SÜREKLİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KESİKLİ TAHMİN YAKLAŞIMLARI

Dr. İ. Hakkı DÜĞER (*)

Bu çalışmamızda, sürekli (continuous) stokastik (stochastic) diferansiyel denklemlerin çözümünde bazı kesikli tahmin yaklaşımları ile ilgilendik. Bu denklem sistemlerinin simultane çözümünde, J. D. SARGAN tarafından geliştirilen ve R. C. WYMER tarafından da programlanan ve uygulanan bu kesikli yaklaşım, özellikle ekonometrik modellerin tahmininde çok kullanılan tutarlı (uygun) bir yaklaşımdır. Ancak, denklem ve değişken sayısının çok olması halinde bilgisayar yardımı olmadan uygulanması mümkün değildir.

Çalışma,, asimpotik biasta çeşitli ekonometrik estimatörlerin aşağıda gösterilen formdaki stokastik diferansiyel denklem sistemleriyle türetilen datalardan meydana gelmesi haliyle ilgilidir ve yaklaşık olarak şöyle tahmin edilir;

$$\frac{dt}{dy} - Ay(t) = Bz(t) + a(t)$$

$$\{y(t-\delta) - y(t)\}\delta = 1/2\,A\{y(t+\delta) + y(t)\} + 1/2\,B\{z(t+\delta) + z(t)\} + V(t)$$

Burada, y(t) endojen değişkenler vektörü, z(t), exojen değişkenler vektörü ve A ve B sabit kaysayılar matrisidir. Bu A ve B matrisleri belirli sınırlamalarla a priori olarak hesaplanır. Asimptotik biasta, $0(\delta^3)$ de $\delta \rightarrow 0$ gibi gösterilir ve bu ise makul bir varsayımdır.

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Aşağıdaki formdaki sürekli stokastik modellerin tahminlerinde;

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t) = Bz(t) + U(t) \qquad (I)$$

(*) A. Ü. İşletme Fakültesi Üretim Fakültesi Yönetimi Bölümü Asistanı

A ve B sabit kaysayılar matrisi, y(t) n boyutlu endojen değişkenler matrisi, z(t) m boyutlu exojen değişkenler matrisi ki, bunlar zamanın sürekli fonksiyonudurlar veya kararlı stokastik süreç tarafından tüketilmişlerdir. U (t), tesadüfi değişkenler dağılımının bir matrisidir, öyleki, bir modelde değişkenlerin değerlerini ancak kesikli zaman aralıkları için elde etmek mümkündür ve dolayısryla da U (t) hata terimi olarak sistemde yeralacaktır. Bu kesikli zaman aralığında model (1) ile aynı ve tam eşit olan verileri ortaya koyan kesikli zaman modelinin model (1) e eşit olmasından dolayı model (1) in tahmin metodu bu safhada kesikl' zaman modelini ele almaktır. Buna rağmen model (1) için kesikli zaman modeli ele alınırsa A ve B elemanlarındakı a priori kısıtlamaları hesaba katmak zordur. Ekonometrinin kapsamında bu kısıtlamalar çok önemlidir.

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu çalışma U(t) nin normal dağılım göstermesi halleriyle ilgilidir. Fakat normal dağılım göstermeyen ve daha genel haller içinde uygulanması pek zor değildir. U(t) geleneksel olarak denklemi tanımlamak için kullanılır.

$$U(t) = \frac{d}{dt} [\lambda (t)]$$

Burada λ (t) ortogonal ilâveli stokastik süreç içinde genişletilir, şöyleki;

$$E [\{ \lambda (tz) - \lambda (t_0) \} \{ \lambda (t_1) - \lambda (t_0) \}] = O$$

$$\text{eğer; } (t_1 - t_0) (t^2 - t_0) \leq O$$

$$\Omega \min (| t_2 - t_0 |, t\, t_1 - t_0 |) \text{ eğer; } (t_1 - t_0) (t_2 - t_0) > O \quad (2)$$

Bu stokastik diferansiyel denklem sistemlerinin ele alınışı basit hallerde iyi bilinir. (n=1 veya n=, B=0).

(1) Nolu denklemin Izah tarzı şöyledir, o ve t aralığında tanımlamak için y(t) nin aşağıdaki gibi integre edilebilir stokastik bir fonksiyon olması gerekir;

$$\gamma(t) - \gamma(0) - A \int_0^t \gamma (s)\, ds = B \int_0^t Z (s)\, ds + \lambda (t)^1 - \lambda (0)$$

Bütün t değerleri için, (3)

$$e^{tA} = I + \sum_{r-1}^{\infty} \frac{(tA)^r}{r!}$$ olarak tayin edilir.

Böylece şu sonucu göstermemiz mümkün olacaktır;

Eğer $o \leq t \leq t^x$ için $y(t)$ integre edilebilir stokastik kuvadratik bir fonksiyon olarak tahmin edicidir. $Z(t)$ integre edilebilir ve stokastik veya kararlı fakat stokastik olmayan süreç tarafından türetilmişlerdir ve kuvadratik anlamda integre edilebilir formdadır, böylece;

$$\gamma(t) = e^{tA}\gamma(o) \int_0^t e^{(t-s)A} Bz(s)\, ds + \int_0^t e^{(t-s)A}\, d\lambda(s) + \mu(t) \tag{5}$$

Burada, $\mu(t)$ kuvadratik ortalaması o dır.

Aşağıda gösterilen formülle ilgili olarak integrallerin doğrudan doğruya monipulasyonu yapıldığında $\mu(t) = 0$ olduğununda ispatlanması gerekebilir ancak şimdiki buna lüzum yoktur.