STOKASTİK STOK MODELİ

Yazan : **Donald P. Graver** (*)
Gerald L. Thompson

Çeviren : **Ass. Şule Özkan** (**)

Önceki bölümlerde ortaya konan hususlar, klasik deterministik EOQ (ekonomik sipariş miktarı) modelinin talep ve ön zamanların tesadüfliğini hesaplamak için genişletilebilir olduğu hali göstermektedir. Analiz matematiksel olarak yaklaşık bir durum arzediyordu, fakat daha kompleks problemlerde bile benzer yaklaşımların yaygın kullanımı onun değerini kanıtlamaktadır. Aslında daha az makul yaklaşımlar oluşturan analizler uygulanabilir, ve uygulandı da.

Burada dikkate alınan durumda aşağıdaki karakteristikler vardır. Artırılmış veya bir kenarda ayrılmış bir kısım olarak veya belki de buzdolabı gibi belirli bir tüketici malı modeli depoda stoklanır. λ oranlı sabit Poisson sürecine göre tek kalemler tekeli meydana gelir. (Bölüm 10 a bakınız.) Mal stokları yeniden sipariş noktasına ulaştığında bir fabrikaya sipariş verilir. Bu sipariş üretim araçlarının sirkülasyonunu beklemek zorundadır. Yeniden siparişin yapıldığı andan malın tamamiyle üretilmesi ve depoya geri dönmesine kadar olan bekleme zamanı tesadüfi değişkendir; bu bir siparişten olan durumdan bağımsız ve üstel dağılıma sahiptir.

$$(11.5.1) \qquad P\{L \leq X\} = L - e^{-\mu^{n}} \qquad X \geqslant 0$$
$$= 0 \qquad X < 0$$

Bundan başka varsayılmaktadır ki bekleme zamanına esasen üretim araçları kuyruğundaki bekleme neden olmaktadır, ayrıca üretim

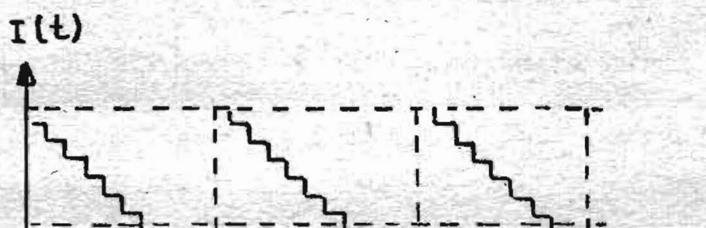
(*) Donald P. Gaver, Gerald L. Thompson; **Programming and Probability Models in Operations Research,** California. Brooks/ Cole Publishing com. 1973 pp. 547 — 552 den tercüme edilmiştir.

(**) A. Ü. İşletme Fakültesi Üretim Yönetimi Bölümü Asistanı araçları kuyruğunun nedeni de diğer yeni siparişlerdir. Gerçek üretim zamanı bir kere üretim aracına ulaşıldığında ihmal edilebilir uzaklıktadır, öyle kısadır ki ilk ilk sipariş hacmi üretim anında cari olmak üzre gözden geçirebilir. Dikkat edilmelidir ki revizyon için hazırlık ilk siparişin yapılmasında ihtiyaç duyulduğu gibi, üretim anında bir bir bilgi transferine ihtiyaç duyabilir.

Stok aşağıdaki gibi sipariş politikası ve vasıtasıyla depoda kontrol edilir. Depodaki maksimum stoklanmış mal sayısı M ünite ile gösterilir ($M > 0$). Stok seviyesi, (elde bulunan birim sayısı) r seviyesine düştüğünde ($0 < r < M$) yeniden sipariş yapılır. Çünki yeniden sipariş hacmi son anda gözden geçirilebilir olduğundan yeniden sipariş geldiğinde depodaki stok seviyesinin M olduğu varsayılır.

M ve r nin seçimi depodaki beklenen maliyet oranını minimum edecek şekilde yapılır. Sonuç olarak tüketicilerin sabırsız olduğunu varsayalım: Mal yoksa memnun olmayan müşteriler siparişlerini başka yere kaydırırlar ve satış kaydedilir. Kaydedilen satış varsayımına ve sipariş politikasına cevaben stok veya t zamanda eldeki ünite miktarı I(t) şekil (11.5.1) de gösterildiği gibi değişir. Şekil (11.4.2) ye olan benzerliği de dikkate alınacaktır. Modelimizin varsayımları sonlu sayı durumlu ve sabit geçiş ihtimalli sürekli zamanda bir Markov süyreci olarak geliştiğini emin kılır. Pj ($j = 0, 1, 2, \ldots\ldots, M$) uzun dönem veya sabit ihtimal olsun, ki bu durumda stok seviyesi j dedir :

(11.5.2) $$\lim_{t \to \infty} P\{ I(t) = j \} = P_j$$



Şekil : 11.5.1

Bu ihtimal stok seviyesinin j olduğu uzun dönem zaman kesitidir de. Pj ihtimallerini kullanarak bir baştan bir başa maliyet fonksiyonu kuracağız. Böyle yaptıktan sonra ihtimallerin nasıl ortaya çıkabilir olduğunu gösteririz, bu talep veya bekleme zamanı (ön zaman) varsayımlarından faydalanmak suretiyle olur. Son olarak M ve R nin optimal değerlerinin seçim yollarını göstereceğiz. İlk basit Ekonomik sipariş modelinde (EOQ) de geçerli olduğunu optimal M nin bir karekök formülü ile tesbit ettiğimiz gibi bu model için de tekrar bulmamız ilgi çekicidir.

A — Maliyet Oranı (Cost Rates) :

Sıfır stok şartı olmasıyla ilk maliyet bileşimini dikkate alalım. Varsayalım ki t zaman diliminde sistem $j = o$ durumundadır. Bu durumda talebi karşılayamıyan stok halinin (stockout) $(t, t+dt)$ zaman aralığında meydana gelmesi ihtimali aşağıdaki gibidir :

$$P\{I(t) = 0\}\ \lambda\ dt \tag{11.5.3}$$

T zaman uzunluğunda böyle bir sonucun beklenen sayısı (11.5.3) ün integral yardımıyla hesabilmesiyle elde edilir :

$$\int_0^T P\{I(t) = 0\}\ \lambda\ dt = \lambda \int_0^T P\{I(t) = 0\}dt \tag{11.5.4}$$

Yukarıdaki ifadeyi T ile böldüğümüzde zaman birimi başına talebi karşılayamayan stok halinin uzun dönem beklenen sayısı birim zaman başına T büyük olana kadar yaklaşır. Fakat herhangi bir j için aşağıdaki şekilde gösterilebilir :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P\{I(t) = j\}dt = p_j \tag{11.5.5}$$

Böylece uzun dönemde talebi karşılayamayan stok halinin oranı $\lambda\ p_o$ olarak belirlenir. Eğer ünite başına talebi karşılayamayan stok halinin maliyeti c_{so} ise, uzun dönemde talebi karşılayamayan stok halinin maliyeti $c_{so}\ \lambda\ p_o$ dır.

Stok seviyesi yeniden sipariş noktası r ye ulaştığı zaman sipariş yapılır ve siparişleme masrafı c_o olur. Böyle yeniden siparişin olması durumunda $(t, t + dt)$ zaman aralığında ihtimal $I(t)$ $r + 1$ dır ve $(t, t + dt)$ zaman aralığında talep :

(11.5.6) $P\{(t, t + dt)$ zaman aralığında yeniden sipariş$\} P\{I(t)\} = r + 1\} \lambda\, dt$ olur. Uzun zaman dönem sipariş yapma maliyeti oranı $c_o\, P_{r+1}$ dir.

benzer sebeplerle talebi karşılayamayan stok halini tahlil etmek için kullanılır.

Son olarak stok taşıma maliyetinin maximum stok için uygun olduğu varsayılır, yani $c_c\, M$ e eşittir. Bütün maliyet unsurlarını bir araya getirdiğimizde görülür ki uzun dönem toplam maliyet oranı :

(11.5.7) $C\,(M, r) = c_{so}\, \lambda\, p_o + c_o\, \lambda\, p_{r+1} + c_c\, M$ dir.

M ve r ile ilgili olarak bu ifadeyi minimize etmek için p_o ve p_{r+1} bunları karar parametreleri cinsinden ve tabii talep oranı λ ve yeniden sipariş oranı μ cinsinden tarımlamak gereklidir.

B — Stokastik Süreç Stok Seviyesi (The Inventory Level Stochastic Process)

p_o ve p_{r+1} ifadelerini çıkarmak için (11.5.7) nolu maliyet denklemine ihtiyaç vardır. Bahis 10, bölüm 10.3 de sözü edilen denklemleri kullanacağız (x). Gerçekten denge denklemi yaklaşım uygun durumdayken stok dalgalanmalarının halihazır süreci doğum-ölüm sürecinde (Birt-and-Death Process) değildir. Giriş ve çıkışlardan meydana gelen çeşitli durum ve tarzlar dikkate alınır.

(a) $j = 0$ durumu. λ oranıyla $j = 1$ durumunda $j = 0$ durumuna girişin olması.M hacmindeki bir sipariş geldiğinde bu durumdan çıkış μ oranıyla meydana gelir. Bu sebepten ilk denge eşitliği

(11.5.8) $\mu\, p_o = \lambda\, p_1$ dir.

(b) $j = 1,2,3,\ldots, r$ durumu. λ oranıyla $j + 1$ durumunda j durumuna λ oranıyla $j - 1$ için μ oranıyla M durumu için j durumundan çıkış olur. Geçiş değeri içinde ve dışında denklem :

(11.5.9) $\lambda\, p_{j+1} = (\lambda + \mu)\, p_j \quad (j = 1,2,\ldots,r$ için$)$

(c) $j = r + 1, r + 2,\ldots, M - 1$ durumu. Stok durumu r nin üstünde olduğu zaman, yeniden siparişe dayanılmaz. λ oranıyla $j + 1$ durumundan j durumuna giriş olur. Talep olduğu için j yi artırmanın tek yolu tekrardır. Bu sebepten,

(x) Bahis 10, bölüm 10.3 Birth —and—Death-Process Models (Doğum ve Ölüm Süreci Modeli)

(11.5.10) $\lambda p_{j+1} = p_j$ $(j = r + 1, r + 2, \ldots, M - 1$ için)

Son olarak normalizasyon şartları altında istediğimiz :

(11.5.11) $\sum_{J=0}^{\mu} p_j = 1$ dir.

Gerekiyorsa normal şartın otomatik olarak verdiğinden $j = M$ için denge denklemini çıkarmanın elzem olmadığını not edelim.

Şimdi tekrar (11.5.8), (11.5.9) ve (11.5.10) numaralı denge eşitliklerini yeniden çözebiliriz. (11.5.8) ve (11.5.9) no. lu denklemlerden yola çıkalım :

(11.5.12)

$$p_1 = \frac{\mu}{\lambda} p_o \quad \text{ve}$$

$$p_2 = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) p_1 = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\mu}{\lambda} p_o$$

Bu sürecin devamı gösterir ki;

(11.5.13)

$$p_j \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^{j-1} \frac{\mu}{\lambda} p_o \qquad (J = 1, 2, \ldots, r + 1)$$

$j = r + 1, r + 2, \ldots, M - 1$ için bir kez daha (11.5.10) a bakalım

(11.5.14) $p_j = P_{j+1} = P_{r+1}$

(11.5.15) $p_j = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) r \frac{\mu}{\lambda} p_o \quad (j = r + 2, r + 3, \ldots, M)$

(11.5.11) no. lu denklemde gösterilen normalizasyon şartını dikkate alarak p_o ı belirlemek için : (11.5.16)

$$1 = \sum_{j=o}^{\mu} p_j = p_o \left[1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\mu}{\lambda} \ldots \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) r \frac{\mu}{\lambda} + (M\text{-}r\text{-}1)\right.$$

$$\left.\left(1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^r \frac{\mu}{\lambda}\right], \quad = p_o \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^r \left[1 + (M - r) \frac{\mu}{\lambda}\right]$$

ve böylece,

(11.5.17)

$$p_o = \frac{1}{(1 + \frac{\mu}{\lambda})^r \, [1 + (M - r) \frac{\mu}{\lambda}]}$$

Böylece varsayılan siparişleme kuralı tarafından yönlendirilen uzun dönem stok seviyesi dağılımı elde edilmiş olur. (11.5.13) ün incelenmesi göstermektedir ki sipariş noktasının üstünde herhangi bir j seviyesindeki stok ihtimali j ile süratle (üstel olarak) yükselir ve sıfır stok durumunun oluşu ihtimali (p_o) böyle mukayeseli olarak küçüktür. Kafi derecede yukarıda anlatılanlarla ilgili olarak denebilir ki stok yeniden sipariş noktasının üzerinde verilen j değerinin ($j = r + 1, r + 2, \ldots, M$) hemen hemen aynı derecede herhangi bir seviyede olmasıdır.

P_o için elde bir ifade olduğundan uzun dönem talebi karşılayamayan stok halinin maliyet oranı (11.5.7.) no lu formüle göre şöyledir :

(11.5.18)
$$c_{so} \, p_o \, \lambda = \frac{c_s \, \lambda}{(1 + \frac{\mu}{\lambda})^r \, [1 + (M - r) \frac{\mu}{\lambda}]}$$

yeniden siparişin maliyet oranını bulmak için (11.5.13) no. lu denklem kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir :

(11.5.19)

$$c_o \, P_{r+1} \, \lambda = \frac{c_o \, \mu \, (1 + \frac{\mu}{\lambda})^r}{(1 + \frac{\mu}{\lambda})^r \, [1 + (M - r) \frac{\mu}{\lambda}]}$$

Son olarak, maliyet oranı taşıdığından maksimum stok seviyesi M nisbidir, (11.5.7) no. lu denklemden toplam maliyet oranı :

(11.5.20)

$$C\,(M, r) = \frac{c_{so} \, \lambda + c_o \, \mu \, (1 + \frac{\mu}{\lambda})^r}{(1 + \frac{\mu}{\lambda})^r \, [1 + (M - r) \frac{\mu}{\lambda}]} + c_c \, M$$

Şimdi toplam maliyet oranını minimize eden M nin yaklaşık seviyesini seçmek mümkündür, (11.5.20). Sabit r yi bulmak için M ye göre türevini alırız :

$$\text{(11.5.21)} \quad \frac{\partial C(M, r)}{\partial M} = c_c - \frac{\mu c + \frac{\mu^2}{\lambda}(1 - \frac{\mu}{\lambda})^r c_o}{(1 + \frac{\mu}{\lambda}]^2 \left[1 + (M - r)\frac{\mu}{\lambda}\right]^2}$$

Yukarıdaki ifadeyi sıfıra eşitlediğimizde optimum μ değerini elde ederiz.

$$\text{(11.5.22)} \quad M_{opt} = r \left[\sqrt{\frac{\lambda^2 c_{os}}{(1 + \frac{\mu}{\lambda})^r \mu c_c} + \lambda \frac{c_o}{c_c}}\right] - \frac{\mu}{\lambda}$$

Klâsik ekonomik sipariş miktarı formülünde yapıldığı gibi aynı yolla (11.5.22) nin karekök ihtiva etmesi ilgi çekicidir. Bundan sonra optimum maksimum stok (M_{opt}) ifadesi (11.5.20) no. lu maliyet fonksiyonu yerine ikâme edilebilir, ve bu durumda optimum yeniden sipariş noktasını bulmak için işlemler sürdürülebilir. Mamafih bu son aşamayı matematiksel olarak başarmak güç olur. Pratik şartlarda sayısal bir araştırma yöntemi kullanmak için muhtemelen bu tatminkâr görülebilir, ki bu bilgisayarda uygun şekilde uygulanabilir.

Yukarıdaki model stok istem analizinde Markov zinciri tekniklerinin kullanılabildiği durumun bir örneğini verir.