bağlıdır. Yani $A(x^*) \Leftrightarrow B(y^*) \Longrightarrow E(x^*, y^*)$ dir.

Belli şartlar altında cebirsel terimlerle bir denge noktası için geometrik özellikler belirlenebilir. Bu yönüyle oyun teorisi yorumunun önemi daha da anlamlı olmaktadır.

Oyuncu A kendi stratejileri içerisinde optimal stratejisini x^* i seçerse, $E(x^*, y^*)$ değerleri kümesi içerisinde rakibi tarafından oynanan y değerlerinin en düşüğünü alır. Aksi halde oyuncu B, x değerlerinin en düşüğünü alır. Bu nedenle her iki oyuncu tarafından saf stratejilerin karşılıklı seçilmeleri gerekir.

$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*)$ bu denklemde

$0 \leq x, y \leq 1$ aralığındaki mevcut min-max değerler verilmiştir.

Şimdi $\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*)$ verildiğini varsayalım. x, E nin bir birim elemanıdır, ve E nin fonksiyonuna bağlı olarak $x = x^*$ deki maximum değeri, $E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y)$ dir.

Bu değer oyuncu B nin minimum değeridir. Yani min $E(x^*, y)$ dir. Bu nedenle $E(x^*, y^*) = \min_y E(x^*, y) \leq E(x^*, y)$ yazılabilir. Bu denklemde herhangi bir y için $y\,(0 \leq y \leq 1)$ ve $x\,(0 \leq x \leq 1)$ değer aralık ları vardır.

$x\,(0 \leq x \leq 1)$ için $E(x^*, y^*) = \max E(x, y^*) \geq E(x, y^*)$ yazılabilir. Böylece $\min_y \max_x E(x, y) \leq E(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y E(x, y)$ bağıntısı sonuç olarak ifade edilecektir. Bu sonuç denklemini maximize ve minimize (minimal) tariflerinden çıkarmak mümkündür.

$\max_x E(x, y) \geq E(x, y) \geq \min_y E(x, y)$ burada $(0 \leq x, y \leq 1)$

x in bir fonksiyonu olarak min $E(x, y)$ yi maximum yapan x seçimini ve y nin bir fonksiyonu olarak max $E(x, y)$ yi minimum yapan y seçimi:

---

(32) Yukarıda adı geçen eser s. 508

$$\min_y \max_x E(x, y) \geq \max_x \min_y E(x, y)$$

$$\min_y \max_x E(x, y) \leq E(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y E(x, y) \text{ ve}$$

$$\min_y \max_x E(x, y) \geq \max_x \min_y E(x, y) \text{ alınırsa}$$

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*) \text{ ve}$$

Burada
$(0 \leq x,\ y \leq 1)$ yazılabilir.

2x2 ödeme matrix'ini içeren bir oyunda çözüm bulmak mümkündür. Oyunün değeri $E(x^*,y^*)$ dir ve $E(x^*,y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ ve x^* ve y^* optimal stratejilerdir.

İlk önce $E(x, y)$ de $a \neq 0$ olduğunu varsayalım :

$E(x, y) = a(x - \alpha) + (y - \beta) + b$ ve α ile β, 1 den 0 a değer alırlar.

$E(\alpha, \beta) = E(x, y)$ bütün x ve y için $(0 \leq x, y \leq 1)$ dir. Tarifte $x = \alpha$ veya $= \beta$ optimal stratejilerdir. Oyunun değeri $E(\alpha, \beta = b$ dir. Bu durumda belirlenen denge noktası şekil C deki gibidir.

İkinci olarak, diğer bütün durumlarda herbir oyuncunun saf stratejisini göstermek zordur. Örneğin; $a > 0$, α, $B > 1$ olduğunu varsayalım : Sonra

$E(0, 1) = a\alpha(\beta - 1) + b$

$E(x,1) = -a(x - \alpha)(\beta - 1) + b = a\,\alpha(\beta - 1) + b - a(\beta - 1) \leq E(0, 1)$

$E(0, y) = a\,\alpha(\beta - y) + b = a\,\alpha(\beta - 1) + b + a\,\alpha(1 - y) \geq E(0, 1)$
Herhangi bir x ve y $(0 \leq x, y \leq 1)$ dir Bu yüzden:

$E(x, 1) \leq E(0, 1) \leq E(0, y)$ her hangi bir x ve y için
$(0 \leq x, y \leq 1)$ dir.

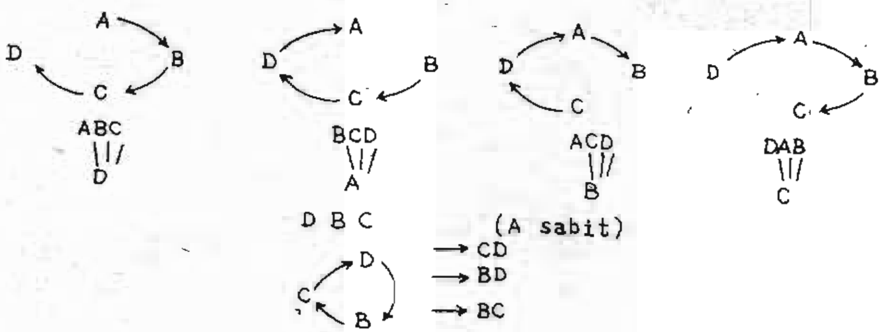
Tanımda, $x^* = 0$, $y^* = 1$ saf stratejilerdir. Bu örnekte A, B nin ikinci, B de A nın birinci stratejisini oynar. Diğer bütün α ve β için aynı türden çözümlerin doğuşunda α ve β, $0 \leq \alpha$, $\beta \leq 1$ aralığındadır ve bu durumlarda dahi $a = 0$ dır (33)

(33) D. Allen, R.G. Mathematical Economics, London, Macmıllan and co LTD Newyork. St martın's Press. 1956 s. 510

2x2 matrix'li oyunlarda birden fazla çözüm bulunabilir. Fakat çözüm sayılarında sınırlılık vardır.

Sıfırtoplam ve (n) şahıslı oyunlar ve grafiksel çözüm :

n şahıslı oyunlarda koalisyon teşkil edilir. Oyuncuların böyle bir kararı olmasa dahi çözümün daha da kolay yönden elde edilebilmesi için bu şekilde varsayılması yerinde olacaktır. Oyunda A.B.C.D gibi 4 oyuncu varsa oyuncuların her biri dönüşüm olarak sabit tutulur. Oyun kombinasyonları aşağıdaki gibi düzenlenir.



Şimdi bütün bu bağımlılıkları bir tablo halinde gösterelim.

A / B / C / D	I	II
1	ABC	D
2	ABD	C
3	ACD	B
4	BCD	A
5	A,B	CD
6	A,C	BD
7	A,D	BC

Herbir oyun sırasının değeri vardır. Toplam oyun değeri farklı 7 koalisyonun toplam değeridir.

(n = 3) oyunculu-sıfır toplamlı bir oyunda oyuncu davranışları;

$\frac{A}{E_1, E_2}$, $\frac{B}{F_1, F_2}$, $\frac{C}{D_1, D_2}$, ve ödemler matrix'i :

Ödemeler matrix'i

ABC			Ödemeler		
E_1	F_1	D_1D_2	2	1	-3
E_1	F_1		-1	1	0
E_1	F_2	D_1D_2	-1	-2	3
E_1	F_2		0	2	-2
E_2	F_1	D_1D_2	3	-2	-1
E_2	F_1		-2	0	2
E_2	F_2	D_1D_2	0	-1	1
E_2	F_2		-1	1	0

Kombinasyonlar : $A \rightarrow (BC)$
$B \rightarrow (CA)$
$C \rightarrow (AB)$

Bu üç ayrı oyunun ödemeler matrix'inin düzeninde yalnız bir tarafın kazançlarını gözönüne almak gerekir.

1 – $A \Leftrightarrow (BC)$ için

(B,C)

E_1	2	-1	-1	0	A
E_2	3	-2	0	-1	
	F_1D_1	F_1D_2	F_2D_1	F_2D_2	

A $[E_1]$, BC $[F_1D_2]$ $\quad \underset{[A]}{E} = -1 \quad \underset{[A, C]}{E} = +1$

2 – $B \Leftrightarrow (A, C)$ için

(A, C)

	E_1D_1	E_1D_2	E_2D_1	E_2D_2	
F_1	1	1	-2	0	B
F_2	-2	2	-1	1	

(A, C)

	$E_1 D_1$	$E_2 D_1$		
F_1	1	-2	x	1/4
F_2	-2	-1	1-x	3/4
	y	1-y		

B

$1 — 1/4 = 1 — x = 3/4$

Burada n karma stratejileri bulmak mümkündür.

$$\left.\begin{array}{l} x-2\,(1-x) \geq E \rightarrow x-2+2x \\ -2x-1\,(1-x) \geq E \rightarrow -2x-1+x \end{array}\right\} x-2+2x = -2x-1+x = 1/4$$

$y-2\,(1-y) \leq E$

$-2y-1\,(1-y) \leq E$

B ($1/4\ F_1$, $3/4\ F_2$) elde edilir. Aynı yolla

AC [$1/4\ (E_1 D_1)$, $3/4\ (E_2 D_1)$] veya A (D_1), C [($1/4\ E_1$, $3/4\ E_2$)] bulunur.

3 — C $\Leftrightarrow$ (A, B) için

(A, B)

		I	II	III	IV	I>IV
		E_1F_1	E_1F_2	E_2F_1	E_2F_2	III>I
		y	1-y	0	0	
D_1	x	-3	3	-1	1	1/4
D_2	1-x	0	-2	2	0	3/4
		3/4	1/4			

C

Denklemler :

$$\left.\begin{array}{l} -3x \geq E \\ 3x - 2\,(1-x) \geq E \end{array}\right\} \quad 1/4$$

$$\left.\begin{array}{l} -3y + 3\,(1-y) \leq E \\ -2y \leq E \end{array}\right\} \quad -3/4$$

Aynı yolla C ($1/4\ D_1$, $3/4\ D_2$)

A (P_1), B ($3/4\ F_1$, $5/8\ F_2$) bulunur.

Oyunların karakteristikleri

E (A) = — 1.00	E (BC) = 1,00
E (B) = — 1,25	E (AC) = 1,25
E (C) = — 0.75	E (AB) = 0,75

2xn Ödemeler matrix'inde grafiksel çözüm :

2xn ödemeler matrix'i yerine 2x2 ödemler matrix'i çözümü kolaylaştırmak için kullanılır. Bütün cebirsel terimler sınır aralığında kalmak şartıyla gözden geçirilmelidir.

Grafiksel çözüm daha çok eşitsizlik çözümlerinde kullanılır. Oyunda 2x2 ödemler matrix'i ele alınmış ise, oyunculardan herhangi birisinin stratejileri düzlem analitik geometri metotları ile belirlenir. Örneğin; ödeme matrix'i

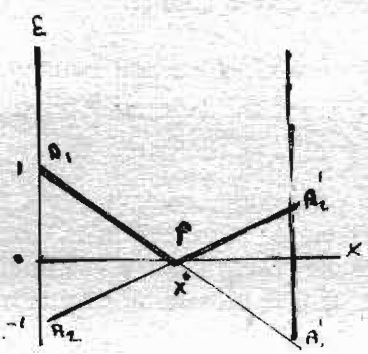
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

A, x ve (1 - x) sınırları içinde iki stratejiden fazla oynanamaz.

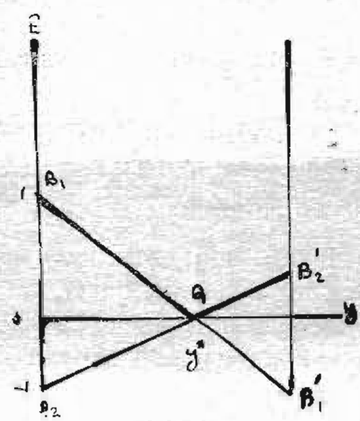
Eğer B, birinci stratejisini oynarsa (matrix'in birinci kolonundan) A nın beklediği,

$E = -x + (1 - x) = 1 - 2x$ olur.

Eğer B ikinci stratejisini oynarsa, $x - (1 - x) = 2x - 1$ olur. Doğru üzerinde herbir eşit değerler işaretlenirse x in aralıkları $0 \leq x \leq 1$ olmak kaydı ile bu işaretleme OxE eksen alanları içinde olur. (34)



Grafik 1



Grafik 2

Grafik 1'de : $A_1 A_1'$ ve $A_2 A_2'$ eşit simetri eksenlerinin denge noktasında (P) kesişirler. P noktasında $x = 1/2$ dir. E ise sıfırdır. A nın

(34) D. Allen, R.G. Mathematıcal Economocs. London. Mac mıllan and co LTD. Newyork St martın's press. 1956 s. 511-512

ortalama değerleri B nin karma stratejisinde aranacaktır. Oyunda $E = 0$ olması analitik olarak hesaplanabilir.

A_1 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (1, 0)

B_2 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (0, 1)

A_2 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (0, 1)

B_1 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (1, 0) dır.

Bir doğrunun iki uç noktaları biliniyorsa bu doğrunun x ve y cinsinden değerini bulmak mümkündür. Yukarıda A_1 B_2 ve A_2 B_1 doğrularının iki değişkenli denklemleri yazılır ve ortak çözülürse E nin değeri bulunur.

$E = E_1 \cap E_2$ dir.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x - x_1 / x_1 — x_2 = y - y_1 / y_1 - y_2$$

$$x - 1/1 - 0 = y - 0/0 - 1 = -x - y + 1 = 0$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x - x_1 / x_1 — x_2 = y - y_1 / y_1 - y_2$$

$$x - 0/0 - 1 = (y - 1) / 1 - 0 = x + y - 1 = 0$$

$E = E_1 \cap E_2 \rightarrow -x - y + 1 = x + y - 1 \longrightarrow E = 0$ bulunur.

Grafikte $A_2 PA_1$, doğrusunun en yüksek noktasında oyuncu A, x seçimini kullanır. Yani $x = 1/2$ ile $E = 0$ dır. Bu değerler P noktasının analitik değeridir.

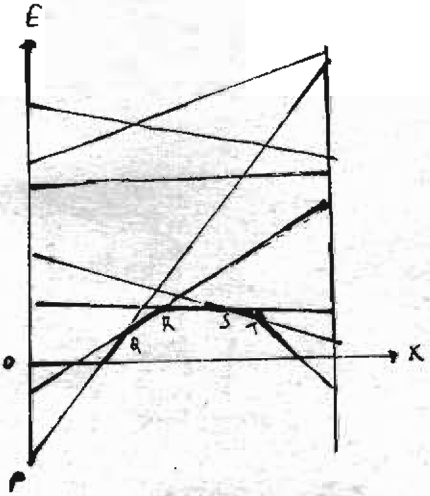
B_1QB_2' üçgen alanında doğrular y nin farklı seçimleri için B nin daha çok oynaması gerektiği yüzeyi biçimler. Grafik 2'de $B_1 QB_2'$ üçgeni içinde B oyuncusu seçeneklerini maximum kılan y yi arar. Yani maximum seçimlerle optimal $y = 1/2$ ile $E = 0$ değerlerini elde etmeye çalışır.

B_1QB_2' üçgen alanında doğrular y nin farklı seçimleri için B nin daha çok oynaması gerektiği yüzeyi biçimler. $B_1 QB_2'$ üçgeni içinde B oyuncusu seçeneklerini maximum kılan y yi arar. Yani maximum seçimlerle optimal $y = 1/2$ ile $E = 0$ değerlerini elde etmeye çalışır.

P noktası oyuncu A için P (1/2, 0)

Q noktası oyuncu B için Q (1/2, 0) sayı kombinasyonunu oluştururlar. O halde optimal seçim için;

$x^* = y^* = 1/2$ ve oyunun değeri $E = 0$ yazılabilir.

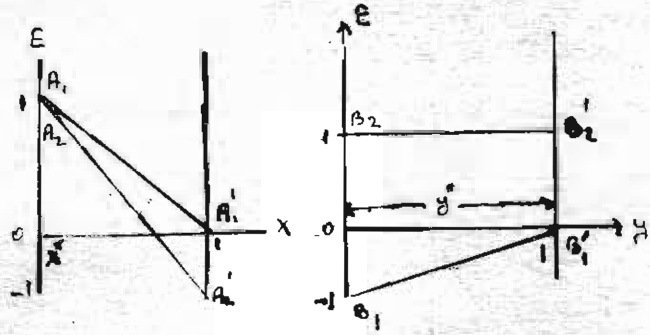


Grafik 3

Grafik 3 genellikle geliştirilmiş 2xn ödemeler matrix'i ile oyuna tatbik edilen grafiksel metodu içerir. n tane düz doğru vardır. Belirli artlar altında ki PQRS kırık çizgisi x ile A nın beklediği minimum umutları içerir. Bu kırık doğru kesmesi 0x ekseni üzerindedir. En yüksek nokta veya noktalar kırık çizgi üzerinde x in optimal değerleri min-max prensip olmak kaydı ile açıklanır. Genel durumda horizontal doğru kesmesi, herbir aralıkta optimal α grafikte RS gibi yı veya doğru kesişmelerinden oluşan setin tepesini açıklayan noktanın belirlediği tek optimal x i tarif eder. (35)

mx2 ödemeler matrix'ine aynı metodu uygulamak mümkündür. Grafikle belirtilmeye çalışılan oran y : 1 - y dir. Ayrıca bu oran B oyuncusunun karma stratejisini gösterir. Oyunlarda 3xn veya mx3 ödemeler matrix'ini göstermekle problemlere üçboyut kazandırılmış olunur. Optimal karma stratejiler bu durumda, horizontal doğruların tepe noktaları tarafından verilir.

(35) D. Allen, R.G. London. Mathematıcal Economics. Macmıllan And co LTD Newyork. St martın's Press. 1956 s. 515

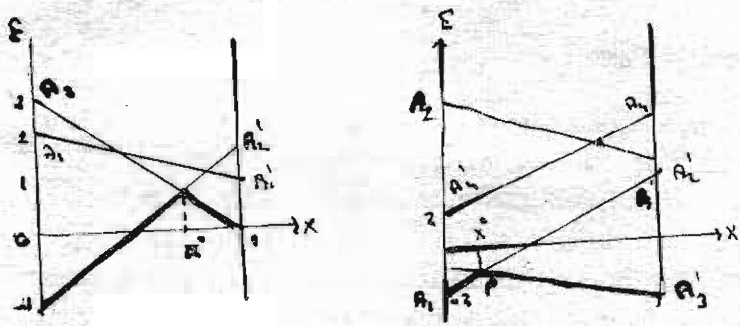


Grafik 4

Grafiklerin matrix'i $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

$A_1A'_1 \rightarrow E = 1 - x$
$B_1B_1'' \rightarrow E = y - 1$
$A_2A_2' \rightarrow E = 1 - 2x$
$B_2B_2' \rightarrow E = 1$

Matrix 3xn veya mx3 şeklinde ise, grafikler aşağıdaki gibi olacaktır.



Grafik 5

Ödeme matrix'i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

B nin stratejileri	doğru	umut edilen
1	A_1A_1'	$E = 2 - x$
3	A_2A_2'	$E = 3x - 1$
3	A_3A_3'	$E = 3(1 - x) = 3 - 3x$

A nın stratejileri	umut edilen
1	$E = x - 2$
2	$E = -3x + 1$
3	$E = -3(x - 1) = -3x + 1$

Şimdi tepe noktası bulunmayan bir ödemeler matrix'i ile (üç boyutlu) cebirsel olarak grafik metoduna dayalı örnek bir çözüm yapmaya çalışalım.

Ödemeler Matrix'i :

B

A \ B		y_1	y_2	y_3
A	A/B	α'	β'	δ
x_1	α	3	1	3
x_2	β	-1	4	1

A

A oyuncusunun modeli :

$x_1 + x_2 = 1$ $\qquad$ $x_1 + x_2 = 1$
$3x - 1(x_2) \geqq E$ $\qquad$ $3x_1 - x_2 \geqq E$
$1(x_1) + 4(x_2) \geqq E$ $\qquad$ $x_1 + 4x_2 \geqq E$
$3(x_1) + 1(x_2) \geqq E$ $\qquad$ $3x_1 + x_2 \geqq E$

B oyuncusunun modeli :

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$ $\qquad$ $y_1 + y_2 + y_3 = 1$
$3(y_1) + 1(y_2) + 3(y_3) \leqq E$ $\qquad$ $3y_1 + y_2 + 3y_3 \leqq E$
$-1(y_1) + 4(y_2) + 1(y_3) \leqq E$ $\qquad$ $-y_1 + 4y_2 + y_3 \leqq E$

Şimdi iki stratejisi (α, β) olan A nın kazanç denklemini ele alalım.

$x_1 + x_2 = 1$
$3x_1 - x_2 \geqq E$
$x_1 + 4x_2 \geqq E$
$3x_1 + x_2 \geqq E$

$x_1 + x_2 = 1$ den $x_2 = 1 - x_1$ bu değeri diğer üç denklemde yerine koyalım.

$3x_1 - (1 - x_1) \geqq E$ $\qquad$ $3x_1 - 1 + x_1 \geqq E$ $\qquad$ $4x_1 - 1 \geqq E$
$x_1 + 4(1 - x_1) \geqq E$ $\qquad$ $x_1 + 4 - 4x_1 \geqq E$ $\qquad$ $-3x_1 + 4 \geqq E$
$3x_1 + 1(1 - x_1) \geqq E$ $\qquad$ $3x_1 + 1 - x_1 \geqq E$ $\qquad$ $2x_1 + 1 \geqq E$ Buradan
$4x_1 - E - 1 \geqq 0$
$-3x_1 - E + 4 \geqq 0$
$2x_1 - E + 1 \geqq 0$ eşitlik haline getirirsek,
$4x_1 - 1 = E$
$-3x_1 + 4 = E$

$2x_1 + 1 = E$

$4x_1 - 1 = E$ ve $-3x_1 + 4 = E$ doğrularının kesim noktası

$4x_1 - 1 = -3x_1 + 4 \quad 4x_1 - 1 + 3x_1 - 4 = 0 \quad 7x_1 = 5 \quad x_1 = 5/7$

$x_1 + x_2 = 1$ denkleminde $x_1 = 5/7$ değeri yerine konulursa

$x_2 + 5/7 = 1, x_2 = 2/7$ bulunur. Şimdi E yi bulmaya çalışalım.

$E(A_B \rightarrow \alpha') = 3(5/7) - 1(2/7) = 13/7$

$E(A_B \rightarrow \beta') = 1(5/7) + 4(2/7) = 13/7$

$E(A_B \rightarrow \delta) = 3(5/7) - 1(2/7) = 13/7$ bulunur. Diğer yönden,

$3x_1 + x_2 = 3(5/7) + 2/7 = 15/7$ bulunur. Bu ise $E = 13/7$ den daha büyüktür.

$3x_1 + x_2 > E$ ohalde $y_3 = 0$ olmalıdır.

$y_1 + y_2 = 1$ .... $y_2 = 1 - y_1$

.... $3y_1 + 1(1 - y_1) = \quad y_2 = 1 - y_1$

değerini aşağıdaki denklemlerde yerine koyalım.

$$\left.\begin{array}{l} 3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq E \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 \leq E \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y_3 = 0 \\ y_2 = 1 - y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3y_1 + 1 - y_1 + 0 \leq E \\ -y_1 + 4y_1 + 0 \leq E \end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y_1 + 1 \leq E \\ -5y_1 + 4 \leq E \end{array}\right. \Longrightarrow 2y_1 + 1 = -5y_1 + 4 \quad \text{buradan}$$

$7y_1 = 3 \quad y_1 = 3/7$ bulunur. Bu değeri $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ denkleminde yerine koyarsak y_2 değerini bulmuş oluruz.

$3/7 + y_2 + 0 = 1 \quad y_2 = 4/7$ bulunur.

$-y_1 + 4y_2 + y_3 \leq E$ denklemnde y_1, y_2, y_3 değerleri yerine konulursa E değeri bulunmuş olacaktır.

$E = -3/7 + 4(4/7) + 0 = -3/7 + 16/7 = 13/7$

Çözüm kombinasyonları;

A $(5/7\alpha, 2/7\beta)$

B $(3/7\alpha', 4/7\beta')$ ve oyunda tepe noktası yoktur.

Şimdi bu değerleri koordinat eksenlerinde bağlı bulundukları doğru denklemleri ile çizmeye çalışalım.

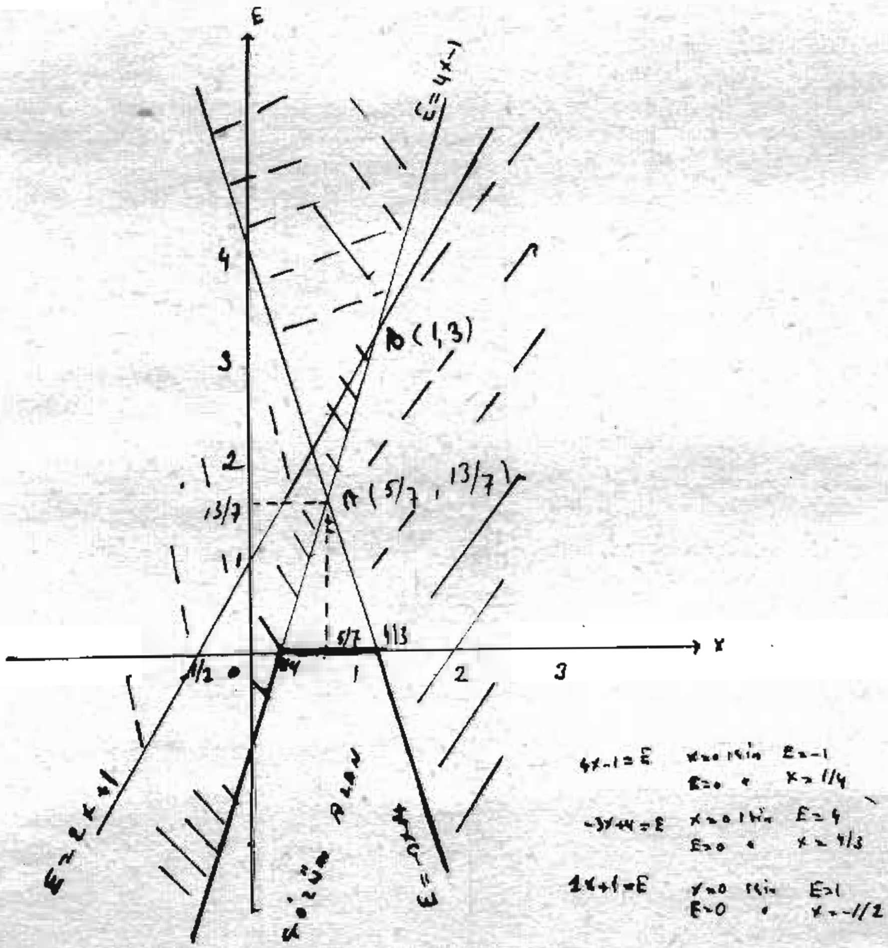
Çizim yapılırken doğru denklemlerinde bilinmiyen değişkenlerden herhangi birisi sabit bir sayı, örneğin sıfır olarak kabul edilip diğer değişkenlerin bu sabit değer karşılığı olarak aldığı değerler saptanacaktır. Doğru denklemlerinin bu şekilde yapılan çizimlerinden sonra kesim noktalarının apsis ve ordinat olarak değerleri bulunacaktır. Bunun için kesim noktasından geçen doğru denklemlerinin ortak çözümü yeterlidir.

Denklemler :

$4x_1 - 1 = E$

$-3x_1 + 4 = E$

$2x_1 + 1 = E$ idi



Grafik 6

Denklemler yardımı ile kesim noktalarının koordinatlarının bulunmasına çalışalım.

B → $E = 2x + 1$

$E = 4x - 1 \implies 2x + 1 = 4x - 1$ den $x = 1$

Bu değer $E = 2x + 1$ de yerine konulursa $E = 3$ bulunur.

A → $E = 3x + 4$

$E = 4x - 1 \implies -3x + 4 = 4x - 1$ den $x = 5/7$ bu değer $E = -3x + 4$ de yerine konulursa $E = 13/7$ bulunur.

İrdeleme :

A (1, 3)
B (5/7, 13/7)

Eğer bu noktalardan geçen doğru denklemi kurulursa ve kurulacak denklemin grafikte üzerinde bulunduğu doğru denklemine eşit olması saptanırsa çözüm doğrudur.

$x - x_1 / x_1 - x_2 = y - y_1 / y_1 - y_2$ (iki noktası belli olan doğru denklemini veren formül)

$x - 1 / 7 - (-5/7) = y - 3 / 3 - (13/7) = x - 1/ 2{:}7 = y - 3/8{:}7$

$56x - 56 = 14y - 42$

$56x - 56 - 14y + 52 = 0$ gerekli kısaltmalar yapılırsa, $4x-y-1 = 0$ bulunur.

$Y = E$ ise (koordinat ekseninde) $4x - E - 1 = 0$ buradanda $4x - 1 = E$ bulunur.
Demekki çözüm doğrudur.

Tepe noktalı bir oyunun grafiksel çözümü :

B

	A/B		y_1	y_2
A	x_1	α	-2	-3
	x_2	β	-1	2
	x_3	δ	2	4

Denklemler :

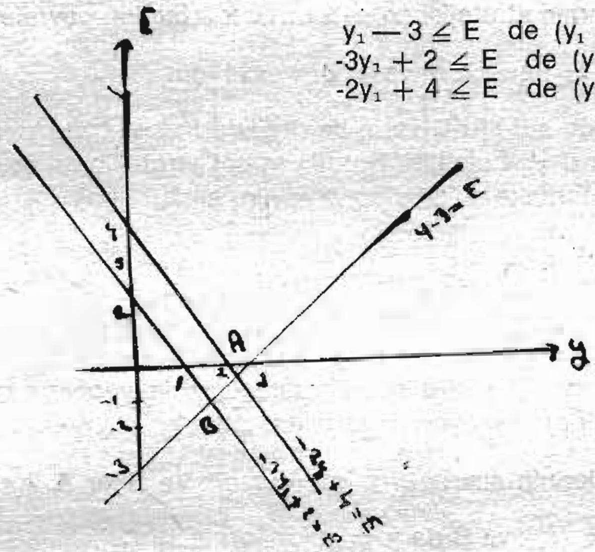
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$y_1 + y_2 = 1$
$-2x_1 - x_2 + 2x_3 \geqq E$
$-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqq E$
$-2y_1 - 3y_2 \leqq E$
$-y_1 + 2y_2 \leqq E$
$2y_1 + 4y_2 \leqq E$ yazılabilir.

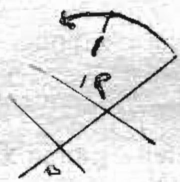
$y_1 + y_2 = 1$ $y_2 = 1 - y_1$ Bu değer aşağıdaki denklemlerde yerine konulursa,

$-2y_1 - 3y_2 \leqq E$ $-2y_1 - 3(1 - y_1) \leqq E$ $y_1 - 3 \leqq E$
$-y_1 + 2y_2 \leqq E$ $-y_1 + 2(1 - y_1) \leqq E$ $-3y_1 + 2 \leqq E$
$2y_1 + 4y_2 \leqq E$ $2y_1 + 4(1 - y_1) \leqq E$ $-2y_1 + 4 \leqq E$

$y_1 - 3 \leqq E$ de ($y_1 = 3$, $E = -3$)

$y_1 - 3 \leq E$ de $(y_1 = 3,\ E = -3)$
$-3y_1 + 2 \leq E$ de $(y_1 = 2/3,\ E = 2)$
$-2y_1 + 4 \leq E$ de $(y_1 = 2,\ E = 4)$





Grafik 7

Grafikte A ve B gibi iki tepe noktası ortaya çıkmaktadır.
A nın koordinatlarını bulalım.

$y_1 - 3 = E$
$-2y_1 + 4 = E$ $\quad y_1 - 3 = 2y_1 + 4 \quad y_1 = 7/3 = 2\ 1/3$ budeğeri $y_1 - 3 = E$ de yerine koyarsak $E = -2/3$ bulunur. O halde A $(2\ 1/3,\ -2/3)$ dür

B nin koordinatlarını bulalım.
$y_1 - 3 = E$
$-3y_1 + 2 = E \quad y_1 - 3 = -3y_1 + 2 \quad y_1 = 5/4 = 1\ 1/4$ bu değeri $y_1 - 3 = E$ de yerine koyarsak $1\ 1/4 - 3 = E$, $E = 7/4$ o halde B $(1\ 1/4,\ 1\ 3/4)$ bulunur.

Genel durumlarda iki şahıs - sıfır toplam oyunu :

Genel olarak ödemeler matrix'i $A = [a_{rs}]$ $(r = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots n)$ ve $(S = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m)$ olabiliyordu. A oyuncusu m stratejileri ile faydalı saydığı diğer karma stratejiler arasında seçim yaparak $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_m$ oranlarını elde edebilir. Toplam oranlar x_m e giderken x_m in bütün değerleri negatif olamaz ve x_m lerin değerleri pozitif olmalıdır. Daha doğrusu x_m değerleri $0 \leq x_m \leq \alpha$ arasındadır. Bazı özel durumlarda $x = 0$ olabilir. Fakat oyuncu A tarafından arzu edilen $x = 1$ olmasıdır. Bu gibi hallerde oyuncular tarafından saf stratejiler oynanamayacaktır. Diğer karar aralıklarında ise, karma strateji vardır.

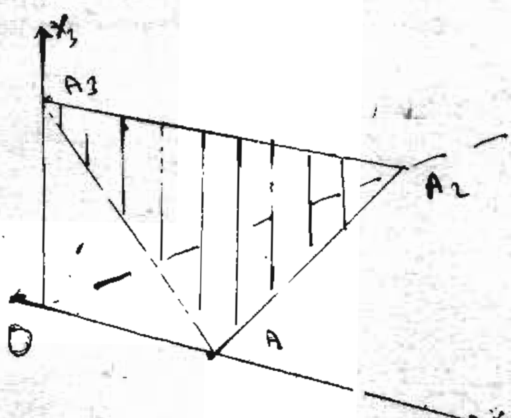
A nın verilen karma stratejisi (x_1, x_2 .... x_m) bunları çevreleyen sınırlar ise $x_r \geq 0$, $r = 1,2$ ...... m ve $\sum_{r=1}^{m} x_r = 1$ dir.

Bazı özel durumlarda saf stratejilerin bu değerleri $x_r = 1$ ve $x_{r'} = 0$ $r' = 1, 2,$ .... m $r' \neq r$ olabilir. Burada m saf stratejileri r de seçenekleri gösterir. Matrix'te x in kolon veya sıra setleri aşağıdaki gibi alınır. $x = \{x_r\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$

Diğer bir yol oyuncu B, n stratejileri arasında seçim yapar ve bunlardan herhangi birini oynayarak hareket etmek isterse, (y_1, y_2 ....y_n) seçeneklerinin sınırı $\sum_{r=1}^{m} x_r = 1$ dir Ve Eğer A karma strateji oynarsa $x = \{x_r\}$ ve B de $y = \{y_s\}$ karma stratejisini oynamak kaydı ile oyundan beklenilen;

$$E(x, y) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r y_s \text{ .... dir. (36)}$$

E nin fonksiyonunda x ve y vektördür. Bu nedenle matrix rakamları $E(x, y) = x'Ay$ eşitliği halinde yazılabilir.



Şekil A

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ ve $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ dir.

$A_1 A_2 A_3$ üçgeninde $0A_1 = 0A_2 = 0A_3 = 1$ dir. Bu alan içerisinde ($A_1 A_2 A_3$) üçgeninde hiçbir nokta A nın x stratejisini belirtmez. A_1, A_2

(36) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Mac millon and co LTD Newyork. St martın's pressl 1956 s. 517

ve A_3 saf stratejilerdir. Bu noktalar dışındaki alan noktaları karma stratejileri gösterir.

Tanım : x^*, y^* birer vektör iseler, x, X de y, Y de değer olarak aranır. Diğer bir ifade ile her bir değer bağlı bulunduğu değer değişkenlerinde fonksiyonel olarak bulunmaya çalışılır. Oyunda herbir oyuncu için arzu edilen optimum stratejiyi gösteren bağıntı;

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(X^*, y)$$

$$x' Ay^* \leq (x^*)' Ay^* \leq (x^*), Ay \text{ idi.}$$

(x^*, y^*), E nin denge noktasıdır. Oyunda matrix değer :

$V = E(x^*, y^*)$ dir.

A nın m stratejileri $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_m$ e kadar gidecektir. Karar verilirken düşünülen, oyuncu A, x değerlerini seçtiği zaman $E(x^*, y^*)$ değerini alarak bir bütün içinde rakibi B nin ne yaptığını bilmesidir. Bunun için oyunun bazı özelliklerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Ozellik : I

mxn şeklinde bir ödemeler matrix'i problem olarak verilmiş olsun Oyuncu A oynadığı zaman saf stratejileri x^*, y^* olacaktır. Bu seçenek oyun matrix'inde optimal oyun için cA + B dir. c Oyuncu A nın bütün positif değerlerini içerir. B ise mx n matrix'inde eşit bütün birimlerin $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots + b_n$ toplamıdır. O halde ikinci kez oyun oynanırsa oyunun değeri (cv+ b) olacaktır.

Özellik : II

Oyuncu B n stratejileri arasında seçim yapar ve bunlardan herhangi birini oynarsa $(y_1, y_2 \ldots\ldots\ldots y_n)$ sınır aralığı $\sum_{s=1}^{n} x_s = 1$,

Oyuncu A içi aynı durumda $\sum_{r=1}^{m} x_r = 1$ sınır aralığı olacaktır.

Herbir oyuncu saf stratejilerini oynayarak oyundan beklediklerini sınır aralığında biçimlendirebilirler de. Bu taktirde;

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, y^*_s \leq V \leq \sum_{r=1}^{n} a_{rs}\, x^*_r$$ denklemi sağlanacaktır. Ayrıca,

$E(x^*, y) \geq V$

$E(x, y^*) \geq V$ herbir oyuncu tarafından optimal strateji ile hareket edilen sınır aralığıdır.

Özellik : III

Oyunda herbir oyuncunun optimal stratejilerini sınırlayan v değeri varsa, optimal stratejiler x, y olmak üzere;

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, y^*_s < V,\ x^*_r = 0 \qquad \text{ve}$$

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs}\, x^*_r > V,\ \ y^*_s = 0$$

Bu şartları oyun matrix'ine uygulamak üzere;

a — $(x^*)'\, Ay \geq v$, $x'\, Ay^* \leq v$

b — $Ay^* \leq v\ \{1\} \leq A'\, x^*$ olarak yazabiliriz.

$Ay^* \leq v\ \{1\}$ de

gerçek değer-artan değer = Bir elementin ifade edildiği x* elementinin sıfır değeri. bağıntısı yazılabilir. Buda basit olarak

$A'x^* \geq v\ \{1\}$ dir.

Özelliklerin herbirinde oyunun çözümünde temel karar sayılabilecek doneler verilmiştir.

Birinci olarak x* ve y* optimal stratejiler olarak verilmişse, oyunda karar modeli şöyle belirlenir.

$V = E\,(x^*, y^*) \leq E\,(x^*, y)$

Eğer $E\,(x^*, y) \geq v$ verilmişse, $\bar{x}, \bar{y}$ optimal strateji olarak düşünülmek kaydı ile;

$V = E\,(\bar{x}, \bar{y}) \leq E\,(x^*, y)$

$V = E\,(x, \bar{y}) \leq E\,(\bar{x}, \bar{y})$ bu denklemde y nin yerine $\bar{y}$ konulursa;

$E\,(\bar{x}, \bar{y}) \leq E\,(x^*, \bar{y})$

$V = E\,(\bar{x}, \bar{y}) \leq E\,(\bar{x}, \bar{y})$ bu denklemde x in yerine $\bar{x}$ konulursa;

$E\,(x^*, \bar{y}) \leq E\,(\bar{x}, \bar{y})$ bulunur. Zira;

$E\,(\bar{x}, \bar{y}) = E\,(x^*, \bar{y})$ dir

$V = E\,(\bar{x}, \bar{y}) \leq E\,(x^*, \bar{y})$ ve

$E = (x, \bar{y}) \leq E\,(x, y) = V$ ortak çözülürse;

$E = (x, \bar{y}) \leq E\,(\bar{x}, \bar{y}) = V$ bulunur.

$E\,(x, \bar{y}) \leq E\,(\bar{x}, \bar{y}) = v$

$E\,(\bar{x}, \bar{y}) = E\,(x^*, \bar{y})$ birlikte verilirse;

$E\,(\bar{x}, \bar{y}) \leq E\,(x^*, \bar{y}) \leq E\,(x^*, y)$ yazılır. E nin denge noktası karar modelinde $(x^*, \bar{y})$ dir, ve optimal strateji x* dir.

Özellik IV :

Eğer oyunun ödemeler matrix'i kare ve ters simetrik ise, aynı strateji içerisinde herbir oyuncunun optimal stratejileri ve oyunun çözümü vardır.

Bir ters simetrik olan ödemeler matrix'indeki kasdedilen A ve B arasında benzeşim özelliği vardır. Eğer oyuncular değişir ve A nın işareti (matrix) ters çevrilerek verilirse, B nin ödemeside matrix'te -A' olarak verilir.

Örneğin; Finger - morra (Elsayma oyunu) oyununda ödemeler matrix'i ters simetriktir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Oyunda oyuncular arasında simetrik özelliği vardır. x^* ve y^* optimal stratejileri oyunda verilmiş olsun b Oyunun değeri de v ise;

$Ay^* \leqq v\ \{1\} \leqq A'x^*$ yazılabilir. Zira
$-(A)y^* \geqq (-v)\ \{1\} \geqq (-A')x^*$ dir, böylece
$A' = -A$ ve $-A' = A$ bulunacaktır. Bu ifadeden hareketle
$A'y^* \geqq (-v)\ \{1\} \geqq Ax^*$ yazılabilir.
$Ay^* \leqq v\ \{1\} \leqq A'x^*$ ve $A'y^* \geqq (-v)\ \{1\} \geq Ax^*$ den
$A\,(x^* + y^*) \leqq 0 \leqq A'\,(x^* + y^*)$ yazılır. Böylece
$v\ \{1\} + (-v)\ \{1\} = 0$ olur. Şimdi x^* ve y^* aynı setlerin vektörleri olsun. Böylece A matrix'i kare şeklinde olacaktır. Vektör ise, $z^* = 1/2\ (x^* + y^*)$ dr.i Zira z^* herbir oyuncunun mümkün olan stratejisidir. Buradan hareketle;

$A\,(x^* + y^*) \leqq 0 \leqq A'\,(x^* + y^*)$ denklemi
$Az^* \leqq 0 \leqq A'\,z^*$ şeklini alacaktır. (37)

Sıfır toplamlı olmayan oyunlar :

Sıfır toplamlı olmayan oyunlarda oyuncuların birbirlerine yaptıkları ödemelerin toplamının sıfır olması şarttı yoktur. Bu nedenle sıfır toplamlı olmayan n şahıslı oyunları, (n + 1) şahıslı sıfır toplamlı oyunlar olarak düşünmek mümkündür. Böylece onun modelinin çözümü daha önce çözümü yapılan sıfır toplam şahıslı oyunlar gibi olmaya-

---

(37) D. Allen. R.G. Mathematıcal Economocs. London. Mac mıllan and co LTD Newyork. St martın's press. 1956 s. 518 - 523

caktır. Çünkü oyunda (n + 1). nci şahıs stratejiyi seçerken hür değildir.

Ödemeler matrix'inde hiçbir oyuncunun kazancı diğerinden aşağı düşemez. A nın kazançları v ise, oyunun değeri de E ise, v > E olmalıdır. Bu bizi oyunda impütasyon ve onun tariflerini yapmaya kadar götürecektir.

(E_1, E_2, E_3 .... E_n) değerleri oyunda bulunan 1, 2, 3 ....n şahıslı oyuncuların eşdeğerleri olsun. (n + 1). nci oyuncunun eşdeğerli oyun değeri $E_n + 1$ olacaktır. Daha önceki Açıklamalarda A = -A ters simetriğinin olabileceğini göstermiştik. O halde burada da;

(x_1, x_2, ... x_n) değerleri serisini aşağıdaki şartlar altında bir impütasyon olarak tarif edebiliriz. (38)

x_i, E_i .... (i = 1, 2 .... n) değerleri için ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = E$ dir.

Örnek : İki oyunculu bir oyun için, $E_1 = -1$, $E_2 = 0$ $E_{n+1} = E_3 = -3$ olsun.

Bu durumda $\Sigma E = (E_{n+1})$ tarifinden E = 3 dür. Aşağıdaki değer takımları impütasyonlardır.

(2, 4), (—2, 8), (6, 2)

	E_1	E_2	E_3
	—2	2	—6
i_1	2	4	—6
i_2	—2	8	—6
i_3	6	2	—6

Hiçbir değer oyun değerinin altında değildir.

(8, —2) .... $-2 < E_2 = 0$

(1, 1)............................. $1 + 1 = 2 < E = 3$ olduğu için impütasyon değildir.

n şahıslı sıfırdan farklı toplamlı oyunların çözümü :

Çözüm aynen yukarıda tatbik ettiğimiz metotdan hareketle yapılacaktır. Yalnız sıfır toplamlı oyunlardan farklı olarak;

---

(38) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no : 730. Gümüşsuyu - İst. 1968 s. 151

Bu çözüm aşağıdaki şartları sağlıyan impütasyonlar setidir. (39)

1 — Bu setteki hiçbir impütasyon diğerine baskın değildir.

2 — Bu set dışındaki herhangi bir impütasyon bu setteki impütasyonlardan biri tarafından bastırılır.

Örneğin;

			Ödemeler		
A	B	C	A	B	C
α	α'	α''	4	-2	-1
α	α'	α''	-2	2	2
α	α'	α''	2	0	3
α	α'	α''	-4	1	-1
β	β'	β''	2	0	-3
β	β'	β''	4	-2	1
β	β'	β''	1	0	-1
β	β'	β''	-2	1	0

A (α, β) B (α', β') C (α'', β'')

Yukarıdaki tablodan A, B, C nin ödemeler matrix'ini düzenlemek mümkündür.

Matrix : I

	(B,C)	$\alpha\alpha''$	$\alpha'\beta''$	$\alpha''\beta'$	$\beta'\beta''$
A	α	4	-2	2	-4
	β	2	4	1	-2

Matrix : II

	(A,C)	$\alpha\alpha''$	$\alpha\beta''$	$\beta\alpha''$	$\beta\beta''$
B	β'	-2	2	0	1
	β''	0	1	0	1

Matrix : III

	(A,B)	$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta'$	$\beta\alpha'$	$\beta\beta'$
C	α''	-1	3	-3	-1
	β''	2	-1	1	0

(39) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. Yayınları Yayın no : 730. Gümüşsuyu — İst. 1968 s. 152

Matrix I den çözüm denklemlerini yazalım;

$4x + 2(1-x) \geqq E$ ve $2x + 1(1-x) \geqq E$ I
$-2x + 4(1-x) \geqq E$ ve $-4x - 2(1-x) \geqq E$ II
$4y + 2(1-y) \leqq E$ ve $-4y - 2(1-y) \leqq E$ III
$-2y + 4(1-y) \leqq E$ ve $2y + 1(1-y) \leqq E$ IV

Matrix II den çözüm denklemleri;

$-2x - 0(1-x) \geqq E$ ve $2x + (1-x) \geqq E$ I
$0.x - 0(1-x) \geqq E$ ve $x + (1-x) \geqq E$ II
$-2y - 0(1-y) \leqq E$ ve $2y + (1+y) \leqq E$ III
$0.y(1-x).0 \leqq E$ ve $y + (1-y) \leqq E$ IV

Matrix III den

$-x + 2(1-x) \geqq E$ ve $-3x + (1-x) \geqq E$ I
$3x - 1(1-x) \geqq E$ ve $-x + 0(1-x) \geqq E$ II
$-y + 2(1-y) \leqq E$ ve $-3y + (1-y) \leqq E$ III
$3y - 1(1-y) \leqq E$ ve $-y + 0(1-y) \leqq E$ IV

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliklerin ortak çözümünden oyunun ve herbir stratejinin değerleri bulunarak kombinasyonlar teşkil edilir.

LİNEAR PROĞRAMLAMA VE OYUN TEORİSİ :

Doğrusal proğramlama ile iki veya daha çok çelişkilerin çözümüne gidilir. Oyundaki çelişkileri oyuncuların sayıları ortaya koyar. Oyuncuların herbiri sonlu veya sonsuz stratejileri ve bu stratejilere ait seçimlere sahiptirler. Bir oyuncu kendi stratejisini diğer oyuncularca seçilen stratejilerin herhangi birine özgü bilgiye sahip olmadan düşünür.

Bununla beraber bütün oyuncuların mevcut seçişleri oyunun ayrı ayrı sonuçlarını veya ödemelerini etkiler. Herbir oyuncu için bu sonuçlar bir hayli bir kazancı veya kaybı veya berabere kalmayı gösterir.

İki oyuncu ile oynanan oyunda, bir oyuncunun kazancının anlamları diğerinin eşit kaybını belirler. İki şahıs sıfır toplam oyunlarındaki gibi, bir oyuncunun ödemesini başka sözlerle ifade etmek yeterlidir. Varsayıldığı yönle stratejilerin numaraları herbir oyuncunun sonudur. Iki oyuncunun strateji (seçim) numaraları matrix'te m ve n şeklinde (mxn) çıkışları olarak özetlenmeli. (40)

---

(40) Taha, A. Hamdy. Operations Research an İntroduction. The macmıllan Company. 866 third. Avenue, Newyork. 10022 Collier - macmıllan. Canada LTD Toronto, Ontario. 1971 s. 171

İki şahıs sıfır toplamlı oyunlarda olduğu gibi herbir oyuncunun ödemeleri sonuç değeri olarak ifade edilir.

Oyunlarda çeşitli stratejilerle elde edilebilecek kazançların, el sayısına göre sabit kalması, Linear proğramlama tekniklerinin tatbikini mümkün kılmaktadır. El tabiriyle oyunun tekrarlanma sayısı kasdedilmektedir. (41)

İki oyuncu ile oynanan oyunda, bir oyuncunun kazançları diğer oyuncunun kayıplarıdır. (İki şahıs sıfır toplam oyunlarındaki gibi), Kavramları açıklıyabilmek için sadece iki oyuncunun para atmasını düşünelim. Herbir oyuncunun seçimleri tura (t) veya yazı (y) dir. Sonuçta (tt, yy) kombinasyonu kurulacaktır. A nın B den kazandığı, B nin kaybına eşittir. E (A) + E (B) = 0 dır. Fakat oyuncuların üstün olma durumları olabilir. Örneğin;

		B	
		t	y
A	t	+1	—1
	y	—1	+1

Herbir oyuncunun oyunda gerek duyduğu saf ve karma stratejileri matrix'te göstermek mümkündür. Burada oyunu A, B oynamadan oynarsa Oyuncu A saf stratejiye sahip olacaktır. Oyunlarda iki şahıs yerine n şahıslarda olabiliyordu. O halde denilebilirki oyun teorisi bu açıdan herbir oyuncunun linear proğramlama içerisinde optimal stratejilerinin matematiksel düzenlemeler setidir.

Problemin karmaşık yapısı ve her oyuncu tarafından seçilen belli stratejileri hakkında bilgi noksanlığı nedeniyle, burada model optimal kavram ve tutucu kriterlere dayandırılmıştır. Her bir oyucunun kendi strateji seçimleri (karmaşık veya saf) diğer tarafın seçimleri ile belirlenen ödemeler garantisinden kötü olamaz. (42)

---

(41) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no : 730 Gümüşsuyu - İst. 1968 s. 129

(42) Taha, A. Hamdy. Operations Research an Introduction. The macmıllan Company. 866 third Avenue, Newyork 10022. Collier - maçmıllan. Canada. Toronto, Ontario. 1971 s. 172

Oyuncu A nın seçimleri x_i ($x_i \geq 0$, $\Sigma_i^m = 1\ x_i$) buradan,

$$\max_{x_i} \{\min (\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i ,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i \ldots\ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{im} x_i) \}$$

Oyuncu B nin seçimleri y_j ($y_j \geq 0$, $\Sigma_1^n = 1\ y_j$) buradan,

$$\min_{x_j} \{\max (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \ldots\ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j) \}$$

yazılabilecektir.

Ortalama minimax ödeme $\geq$ maximin ortalama ödeme; değer eşitliğinde x_i optimal çözüme indirgendiğinde ortalama minimax değer = ortalama maximin değer eşitliği oluşacaktır.

x^*_i ve y^*_j iki oyuncunun optimal çözümleri ise, bu taktirde her ödeme a_{ij} (x_i, y_j) olasılığıyla bağlantılı olacaktır. Böylece oyundan beklenilen değer v olarak alınırsa,

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y^*_j\, x^*_i$$ bağıntısı yazılabilecektir.

2xn ve mx2 oyunlarında verilen matrix'te bazen denge noktası olmayabilir. Örneğin;

B

A

A \ B	y_1	y_2	....	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}

Teorik olarak bu matrix'te denge noktasının olmadığını varsayalım.

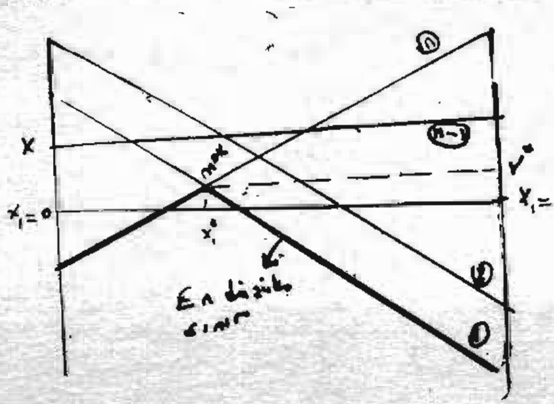
A iki stratejiye sahipken B nin stratejileri n kadar olmaktadır.

Oyuncu B nin oynaması halinde A nın ortalama ödemeleri ne olacaktır? Bunu belirtmek için aşağıda gerekli formüller verilmiştir.

B nin saf stratejisi	A nın ortalama ödemeleri
1	$(a_{11} - a_{21})\, x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\, x_1 + a_{22}$
.	.
.	.
.	.
.	.
n	$(a_{1n} - a_{2n})\, x_1 + a_{2n}$

A nın ortalama ödemelerinin yerini tutan saf stratejileri B nin seçimlerini vermektedir. x in herbir değeri A nın ortalamā varyanslarını gösterir.

ortalama ödeme



Grafik 8

Her yol sayısı B nin saf stratejilerine denktir. En düşük sınırın yolları (çizgileri) x fonksiyonun ortalama minimum ödemesini verir. Kalın çizgilerle çizilmiş doğru üzerindeki bütün noktalar B nin ödemeler matrix'inde kayda alınacak minimum kayıplarıdır. Maximum nokta iki doğrunun kesim noktası olan tepe noktasıdır. Dolayısi ile x_i $(= x^*_i)$ dir.

2xn oyunları için ortalama değer;

$$v^* = y^*_1 \{ (a_{11} - a_{21})\, x^*_1 + a_{21} \} + y^*_2 \{ (a_{12} - a_{22})\, x^*_1 + a_{22} \} + \ldots\ldots$$

$+ y_n \{ (a_{1n} - a_{2n})\, x^*_1 + a_{2n} \}$ formülü ile bulunur. Fakat maximum noktadan geçmeyen şekilde 2 ve n-1 doğrularının $\{ (a_{1j} - a_{2j})\, x^*_1 + z_{2j} \}$ değerleri doğruların $y_j = 0$ noktasında analizini gerektirir.

(x) Şekil, Taha, A. Hamdy. Operatians research an ıntraduction. 177 den alınmıştır.

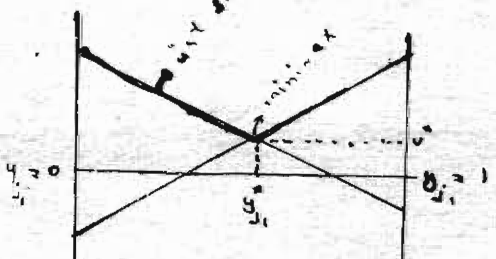
$Y_j = 0$ oluncaya kadar doğrular yukarı veya aşağı kaydırılmalıdır. Bu sonuçtan şu gerçeği çıkarmak mümkündür. $\Sigma_j^n = 1$ olduğu için $y^*_j = 1$, $y^*_j >$ o oyunun ortalama değeri (v^*) maximum ortalama ödemeye eşit olmayacak ve sonuç olarakta minimax teorisi bozulacaktır. Zira maximum nokta iki düz doğrunun kesim noktasıdır. Bununla beraber maximum noktadan geçen ikiden fazla doğru olabilir. Bu taktirde y_j nin optimal değerlerinden bahsedilecektir. Demekki çözümlerin ağırlıksız ortalamasında dahi optimal çözüm geliştirilebilecektir.

Sonuç olarak (2xn) oyunları temelde (2x2) oyun çözümlerine eşdeğer olacaktır. y_{j1} ve y_{j2} B nin kullanabildiği iki strateji ise $y_j = 0$, $y_{j2} = 1 - y_{j1}$, $y_{j1} \geq 0$ ve $y_{j2} \geq 0$ olduğu için B nin A nın stratejilerine eşdeğer ortalama ödemeleri şöyle olacaktır.

A nın saf stratejileri	B nin ortalama ödemeleri
1	$(a_{1j^1} - a_{1j^2}) y_{j1} + a_{1j2}$
2	$(a_{2j^1} - a_{2j^2}) y_{j1} + a_{2j2}$
.	.
.	.
.	.
n	$(a_{nj^1} - a_{nj^2}) y_{j1} + a_{nj2}$

Doğruların içerdiği ödeme denklemlerinin kesim noktası minimum nokta olan y_{j^1} i gösterir.

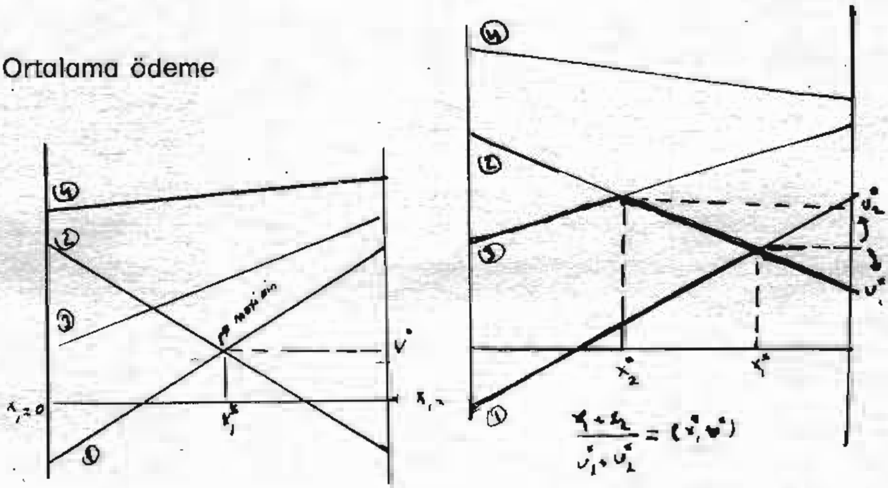
Ortalama ödeme



Grafik 9

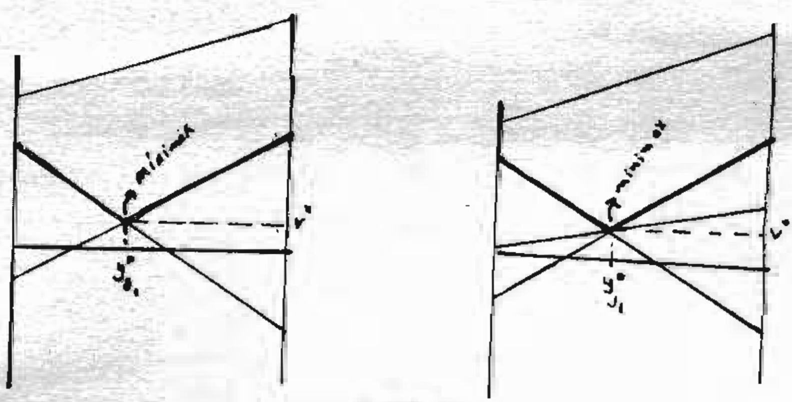
o halde (2xn) oyununda maximin - minimax kriter grafiksel olarak aşağıdaki gibi olacaktır.

Ortalama ödeme



Grafik 10

Ortalama ödeme



Grafik 11

Şimdi aşağıdaki (2x4) oyununu düşünelim.

B

A

A \ B	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	3	-2
x_2	2	4	1	5

A nın ortalama ödemelerine karşın B nin saf stratejileri denklemsel olarak şöyledir.

B nin saf stratejileri	A nın ortalama ödemeleri
y_1	$(1-2)x + 2 = -x + 2$
y_2	$(1-4)x + 4 = -3x + 4$
y_3	$(3-1)x + 1 = 2x + 1$
y_4	$(-2-5)x + 5 = -7x + 5$

Denklemler :

$-x + 2$	I
$-3x + 4$	II
$2x + 1$	III
$-7x + 5$	IV

I ve II den $-x + 2 = -3x + 4$ den $x = 1$ bu değer II, III ve IV yerine konulursa

$$v^* = \left\{ \begin{array}{l} -3.1 + 4 = +1 \\ 2.1 + 1 = +3 \\ -7.1 + 5 = -2 \end{array} \right\}$$ bulunur.

O halde kombinasyonlar : (y_2, y_3), (y_2, y_4) ve (y_3, y_4) dür.

Birinci Kombinasyonda $y_2 = 5$ $y_3 = 4$ dür, yani $y_2 > y_3$ dür.

İkinci Kombinasyonda $y_2 = 5$ $y_4 = 3$ dür, yani $y_2 > y_4$ dür.

Üçüncü Kombinasyonda $y_3 = 4$ $y_4 = 3$ dür, yani $y_3 > y_4$ dür.

O halde : $y_2 > y_3 > y_4$ dür.

Şimdide (4x2) oyununu düşünelim.

B

A \ B	x_1	x_2	
y_1	1	2	
y_2	-2	3	A
y_3	1	4	
y_4	-3	7	

$y_2 = 1 - y_1$ verilmiş olsun

A nın saf stratejileri	B nin ortalama ödemeleri
y_1	$(1-2)\, y_1 + 2 = -y_1 + 2$
y_2	$(-2-3)\, y_1 + 3 = -5y_1 + 3$
y_3	$(1-4)\, y_1 + 4 = -3y_1 + 4$
y_4	$(-3-7)\, y_1 + 7 = -10y_1 + 7$

$-y_1 + 2 = -y_1 + 3$ den $y_1 = 1/4$

$$\left.\begin{array}{l} -5y_1 + 3 \\ -3y_1 + 4 \\ -10y_1 + 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -5(1/4) + 3 = 1\ 3/4 \\ -3(1/4) + 4 = 3\ 1/4 \\ -10(1/4) + 7 = 4\ 2/4 \end{array} \qquad v^* = \left\{\begin{array}{l} 1\ 3/4 \\ 3\ 1/4 \\ 4\ 2/4 \end{array}\right.$$

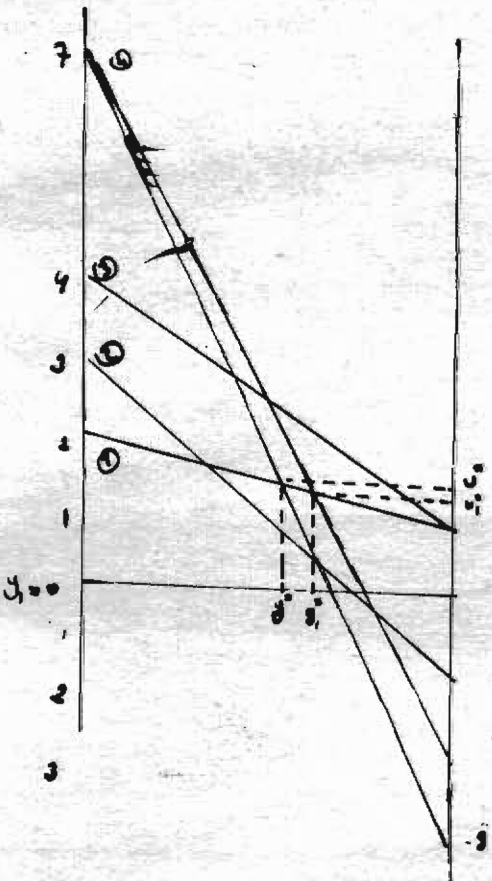
Kombinasyonlar (y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_2, y_4)

$(y_2, y_3) \rightarrow y_2 = 1,\ y_3 = 5,\ y_3 > y_2$

$(y_3, y_4) \rightarrow y_3 = 5,\ y_4 = 4,\ y_3 > y_4$

$(y_2, y_4) \rightarrow y_2 = 1,\ y_4 = 4,\ y_4 > y_2$

O halde : $y_3 > y_4 > y_2$ dir.



$y_1 - 3 \le E$ de $(y_1 = 2,\ E = -3)$

$-3y_1 + 2 \le E$ de $(y_1 = 2/3,\ E = 2)$

$-2y_1 + 4 \le E$ de $(y_1 = 2,\ E = 4)$

Grafik 12

ÜSTÜNLÜK :

(2xn) ve (mx2) oyunlarının münakaşası yukarıda basitçe yapıldı. Oyundan her oyuncunun bir veya daha fazla saf stratejileri çıkarılırsa, çıkarılan stratejiler daha üstün olanlar tarafından domine edilirler. Aşağıdaki oyunda bu durumu düşünelim.

B

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	1	8	3
x_2	6	4	5
x_3	0	1	2

A

Oyuncu B, A nın üçüncü stratejisi için inputlarını hiç değilse birinci ve ikinci stratejilerin ikisi olmak üzere kazançlarıyla açıklar.

Bu durumda, üçüncü strateji matrix'ten çıkarılmış olmalı. Çünkü A birinci veya ikinci stratejisini daha iyi yapabilir. Dolayısı ile 3. ncü strateji birinci ve ikinci strateji tarafından üstün kılınır. Yukarıdaki matrix'i aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

B

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	1	8	3
x_2	6	4	5

A

Sadece saf stratejilerin bulunduğu durumlarda temel olarak üstünlüğe gerek yoktur. Örneğin;

B

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	5	0	2
x_2	-1	8	6
x_3	1	2	3

A

Saf stratejilerin hiçbiri A nın hiç değilse diğer saf stratelerinden biri olarak verilmemiştir. Bununla beraber eşit ağırlıklar kullanımında, A nın birinci ve ikinci saf stratejileri ortalama ağırlığı verir.

$\{ 1/2(5-1),\ 1/2(0 + 8),\ 1/2(2 + 6) \}$ veya

(2, 4, 4). Bu üstünlük A nın üçüncü saf stratejisindedir. Bu durumda üçüncü strateji matrix'ten çıkarılmalıdır.

Yukarıdaki ifadeler ışığında doğrusal proğramlamadaki (mxn) oyunlarının çözümünü yapmaya çalışalım.

A nın seçimlerini :

$$\max \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i , \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \right)$$

Yukarıdaki formül sınır aralıkları olarak yazılırsa;

$$x_1 + x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots x_m = 1$$
$$x_i \geq 0, \ i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots m$$

Bir doğrusal proğramlamada yukarıdaki ifadeler çekilip yerlerine konulursa;

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i , \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \right)$$

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i , \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \right) \text{ verilsin;}$$

Maximize $z_0 = V$ olduğunda, işleme temel olarak;

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \geq v$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, x_i \geq v$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i > v$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (x_i \geq 0 \text{ bütün i ler için,})$$

yazılır.

Açıkça bu durum v oyununun değerini tanımlar. Doğrusal proğramlama formülasyonu bütün (n + 1) şartlarını v ile bölerek kısaltmak suretiyle işler. Bu bölme neticesinde $v > o$ dan büyük olduğu sürece optimalite sağlanır. Aksi taktirde eğer $v < o$ ise, oyunun değeri optimal değildir. Optimal çözüm elde edildikten sonra oyunun gerçek değeri K çıkarıldıktan sonra elde edilir. Böylece $v > o$ kabul edildiğinde yukarıdaki şartlar doğacaktır. (45)

$$a_{11}\, x_1/v + a_{21}\, x_2/v + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}\, x_m/v \geq 1$$
$$a_{12}\, x_1/v + a_{22}\, x_2/v \ldots\ldots\ldots + a_{m2}\, x_m/v \geq 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{1n}\, x_1/v + a_{2n}\, x_2/v + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}\, x_m/v \geq 1$$
$$x_1/v + x_2/v + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}\, x_m/v = -a_{mn}\ (x_m/v)2$$
$$= x_m/v = 1/v$$
$$x_i = x_i/v\ (i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots m \text{ verilsin}) \text{ Böylece,}$$
$$\max v = \min 1/v = \min \{x_1 + \ldots\ldots\ldots + x_m\}$$
$$x_0 = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_m$$

matrix olarak,

$$a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}\, x_m \geq 1$$
$$a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}\, x_m \geq 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_m \geq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ x_m \geq 0$$

Simplex metodu kullanmak suretiyle optimal çözüm sağlandıktan sonra, dönüşüm formüllerinden orijinal optimal değerler tayin edilebilir. Oyuncu B nin problemi diğer taraftan;

$$\min \{ \max (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \ldots\ldots\ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j) \}$$

yan şartlara bağlı olarak;

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_n \qquad y_j \geq 0\ (j = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n)$$

(45) Taha, A. Hamdy. Operations research an introduction, Macmillin company. New York 1968 s. 184

Bu doğrusal proğramlamada aşağıdaki gibi yerine konulursa;

maximize $y_0 = y_1 + y_2 + \dots\dots + y_n$ yan şartlarla

$a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots\dots + a_{1n} Y_n \leqslant 1 \qquad Y_1 \geq 0$

$a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \dots\dots + a_{2n} Y_n \leqslant 1 \qquad Y_2 \geq 0$

.

.

.

$a_{m1} Y_1 + m_2 Y_2 \dots\dots + a_{mn} Y_n \leqslant 1$ ki, $\qquad Y_n \geq 0$

$y_o = 1/v \qquad y_j = y_j/v \qquad (j = 1, 2 \dots\dots n)$

Aşağıdaki (3x3) oyununu düşünelim.

B

Kolon maximum: A \ B	y_1	y_2	y_3	sıra minimum
x_1	3	-1	-3	-3
x_2	-3	3	-1	-3
x_3	-4	-3	3	-4
	3	3	3	

A

maximum değer -3 dür. Oyunun değerinin negatif veya sıfır olması mümkündür.

B

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	8	4	2
x_2	2	8	4
x_3	1	2	8

A

k = 5

Böylece sabit bir k enazından negatif maximum değere eşit olan matrix'in bütün unsurlarına ilave edilir. Bu demektirki $k \geq 3$ dür. $k = 2$ ise, yukarıdaki matrix'i şu hale gelir.

B

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	5	1	-1
x_2	-1	$\boxed{5}$	-1
x_3	$\boxed{-2}$	$\boxed{-1}$	5

A

Yukarıdaki mantık çerçevesi içerisinde B nin doğrusal proğramlamadaki fonksiyonel değerleri,

maximize $y_0 = y_1 + y_2 + y_3$
yan şartlara bağlı olarak,
$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1$
$2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \leq 1$
$y_1 + 2y_2 + 8y_3 \leq 1$
$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$

8	4	2
2	8	4
1	2	8

Bu problem için verilen son optimal tablo aşağıdaki gibidir:

temel	y_0	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	çözüm
y_0	1	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196
y_1	0	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
y_2	0	0	1	0	-3/98	3/196	-1/14	11/196
y_3	0	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49

Böylece orijinal problem için

$v^* = 1/y_0 - k = 196/45 - 5 = -29/45$
$y^*_1 = y_1/y_0 = 1/14 : 45/196 = 14/45$
$y^*_2 = y_2/y_0 = 11/196 : 45/196 = 11/45$
$y^*_3 = y_3/y_0 = 5/49 : 45/196 = 20/45$

A için optimal stratejileri yukarıda ikili çözümlerle bulunur. Bunu veren değerler :

$x_0 = y_0 = 45/196 \quad x_1 = 5/49, \quad x_2 = 11/196, \quad x_3 = 1/14$ zira,
$x_1 = x_1/x_0 = 20/45$
$x_2 = x_2/x_0 = 11/45$
$x_3 = x_3/x_0 = 14/45$ yazılabilir.

Örnek :

Ödemeler matrix'i;

B

A \ B	I	II	
I	2	5	A
II	3	1	
III	0	3	

olsun.

Ödemeler tablosunda tepe noktası yoktur. Yani minimum sıra =

maximum kolon, eşitliğini sağlıyan sıranın en küçük değerine karşın sütunun enbüyük kare değeri işaret edilmemiştir.

O halde karma strateji vardır. A nın oyunları x_1, x_2, x_3 olsun. Şimdi oyuncu A nın en iyi karma stratejisini tayin edelim.

Modelin kurulması :

I $\quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$ ve

II $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$

B nin farklı iki stratejisine paralel olarak A nın umut edilen kazançları;

$2x_1 + 3x_2 + 0.x_3$

$5x_1 + 1.x_2 + 3x_3$ şeklini alacaktır.

Bu iki kazançtan küçük olanını veya ikisinin de eşit olanını alarak ortak değeri (E) ile gösterelim. Yukarıdaki denklemler :

$2x_1 + 3x_2 \geq E$

$5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq E$ şeklinde yazılacaktır. $E \geq 0$ dır. Çünkü bütün kare değerleri $x_{ij} \geq 0$ dır. Fakat matrix'te negatif değerler varsa, yukarıdaki teorik ifade altında kare değerlerini positif kılmak için x_{ij} değerlerine sabit k sayısı ilave etmek gerekecektir.

$x_1/E \geq 0$, $x_2/E \geq 0$, $x_3/E \geq 0$ I

$x_1/E + x_2/E + x_3/E = 1/E$ II

$2(x_1/E) + 3(x_2/E) + 0(x_3/E) \geq 1$ III

Oyuncu A (x_1, x_2, x_3) karma stratejisini E yi maximum kılacak şekilde seçecektir.

$x_1/E + x_2/E + x_3/E = 1/E$ eşitliğinde 1/E yi maximum kılmak mümkündür.

1/E yerine E' dersek,

$x_1/E = 0$ yerine $x_1/E = x$

$x_2/E = 0$ yerine $x_2/E = y$

$x_3\ E = 0$ yerine $x_2/E = z$ yazalım. Bu halde A nın eşitlik halinde değeri;

$\min E' = x + y + z$

$x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$

$2x + 3y + 0.z \geq 1$

$5x + 1y + 3z \geq 1$

Bu model belirlendikten sonra simplex metotla çözüm tekniğini yürütmek kolaydır. Şimdi B nin problemini gözönüne alarak modeli kurmaya çalışalım.

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

$y_1 + y_2 = 1$

A nın x_1, x_2, x_3 stratejilerini tek tek oynadığını varsayarak her Ax stratejisine karşın B nin karma stratejileriyle yapacağı ödemeler;

$2y_1 + 5y_2$

$3y_1 + 1y_2$

$0.y_1 + 3y_2$ şeklini alır.

Bunların en büyüğünü veya hepsinin eşit olması halinde, bu ortak değeri E'' ile gösterelim. B nin gayesi ödemelerini minimum yapmak ve bu özel durumda ise, E'' den daha küçük yapmak olacaktır.

$2y_1 + 5y_2 \leqslant E''$

$3y_1 + y_2 \leqslant E''$

$0.1y_1 + 3y_2 \leqslant E''$ yeni hali ile model,

$y_1/E'' \geq 0,\ y_2/E'' \geq 0$

$y_1/E'' + y_2/E'' = 1/E''$

$2(y_1/E'') + 5(y_2/E'') \leqslant 1$

$3(y_1/E'') + (y_2/E'') \leqslant 1$

$0(y_1/E'') + 3(y_2/E'') \leqslant 1$

$y_1/E'' = u \quad y_2/E'' = v \quad 1/E'' = E''_1 \quad u \geq 0 \quad v \geq 0$ olsun.

$2u + 5v \leqslant 1$

$3u + 1v \leqslant 1$

$0.u + 3v \leqslant 1$

maximum $E''_1 = u + v$

O halde bu modelde simplex tekniğiyle çözülebilir. Simplex tekniğin temel esaslarından biri olarak eşitsizlikleri eşitlik haline getirmek için α, β, σ gibi üç izafi değişken ilave etmek gerekir. O halde;

$u \geq 0,\ v \geq 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \sigma \geq 0$ dır.

$2u + 5v + \alpha$ .... $= 1$

$3u + 1v$ .... $+ \beta$ .... $= 1$

$0.u + 3v$ .... $+ \sigma$ .... $= 1$

$-u + v$ .... $+ m = 0$

Amaç : maximum m, dir.

Yukarıdaki denklem değerlerini tablo halinde gösterelim.

0	0	0	1	1	
α	β	σ	u	v	pr
1	0	0	2	5	1
0	1	0	3	1	1
0	0	1	0	3	1

Tb. I

2.0
3.0
0.0

1 - 0 = 1

u ve v nin birer üniteleri (1) lik bir kâr sağlamaktadır.

Örneğin; (4) stratejiye dahil edilsin. Şimdi ne kadar (4) kullanabileceğimizi tesbit edelim.

α ya göre 1/2
β ya göre 1/3
σ ya göre tahdit yok,

O halde 1/3 ü kullanırız. Bu halde yani tablo için gerekli hesaplamalar,

α nın : 1/3.2 = 2/3 geriye 1/3 ü kalır.
β nın : 1/3.3 = 1 tamamı alınır ve kullanılır. σ dan hiç alınmaz.
Yeni tablodaki dönüşüm katsayılarını bulursak,

birinci tablodan

$u = 2\alpha + 3\beta + 0$ .... β = -1/3 u - 2/3α
$v = 5\alpha + 1\beta + 3\sigma$ .... v = 13/3α + 1/3 u + 3σ

ve v nin ilgili katsayılarını aşağıdakl tabloya koyarsak;

	0	0	0	1	1	pr
	α	β	σ	u	v	pr
0. α	1	2/3	0	0	13/3	1/3
1. β	0	1/3	0	1	1/3	1/3
0. σ	0	0	1	0	3	1

-(13/3).0
-(1/3).1
-(3).0

$$1 - \frac{1}{3} = 2/3 \text{ kâr}$$

Yeni tablonun tahlili ve alternatiflerin aranması :

Yukarıdaki tablo ışığı altında hesaplamaları yapalım;

v yi stratejiye ithal etmek karlı olmaktadır. Şimdi ne kadar v ithal edebileceğimizi araştıralım.

α nın verdiği olanak 1/3 : 13/3 = 1/13

β nın verdiği olanak 1/3 : 1/3 = 1

σ nın verdiği olanak 1 : 3 = 1/3

O halde 1/3 v ithal edebiliriz. Şimdi yeni tabloyu tanzim edelim.

v → 1/3 ithali halinde 1/3 . 13/3 = 1/3α nın hepsi çıkar,

u → 1/3 -1/13 . 1/3 = 12/39 = 4/13 u kalır,

1 - 1/13 . 3 = 10/13

Yeni katsayılar,

yine; $u = 2\alpha + 3\beta + 0.\sigma$ ve

$v = 5\alpha + 1\beta + 3\sigma$ den

$= -1/13\,u + 3/13\,v + 9/13\sigma$ ve

$= 15/13\,u - 2/13\,v + 6/13\sigma$ bulunur.

Yukarıdaki ifadeleri içeren tablo :

	α	β	σ	u	v	pr
v	3/13	-2/13	0	0	1	1/13
u	-1/13	5/13	0	1	0	4/13
σ	9/13	6/13	1	0	0	10/13

karlılık analizi :

α : (3/13.1) — (1.1/13) = 1/13 zarar 0-2/13

β : (2/13).1) + (1.5/13) = 3/13 zarar 0-4/13

O halde v = 1/13, u = 4/13, σ = 10/13

Optimal stratejiyi tesbit edelim. Bu durumda,

max E'' = 1/13.1 + 4/13.1 = 5/13

Değişken değiştirme hesaba katılırsa;

1/E' = E'' .... E' = 1 : 5/13 = 13/5

y_1/E' = u .... y_1 = 4/13 . 13/5 = 4/5

y_2/E' = v .... y_2 = 1/13 . 13/5 = 1/5 değerleri elde edilir. Sınır aralıkları ve model denklemleri;

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$2x + 3y + 0.z \geq 1$

$5x + 1y + 3z \geq 1$

model $x + y + z = \min E$ idi.

$E = -\bar{E}$ değişken değişimini yapalım. Böylece E yi minimum yapmaya ve $\bar{E}$ yi de maximum yapmaya çalışacağız.

$E = -\bar{E}$ nin probleme tatbiki simplex metotda daha kolaydır. σ ve w gibi iki izafi değişkenle de eşitsizlikleri eşitlik haline getirebiliriz.

$2x + 3y + 0.z - \sigma = 1$

$5x + 1y + 3.z - w = 1$

$E = x + y + z - 0.\sigma - 0.w$ .... $\bar{E} = -E = 5/13$

Neticede;

$x = 13$, $y = 3/13$, $z = 0$ bütün bu değerler yukarıdaki denklemlerde yerine konulursa,

$E = 13/5$, $x_1 = 2/5$, $x_2 = 3/5$, $x_3 = 0$ bulunur.

Düalte prensibinin tatbiki ile çözümün bulunması :

	α	β	pr
u	—1/13	5/13	4/13
v	3/13	—2/13	1/13
σ	—9/13	6/13	10/13
E	2/13	3/13	5/13

Bu matrix'in sıralarını sütun, sütunlarını sıra halinde yazmak sureti ile transpoze edelim.

$$-\left\{\begin{array}{cccc|c} -1/13 & 3/13 & -9/13 & 2/13 & x \\ 5/13 & -2/13 & 6/13 & 3/13 & y \\ 4/13 & 1/13 & 10/13 & \underbrace{5/13}_{-} & E \end{array}\right.$$

Bu matrix'in invers matrix'i bütün tablo değelrerinin işaretlerinin değiştirilmesi sonucu elde edilmiştir.

Dominance (Üstünlük) :

Örnek : I

B \ A	I	II	III	IV	V	
I	9	3	1	8	0	0
II	6	5	4	6	7	7
III	2	4	3	3	8	
IV	5	6	2	2	1	
		2		1		
	9		4		8	

A ya maximumcu denir.

B ye minimumcu denir .

Matrix'in önce dominans kriteri ile basitleştirilir, sonra sıranın en küçüğü ve sütunun en büyüğü alınarak çözüm sağlanır. Ne varki yukarıda verilen örnek dominans yoluyla çözülememektedir. Çünkü;

B III IV olduğundan IV ü oynamaz,

B III IV olduğundan II yi oynamaz

A II IV olduğundan IV ü oynamaz.

Örnek : II

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	9 (4)	6 (5)	1 (3)	3 (6)	-2	0	2 (2)
II	11	7	2	4	0	3	4
III	13	4	8	14	6	2	3
IV	11 (1)	3	6	10	5	1	1

A II yi IV e tercih eder ve IV ü oynamaz

B IV ü VII e tercih eder ve VII i oynamaz

III, IV den dha kötü olduğu için II yi oynamaz

II, I den daha iyi olduğu için I i oynamaz

II ve IV de V ve VI den daha kötü oldukları için oynamaz.

O halde A ise bu durumda I i oynamaz.

Dominans durumları yazılarak tablo düzenlenirse;

$S_{II} > S_{I}$

$S_{IV} > S_{VI}$ $S_{ü5} > S_{ü4}$

$S_{ü5} > S_{ü3}$

$S_{ü5} > S_{ü1}$ $S_{ü6} > S_{ü3}$

$S_{ü6} > S_{ü2}$

S_{II}, S_{III} ve $S_{ü5}$, $S_{ü6}$ kalır. O halde son domine edilmiş matrix;

B

A	a_{ij}	5	6
	2	0	3
	3	6	2

yazılabilir.

BİBLİYOĞRAFYA

— Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve politikası A. Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın no : 396-53 Sevinç matbaası Ankara 1975.

— Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması İ.T.Ü. Yayın no : 730 Gümüşsuyu - İstanbul 1968.

— Jr. Hanshaw, R.C. K. Gülçür, Fazıl, İstatistik karar teorileri, İhtimaller-belirsizlikler. İ.T.A. yayınları. Yayın no : 48-100 Berksoy matbaası İstanbul 1969

— D. Allen, R.G. Mathematıcal Economıcs. Macmıllan and cc LTD Newyork. St martın's press. Toronto, ontorio 1956.

— Taha, A. Hamdy. Operations research an ınteroduction. The macmıllan company. 866 thrid avenue. Newyork Canada. 1971.

— Korum, Dr. Uğur. Matematiksel İstatistiğe Giriş. Ankara Üniversitesi S.B.F. Yayınları No : 317 Ankara Üniversitesi Basın evi. Ankara 1971.

— Kobu, Dr. Bülent. İşletme Matematiği II. İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları Yayın No : 1699/11 Özarkadaş Matbaası. İstanbul 1971

— Kılıçbay, Prof. Dr. Ahmet. Ekonometrik Metodlar ve Araştırma İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları No : 2110/52 Sermet Matbaası. İstanbul 1975

— Şen, Dr. Salim. Temel Üretim Yönetimi — İlkeler ve Uygulamalar — Ankara İ.T.İ.A. Neşriyat ve Yardım Bürosu. Emel Matbaacılık Sanayi Ltd. Şti. Ankara 1974

— Akmut, Doç. Dr. Özdemir. Proje Planlama ve Kontrol Yöntemleri İçinde bölüm 3. Atatürk Üniversitesi Yayınları. İşletme Fakültesi yayın no : 470/57, seri 14. A.Ü. Basınevi - Erzurum 1476.