

ARAŞTIRMA MAKALESİ

Kirchhoff Yaklaşımı İntegralinin Radon Dönüşümü Yorumu ile Zaman Uzayında Belirlenmesi Üzerine

On the Evaluation of the Kirchhoff Approximation Integral using Radon Transform Interpretation in Time Domain

Aslıhan Aktepe^{1*}, Ahmet Arif Ergin², Hüseyin Arda Ülkü¹

¹ Gebze Teknik Üniversitesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, Türkiye

² Yeditepe Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

Geliş / Received: 11.09.2022

Kabul / Accepted: 07.10.2022

*Corresponding Author: Aslıhan Aktepe, aaktepe@gtu.edu.tr

ÖZ: Bu çalışmada, düzlemsel dalga ile aydınlatılmış, yumuşak ve sert saçıcılardan oluşan uzak alandaki akustik saçılmanın, Kirchhoff yaklaşımı (KY) ile zaman uzayında analizinde ortaya çıkan ışınma integralinin kapalı-formda belirlenmesi gösterilmiştir. Özel olarak KY ile ortaya çıkan ışınma integralinin, elektromanyetikteki eşdeğeri olan fiziksel optik (FO) yaklaşımı kullanıldığında oluşan ışınma integrali aynı olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak FO yaklaşımı için Radon dönüşümü yorumu ile geliştirilen kapalı-form ifade doğrudan KY için kullanılabilir. Kapalı-form ifadelerinin doğruluğu bir nümerik örnekle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Akustik saçılma, Kirchhoff yaklaşımı, zaman uzayı analizi

ABSTRACT: In this work, closed-form evaluation of the radiation integral to determine the time domain acoustic scattered fields at the far zone for soft and hard scatterers using Kirchhoff approximation (KA) under plane-wave illumination is presented. Specifically, it is shown that the radiation integral for KA is the same as the physical optics (PO) integral, which is the equivalent of KA in electromagnetics, for perfect electrically conducting scatterers. Consequently, the closed-form expression of the PO integral developed using Radon transform interpretation can be used in KA directly. The validity of the closed-form expression is demonstrated via a numerical example.

Keywords: Acoustic scattering, Kirchhoff approximation, time domain analysis

1. GİRİŞ

Kirchhoff yaklaşımı (KY) akustik saçılmanın analizi için kullanılan yüksek frekans tekniklerinden biridir [1]. Kısaca KY'de Kirchhoff integral denklemindeki [1]-[3] bilinmeyen hız potansiyelinin saçıcı yüzeyinin aydınlık kesiminde gelen hız potansiyelinin iki katı olduğu; gölge veya karanlık bölgede ise 0 olduğu varsayılır [1]. Özel olarak saçıcı yüzeyinin aydınlık kesiminde sert saçıcılar için hız potansiyelinin gelen hız potansiyelinin 2 katı, yumuşak saçıcılar için ise hız potansiyelinin normal yöndeki değişiminin gelen hız potansiyelinin normal yönündeki değişiminin 2

katı olduğu varsayılır. Bu varsayımlar ile saçılan akustik alanları belirlemek için, varsayılan hız potansiyeli kullanılarak saçıcı yüzeyinden olan, bu çalışmada KY integrali olarak adlandırılan ışınma integrali hesaplanır [2].

Saçılan akustik alanları nümerik olarak belirlemek için ilk olarak saçıcı yüzeyi üçgen veya dörtgen gibi yüzey parçaları ile ayrıklaştırılır. Daha sonra, KY ile varsayılan hız potansiyelleri kaynak olarak kullanılarak yüzey parçaları üzerinden KY integrali hesaplanır. KY integrali, hızlı salınan çekirdeğe sahip olduğundan, saçıcı yüzeyi üzerinden bu integrali nümerik olarak belirlemek integral bölgesinde çok fazla örnek almayı

gerektirmektedir. Bu sebeple, KY integrali için kapalı-formda veya yaklaşık ifadeler bulmak KY'nin hızlı ve doğru sonuç vermesi için önemlidir [1]-[6], [10].

KY'nin elektromanyetikteki eşdeğeri fiziksel optik (FO) yaklaşımıdır [1]. Benzer olarak FO yaklaşımında da FO integralinin belirlenmesi gerekmektedir ve bu integralin analitik veya yaklaşık olarak belirlenmesi üzerine birçok çalışma yapılmıştır [4]-[15]. Genel olarak ışınma integrallerinin Radon dönüşümü olarak yorumlanması, ışınma integrallerinin zaman uzayında yüksek doğruluk ve hızlı bir şekilde belirlenmesine olanak sağlar [6]-**Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** Radon dönüşümü yorumuyla; saçıcı yüzeyi üzerinden olan FO integrali, kaynağı oluşturan gelen alanın yayılma yönünün ve gözlem noktası/yönünün oluşturduğu yüzey ile integral bölgesinin kesişimi sonucu oluşan eğri üzerinden integrale indirgenebilmektedir. Oluşan eğrinin yapısına göre eğri üzerinden olan integral; analitik olarak, kapalı-formda, nümerik integrasyon ile tam olarak veya yaklaşık olarak belirlenebilir. Bu durum saçılma problemine ve saçıcıyı modelleyen yüzey parçalarına bağlıdır. Bu yaklaşımın ilk örneği olarak düzlemsel dalga ile aydınlatılan ve saçılan alanların uzak alanda gözlemlendiği durum için düzlem-lineer üçgen kesişimi sonucu FO integralinin kapalı-formda belirlenmesi gösterilebilir [6]. Bunları daha sonra FO integralinin düzlem-NURBS (Non-uniform rational B-spline) [7] ve düzlem-yüksek dereceli üçgen [9]-**Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** kesişimleri kullanarak nümerik olarak belirlenmesi, zaman uzayı integral denklemlerin zamanda adımlama yöntemi çözümlerinde kullanılan lineer üçgenler üzerinde tanımlı Rao-Wilton-Glisson ve lineer tetrahedronlar üzerinde tanımlı Schaubert-Wilton-Glisson fonksiyonlarından oluşacak elektrik ve manyetik alanların kapalı-form ifadelerinin belirlenmesinde, sırasıyla, küre-lineer üçgen [16]-[18] ve küre-lineer tetrahedron [19], [20] kesişimlerinden faydalanılması izlemiştir.

Bu çalışmada, düzlemsel dalga ile aydınlatılmış ve lineer üçgenler ile ayrıştırılmış sert ve yumuşak saçıcılardan olan uzak alandaki akustik saçılmanın KY ile belirlenmesi için gerekli olan KY integralinin, mükemmel elektriksel iletken saçıcılardan oluşan elektromanyetik saçılmanın belirlenmesi için

gerekli olan FO integrali ile aynı olduğu ve [6]'da geliştirilen, lineer üçgenler üzerinden FO integralinin kapalı-form ifadelerinin kullanılabilmesi gösterilmiştir. Ek olarak [6]'da elektromanyetik saçılma için FO yaklaşımı frekans uzayında formüle edilmektedir, bu çalışmada ise doğrudan zaman uzayı ifadeleri kullanılmıştır.

Çalışmanın içeriğinde, Bölüm 2.1 ve 2.2'de, sırasıyla, sert ve yumuşak akustik saçıcılar için KY formülasyonu sunulmuş ve KY integrali belirlenmiştir. Bölüm 2.3'te ise KY integralini [6]'da verilen ifadeler ile belirlenmesi tartışılmıştır. Bölüm 3'te sunulan yöntemin geçerliliği ve doğruluğunu gösteren nümerik örnek, son olarak Bölüm 4'te çıkarımlar ve gelecekte yapılacaklar sunulmuştur.

2. KIRCHHOFF YAKLAŞIMI

Dalganın yayılma hızının c olduğu sonsuz geniş ortamda bulunan ve yüzeyi S ile gösterilen saçıcı, zaman bağımlılığı Dirac delta fonksiyonu $\delta(\cdot)$ ve ilerleme yönü $\hat{\mathbf{k}}_g$ olan düzlemsel dalga için gelen hız potansiyeli

$$\varphi_g(\mathbf{r}, t) = \delta(t - \hat{\mathbf{k}}_g \cdot \mathbf{r} / c) \quad (1)$$

ile aydınlatılsın. S_a ve S_g , aydınlatılmış saçıcı yüzeyinin, sırasıyla, aydınlık ve karanlık/gölge kısımlarını gösterebilir, $S = S_a \cup S_g$. Saçıcının aydınlık kısmı S_a , S_n n üçgeni göstermek üzere, lineer üçgenler ile ayrıştırılsın: $S_a = \bigcup_{n=1}^N S_n$. Uzak alandaki saçılan alanlar ise $\hat{\mathbf{k}}_s$ yönünde, $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{k}}_s$ gözlem noktasında gözlemlensin.

Bu noktada saçılan alanları saçıcının sert veya yumuşak saçıcı olması, diğer bir deyişle sınır koşulları belirleyecektir.

2.1 Yumuşak Saçıcı

Yumuşak saçıcılar için toplam hız potansiyeli $\varphi_t(\mathbf{r}, t)$ 'nin saçıcı yüzeyi S üzerinde sağladığı sınır koşulu $\varphi_t(\mathbf{r}, t) = 0$, $\mathbf{r} \in S$, olarak verilir [1]. KY ile saçıcı yüzeyi üzerindeki toplam hız potansiyelinin yüzey normali yönündeki değişiminin

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi_g(\mathbf{r}, t); & \mathbf{r} \in S_a \\ 0; & \mathbf{r} \in S_g \end{cases} \quad (2)$$

olduğu varsayılır. Bu ifade uzak alan yaklaşıklığı altındaki Kirchhoff integral denkleminde [2] (1) ile verilen gelen alan ifadesiyle birlikte yerine

koyulursa, aydınlık yüzeyi lineer üçgenler ile ayrıklaştırılmış yumuşak saçıcı için saçılan hız potansiyel alanı

$$\varphi_{s,y}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial_t \delta(t-r/c)}{2\pi rc} * \varphi_{s,y}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_g, t) \quad (3)$$

ile belirlenebilir. Burada “*” zamana göre konvolüsyon ve ∂_t zamana göre türev işlemlerini belirtmektedir, $\varphi_{s,y}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_g, t)$ yumuşak saçıcı için menzili düzeltilmiş saçılan hız potansiyeli

$$\varphi_{s,y}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_g, t) = \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}}_g h_n(t) \quad (4)$$

olarak tanımlanır. (4)'te $h_n(t)$ KY integralini belirtmektedir ve n . üçgen üzerinden, $\mathbf{k}_r = (\hat{\mathbf{k}}_g - \hat{\mathbf{k}}_s) / 2$ olmak üzere

$$h_n(t) = \int_{S_n} \delta\left(t - \frac{2}{c} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'\right) d\mathbf{r}' \quad (5)$$

olarak tanımlanır. KY integrali hakkında detaylı bilgi ve nasıl belirleneceği Bölüm 2.3'te verilmiştir.

2.2 Sert Saçıcı

Sert saçıcılar için toplam hız potansiyeli $\varphi_t(\mathbf{r}, t)$ 'nin saçıcı yüzeyi S üzerinde sağladığı sınır koşulu $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, t) = 0$, $\mathbf{r} \in S$, olarak verilir [1]. KY ile saçıcı yüzeyi üzerindeki toplam hız potansiyelinin

$$\varphi_t(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 2\varphi_g(\mathbf{r}, t); & \mathbf{r} \in S_a \\ 0; & \mathbf{r} \in S_g \end{cases} \quad (6)$$

olduğu varsayılır. Bölüm 2.1'e benzer olarak (6) uzak alan yaklaşıklığı altındaki Kirchhoff integral denkleminde yerine koyulursa, aydınlık yüzeyi lineer üçgenler ile ayrıklaştırılmış sert saçıcı için saçılan hız potansiyel alanı

$$\varphi_{s,s}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial_t \delta(t-r/c)}{2\pi rc} * \varphi_{s,s}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_s, t) \quad (7)$$

ile belirlenebilir. Burada $\varphi_{s,s}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_s, t)$ sert saçıcı için menzili düzeltilmiş saçılan hız potansiyeli

$$\varphi_{s,s}^{\text{md}}(\hat{\mathbf{k}}_s, t) = \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}}_s h_n(t) \quad (8)$$

olarak tanımlanır. (8)'de KY integrali $h_n(t)$ (5) ile tanımlandığı gibidir ve hakkında detaylı bilgi Bölüm 2.3'te verilmiştir. (8) ile verilen ifadenin yumuşak saçıcı için verilen (4) denkleminde farkı $\hat{\mathbf{k}}_g$ 'nin yerini $\hat{\mathbf{k}}_s$ 'nin almasıdır.

2.3 KY İntegrali

(5) ile verilen KY integralinin [6]'da (8) ile verilen FO integrali ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Bu durumda lineer üçgenler için [6]'da (11) ve (12) ile verilen, sırasıyla, zaman ve frekans uzaylarındaki kapalı-form ifadeler doğrudan kullanılabilir. [6]'da verilen ifadeler belirlenirken, (5)'teki ifadenin düzlemsel Radon dönüşümü olduğu gerçeğinden yararlanılarak integralin, normal \mathbf{k}_r olan ve zamanla \mathbf{k}_r yönünde ilerleyen düzlem (\mathbf{k}_r -düzlemi) ile integral bölgesi S_n 'nin kesişimi olarak ifade edilebileceği ve bu ifadenin integral bölgesi lineer üçgen olduğu durumda kapalı-formda ifadesinin belirlenebileceği gösterilmiştir. Burada integral bölgesi ile düzlem kesişimi olduğu için (5)'te oluşan ifade düzlemsel Radon dönüşümü olarak adlandırılabilir. [9]'da ise bu ifadelerin Radon dönüşümü yorumu olmadan belirlenmesi gösterilmiştir. Ancak Radon dönüşümü yorumu S_n 'nin lineer üçgen olmadığı durumdaki gibi, matematiksel olarak zor veya imkansız olduğu durumlar için ışına integrallerinin kapalı-formda veya tam olarak belirlenmesine olanak sağlamıştır. Örneğin, farklı kaynaklar (düzlemsel dalga veya noktasal kaynak) ve gözlem durumları (yakın/uzak alan) için küresel, paraboloidal, elipsoidal Radon dönüşümleri ortaya çıkabilmekte, S_n 'nin yüksek dereceli üçgenler olduğu durumlarda da ışına integrallerinin tam veya yaklaşık olarak belirlenmesi mümkün olmaktadır [7]-[10].

3. NÜMERİK ÖRNEK

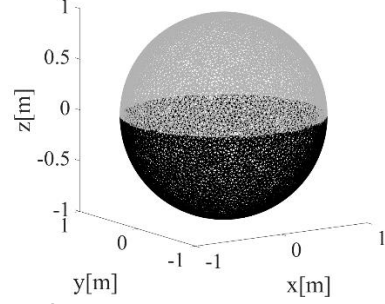
Bu bölümde Şekil 1'de gösterildiği gibi yarıçapı 1 m, merkezi orijinde olan sert ve yumuşak küreden akustik saçılma KY ile zaman uzayında incelenmiştir. Sonuçlar elde edilirken gelen düzlemsel dalganın yayılma yönü $\hat{\mathbf{k}}_g = -\hat{\mathbf{z}}$ seçilmiştir. Bu seçim sonucunda kürenin üst yarısı aydınlanmaktadır (Şekil 1'de gri yüzey). Saçılan alanın uzak alandaki gözlem yönü küresel koordinatlarda $(\theta_s, \phi_s) = (45, 30)$ açılara denk gelen $\hat{\mathbf{k}}_s = 0.6124\hat{\mathbf{x}} + 0.3536\hat{\mathbf{y}} + 0.7071\hat{\mathbf{z}}$ seçilmiştir. Örnek üretilirken sesin yayılma hızı 343 m/s alınmıştır ve zaman adımı büyüklüğü $\Delta t = 1.2499$ μs seçilmiştir. Saçıcının aydınlık yüzeyi 6934 lineer üçgen ile modellenmiştir. Bu noktada vurgulanmalıdır ki elde edilen sonuçların geçerli olacağı frekans bandının üst sınırı, ışına integrali kapalı-formda belirlendiği için, saçıcının ne kadar iyi modellendiği, diğer bir deyişle üçgenlerin

büyüklüğü, ve zaman adımı büyüklüğü ile belirlenir.

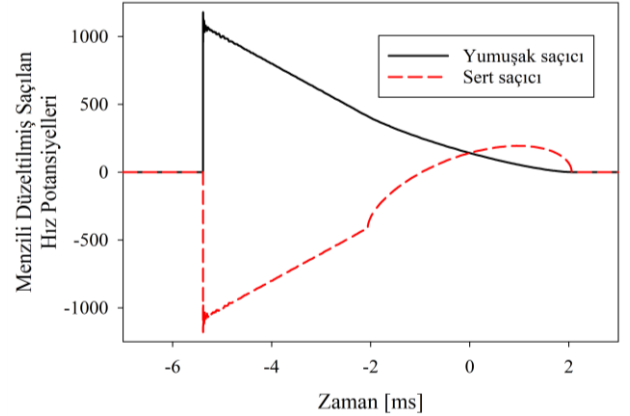
Şekil 2’de, sert ve yumuşak saçıcılar için elde edilen menzili düzeltilmiş saçılan hız potansiyelleri gösterilmiştir. Şekil 2’de görüldüğü üzere k_r -düzlemi saçıcı küre ile $t = -5.386$ ms’de kesişmeye başlamıştır ve $t = 2.062$ ms’de kesişim sona ermiştir. Özellikle kesişimin başladığı $t = -5.3$ ms civarındaki sonuçlarda olan ufak bozulma lineer üçgenlerin saçıcıyı yüksek dereceden üçgenler gibi modelleyememesinden kaynaklanmaktadır [10], ancak bu bozulmaların etkisi çok daha yüksek frekanslarda görülmektedir. Şekil 3’te ise zaman uzayında elde edilen saçılan hız potansiyellerinin Fourier dönüşümü alınarak belirlenen saçılma kesit alanı (veya sonar kesit alanı) (SKA) [1] değerleri gösterilmiş ve doğrudan frekans uzayında nümerik integrasyon ile elde edilen SKA değerleri ile 10 Hz-4 kHz bandında karşılaştırılmıştır. Frekans uzayındaki sonuçlar elde edilirken nümerik integrasyon için 7 noktalı Gauss-Legendre integrasyon kuralı (GLİK) kullanılmıştır. Şekil 3’ten görüleceği üzere hem sert hem de yumuşak saçıcı küre için elde edilen sonuçlar üst üstedir.

Şekil 4(a) ve 4(b)’de, sırasıyla, sert ve yumuşak saçıcılar için Şekil 3’te zaman uzayında elde edilen sonuçlarla hesaplanan SKA değerleri ile frekans uzayında 4, 7 ve 19 noktalı GLİK kullanılarak elde edilen SKA değerleri arasındaki rölatif hata hesaplanarak gösterilmiştir. Rölatif hatalar [10]’daki (34) kullanılarak her bir frekans örneği için elde edilmiştir. Şekil 4’te görüldüğü gibi düşük frekanslarda hata oranları benzer olmasına rağmen, yüksek frekanslarda integrasyon kuralının nokta sayısı arttıkça, rölatif hata azalmaktadır ve frekans uzayı sonuçları zaman uzayında elde edilen sonuçlara yakınsamaktadır. Yine de nokta sayısının artmasına rağmen hata seviyesinin belli bir seviyede olduğu görülmektedir. Bu seviye zaman adımı büyüklüğünden kaynaklanmaktadır. Şekil 5’te tüm frekans örnekleri kullanılarak elde edilen rölatif hatanın zaman adımı büyüklüğü ile değişimi gösterilmiştir. Şekil 5’ten görüldüğü gibi integrasyon kuralının nokta sayısı arttıkça, diğer bir deyişle doğruluğu arttıkça ve zaman adımı küçüldükçe rölatif hata azalmaktadır. Frekans uzayında GLİK kullanılarak elde edilen SKA değerleri, zaman uzayında kapalı-form ifade kullanılarak elde edilen SKA değerlerine yakınsamaktadır. Zaman uzayında elde edilen

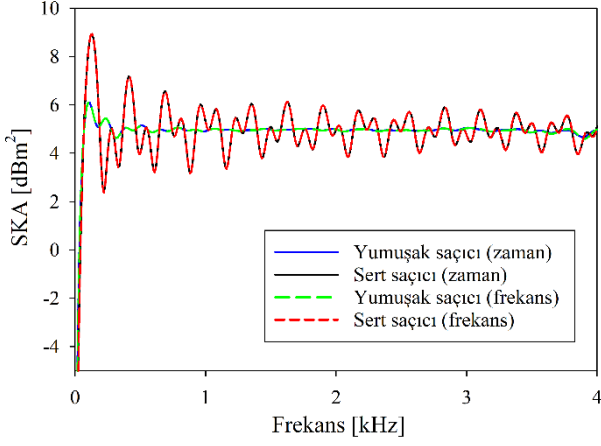
sonuçlar kullanılarak hesaplanan SKA değerlerinde, KY integrali kapalı-formda belirlendiği için, hataya sadece zaman adımı büyüklüğü etki etmektedir. Frekans uzayında KY integrali belirlenirken, nokta sayısı arttıkça sonuçtaki hata azalmaktadır.



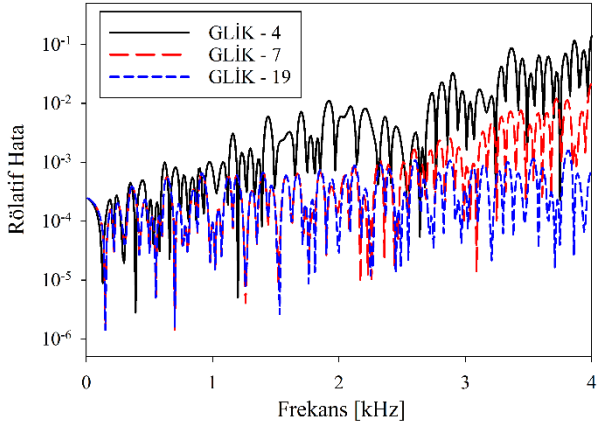
Şekil 1: $\hat{k}_g = -\hat{z}$ yönünde aydınlatılmış küre geometrisi: Gri yüzey aydınlık bölgeyi, siyah yüzey gölge bölgeyi göstermektedir.



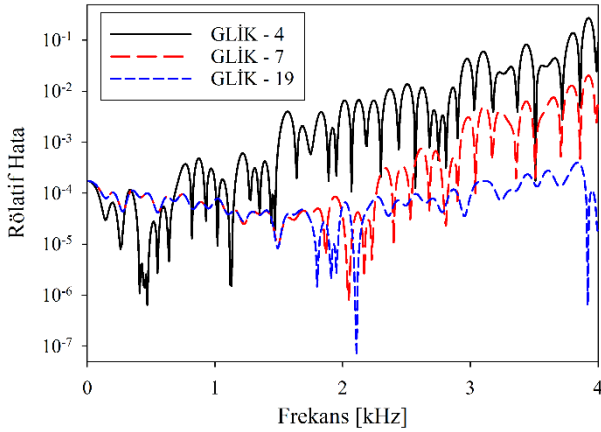
Şekil 2: Sert ve yumuşak küre için menzili düzeltilmiş saçılan hız potansiyelleri.



Şekil 3: Sert ve yumuşak küre için SKA sonuçlarının karşılaştırması.

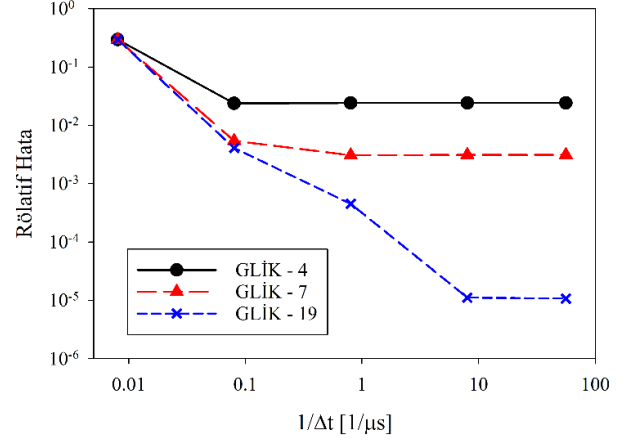


(a)

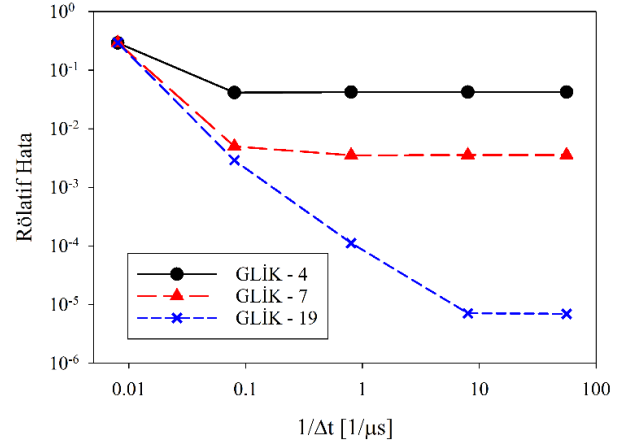


(b)

Şekil 4: Frekans uzayında GLİK kullanılarak elde edilen SKA sonuçları ile zaman uzayında kapalı-form ifadeler kullanılarak elde edilen SKA sonuçları arasındaki rölatif hata: (a) Sert ve (b) yumuşak küre.



(a)



(b)

Şekil 5: Farklı zaman adımı büyüklüklerine göre rölatif hatanın değişimi: (a) Sert ve (b) yumuşak küre.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, yüksek frekans akustik saçılma problemlerinde kullanılan KY sonucu ortaya çıkan ve KY integrali olarak adlandırılan ışın integralinin, elektromanyetikteki FO integrali ile aynı olduğu ve böylece FO integrali için geliştirilen kapalı-form ifadelerin kullanılabileceği gösterilmiştir. KY integrali belirlenirken herhangi bir yaklaşıklık veya hata yapılmadığından elde edilecek sonuçların geçerliliği zaman adımı büyüklüğü ve saçıcının ne kadar iyi modellendiği belirlemektedir. Bu çalışma temel alınarak benzer yaklaşımlar yüksek dereceden üçgenler veya NURBS yüzeyler için geliştirilebilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, John Wiley and Sons, 1969.
- [2] T. B. Hansen and A. D. Yaghjian, *Plane-Wave Theory of Time-Domain Fields: Near-Field Scanning Applications*, Wiley-IEEE Press, 1999.
- [3] D. S. Jones, *Acoustic and Electromagnetic Waves*, Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [4] W. B. Gordon, "Far-field approximations to the Kirchoff-Helmholtz representations of scattered fields," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 23, no. 4, pp. 590-592, July 1975.
- [5] W. B. Gordon, "High frequency approximations to the physical optics scattering integral," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 42, no. 3, pp. 427-432, Mar. 1994.
- [6] D. Bölükbaş and A. A. Ergin, "A Radon transform interpretation of the physical optics integral," *Microw Opt Technol Lett*, vol. 44, no. 3, pp. 284-288, 2005.
- [7] H. A. Serim and A. A. Ergin, "Computation of the physical optics integral on NURBS surfaces using a Radon transform interpretation," *IEEE Antenn Wirel Propag Lett*, vol. 7, pp. 70-73, 2008.
- [8] S. Karaca and A. A. Ergin, "Closed-form time domain PO expressions of the electric field scattered from PEC objects illuminated by an electric dipole," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 63, no. 10, pp. 4477-4485, Oct. 2015.
- [9] A. Aktepe and H. A. Ülkü, "On the closed-form evaluation of the PO integral using the Radon transform interpretation for linear triangles," *Turk J Electr Eng Comput Sci*, vol. 29, no. 5, Article 17, 2021.
- [10] A. Aktepe and H. A. Ülkü, "Exact evaluation of time-domain physical optics integral on quadratic triangular surfaces," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 68, no. 11, pp. 7447-7456, Nov. 2020.
- [11] A. Aktepe and H. A. Ülkü, "Exact evaluation of time domain physical optics integral for high order triangles," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 71 (Early Access).
- [12] F. Vico-Bondia, M. Ferrando-Bataller, and A. Valero-Nogueira, "A new fast physical optics for smooth surfaces by means of a numerical theory of diffraction," *IEEE T Antenn Propag*, 58 (3), 773-789, 2010.
- [13] Y. M. Wu, L. J. Jiang, W. E. I. Sha, and W. C. Chew, "The numerical steepest descent path method for calculating physical optics integrals on smooth conducting quadratic surfaces," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 61, no. 8, pp. 4183-4193, Aug. 2013.
- [14] H. Kobayashi, K. Hongo, and I. Tanaka, "Expressions of physical optics integral for smooth conducting scatterers approximated by quadratic surfaces," *Electron and Commun in Japan (Part I: Commun)*, vol. 83, no. 7, pp. 61-70, 2000.
- [15] M. Domingo, F. Rivas, J. Perez, R. P. Torres, and M. F. Catedra, "Computation of the RCS of complex bodies modeled using NURBS surfaces," *IEEE Antenn Propag M*, vol. 37, no. 6, pp. 36-47, Dec. 1995.
- [16] A. C. Yucel and A. A. Ergin, "Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases," in *IEEE T Antenn Propag*, vol. 54, no. 5, pp. 1496-1502, May 2006.
- [17] H. A. Ülkü and A. A. Ergin, "Analytical evaluation of transient magnetic fields due to RWG current bases," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 55, no. 12, pp. 3565-3575, Dec. 2007.
- [18] H. A. Ülkü and A. A. Ergin, "Application of analytical retarded-time potential expressions to the solution of time domain integral equations," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 59, no. 11, pp. 4123-4131, Nov. 2011.
- [19] H. A. Ülkü, A. A. Ergin, and F. Dikmen, "On the evaluation of retarded-time potentials for SWG bases," *IEEE Antenn Wirel Propag Lett*, vol. 10, pp. 187-190, 2011.
- [20] F. Dikmen, "On analytical evaluation of retarded-time potentials for SWG bases," *IEEE T Antenn Propag*, vol. 62, no. 9, pp. 4860-4863, Sept. 2014.