

**Atıf İçin:** Nişancı Türkmen, B. ve Kukuş, G. (2023). Rubik Küpün Çözümlemesinde Hiper Grup Teori Uygulamaları. *İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(3), 2068-2092.

**To Cite:** Nişancı Türkmen, B. & Kukuş, G. (2023). Applications of Hypergroup Theory in Solving the Rubik's Cube. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 13(3), 2068-2092.

## Rubik Küpün Çözümlemesinde Hiper Grup Teori Uygulamaları

Burcu NİŞANCI TÜRKMEN\*, Gamze KUKUŞ

### **Öne Çıkanlar:**

- Rubik Küp Grubu
- Rubik Küp Hiper Grubu
- Rubik Küp Grubunun Temel Teoremleri

### **Anahtar Kelimeler:**

- Grup Teorisi
- Rubik Küp
- Hiper Grup Teorisi

### **ÖZET:**

Rubik küpünün çözümünün hiper gruplar yardımıyla literatürde var olan grup cebirsel yapısından farklı bir cebirsel yapıyla tasarımı sağlanmıştır. Rubik küp çözümünün stratejisinin gelişim kaydedeceği yöntem olarak genelleştirilmiş permütasyon hiper grup kavramı benimsenmiş olup; grup teoride uygulanan yöntemlerin geliştirilmesi ile gerçekleştirilmiştir. Soyut cebir çalışmalarının uygulama bulması konusunda tüm dünyada yetersizlikler mevcut olmasına rağmen bu çalışma ile Rubik küpün hiper gruplar yardımıyla çözümlene esası elde edilmiş; böylece ulusal ve uluslararası akademik araştırmalara, ülkemizdeki soyut cebir alanında yürütülen çalışmaların uygulaması olması hususunda katkı sunulmuştur. Dolayısıyla Rubik küp yardımıyla literatürde var olan cebir çalışmalarının uygulamaya dönüştürülebilir olduğu kanıtlanmıştır.

## Applications of Hypergroup Theory in Solving the Rubik's Cube

### **Highlights:**

- Rubik's Cube Group
- Rubik's Cube Hypergroup
- Fundamental Theorems of Rubik's Cube Group

### **Keywords:**

- Group Theory
- Rubik's Cube
- Hypergroup Theory

### **ABSTRACT:**

The solution of the Rubik's cube was designed with an algebraic structure different from the group algebraic structure existing in the literature with the help of hypergroups. The generalized permutation hypergroup concept has been adopted as the method by which the strategy of the Rubik's cube solution will develop; carried out with the development of methods applied in group theory. Although there are inadequacies in the application of abstract algebra studies all over the world, with this study, the basis of the analysis of the Rubik's cube with the help of hypergroups was obtained; Thus, it has been contributed to national and international academic research to be the application of the studies carried out in the field of abstract algebra in our country. Therefore, with the help of the Rubik's cube, it has been proven that the algebra studies in the literature can be translated into practice.

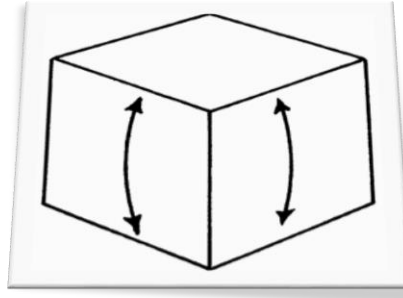
<sup>1</sup>Burcu NİŞANCI TÜRKMEN ([Orcid ID: 0000-0001-7900-0529](https://orcid.org/0000-0001-7900-0529)), Gamze KUKUŞ ([Orcid ID: 0000-0002-6890-2081](https://orcid.org/0000-0002-6890-2081)), Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya, Türkiye

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Burcu NİŞANCI TÜRKMEN, e-mail: burcu.turkmen@amasya.edu.tr

## GİRİŞ

1974'te Erno Rubik, Rubik küpü olarak bilinen popüler üç boyutlu kombinasyon bulmacasını icat etmiş ve küp ilk olarak Mayıs 1980'de halka açılarak hızla popülerlik kazanmıştır. Lansmanından bu yana 350 milyon küp satılarak en çok satan bulmacalardan biri haline gelmiştir (Demaine vd., 2011). 1981'de David Singmaster, Rubik küpünün ilk analizini yaparak Rubik küpü çözmek için bir algoritma geliştirmiş ve Rubik küpün farklı dönüşleri için 'Singmaster Notasyonunu' tanıtmıştır (Singmaster, 1981). Bugün, küpü çözmek için çok sayıda yöntem olmasına karşın Rubik küpü hızlı çözme stratejileri üzerine çok sayıda turnuva Dünya Küp Derneği aracılığı ile yapılmıştır (Demaine vd, 2011). Rubik küpü çözmek için mevcut dünya rekoru 5.55 saniyedir (Reynolds, 2014). Küpü herhangi bir konumdan çözülmüş durumuna getirmek için gereken maksimum minimum hareket sayısını bulma problem de ilgi görmüştür. Bu sayı, 2010'da 20 olarak belirlenmiştir (Rokicki, 2010). Bununla birlikte, küpün maksimum minimum hareket sayısı, küpü çözmek için hangi kıvrımların ve dönüşlerin gerekli olduğunu söylememekle birlikte maksimum hamle sayısını belirtmektedir. Araştırmacılar için buradaki zorluk ise, gerekli olan 20 hamleyi (veya daha azını) bulmaktır (Rokicki, 2010).

Rubik küp, bilgisayar bilimi, mühendislik ve matematik gibi birçok alanda çalışmalara yön vermiştir. Matematikte Rubik küp Grup Teorisi ile tanımlanmıştır (Daniels, 2014). Küpün farklı dönüşümleri ve konfigürasyonları, bulmacanın farklı yatay ve dikey dönüşleri tarafından oluşturulan bir permütasyon grubunun bir alt grubunu oluşturmaktadır (Demaine vd, 2011). Küpün çözümü Grup Teorisi ile de tanımlanmıştır (Joyner, 2009). Grup Teorisi, küpün nasıl işlediğinin incelenmesine izin vermektedir. Kıvrımların ve dönüşlerin, Rubik küpü çözülmüş duruma nasıl döndürdüğü araştırılmıştır. Permütasyon grubunun inşasının yanı sıra Rubik küple ilgili özellikler ve teoremler verilmiştir (Daniels, 2014). Rubik Küp Grubunu oluşturmak için gereken farklı grup türleri ve Birinci Grup izomorfizma Teoremi tanımlanmıştır ve Singmaster Notasyonu ile Rubik küp Grubu açıkça oluşturulmuştur.



Şekil 1. Rubik küp

Rubik küp, "küpler" olarak adlandırılan 27 küçük küpten oluşur. Küp döndürülerek başka bir harekete sebebiyet verilebilecek şekilde tasarlanmıştır. Her biri dokuz yönden oluşan altı yüzden oluşur. Her birinde yüz ve merkez yüz sabittir ve hareket ettirilemez. Toplamda  $6 \times 9 = 54$  yön vardır. Her yüzey aynı zamanda renklidir ve küpü çözmek için her yüzün bir düz renk olması gerekir. Yani kenarın dokuz yüzünün aynı renkte olması gerekir. Bu küplerden 26 tanesi görünürdür (küpe parçalara ayırdığımızda, 27. küpün gerçekte var olmadığını kontrolü yapılabilir). Köşelerdeki küplere "köşe küpleri" denir." Her köşe küpünün 3 görünür yüzü vardır ve 8 köşe küpü vardır. İki görünür yüze sahip küplere "kenar küpleri" denir; 12 kenar küpü vardır. Tek bir yüzü görünen küplere ise "merkez küpleri" denir; 6 merkez küpü vardır. Rubik küpü birbirine göre hareket etmeyen altı orta parça, her biri üzerine iki çıkartma bulunan on iki kenar ve her biri üzerinde üç çıkartma bulunan sekiz köşeden oluşmaktadır. Bulmacanın amacı, tüm kenar köşelerini ve köşe küplerini doğru yönelimleriyle doğru konumlarına taşımaktır. Bir

küpün alt iki katmanını çözdükten sonra 2 küpleri üst katmanda, küpün üst yüzü doğru renkte olacak şekilde yönlendirdikten sonra 3 üst katmandaki küpleri doğru konumlarında olacak şekilde değiş tokuş yapılarak küpün tüm kenar küplerinin ve köşe küplerinin doğru yönelimleriyle doğru konuma gelmesi sağlanmış olacaktır.

İlk olarak Rubik küpteki bazı notasyonları verelim. Rubik küpün 6 yüzünü isimlendirmesi David Singmaster tarafından geliştirilen gösterimle yapılmıştır. Sağ (R), sol (L), yukarı (U), aşağı (D), ön (F) ve arka (B) olarak adlandırılmıştır (Singmaster, 1981). Bu adlandırma yardımıyla her yüz üzerine tek bir harfle atıf yapma olanağı ortaya çıkmıştır ve bu durum küp çözümünde uygulanan yöntem bakımından avantaj sağlamıştır. Bir köşe küpünü adlandırmak için, görünür yüzler saat yönünde sırayla listelenebilir. Rubik küpünün temel hareketleri aşağıdaki şekilde sıralanmaktadır:

**F:** ön yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

**B:** arka yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

**U:** üst yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

**D:** alt yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

**R:** arka yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

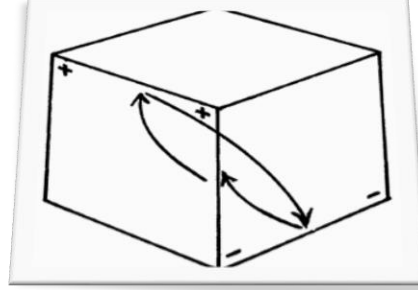
**L:** sol yüzü saat yönünde çeyrek tur döndürme

Ek hareketler ortadaki parçaları hareket ettirmektedir. Bu hareketler ise aşağıdaki şekilde sıralanmaktadır:

**Fs:** dikey bir dilimi önden bakıldığında saat yönünde çeyrek tur döndürme

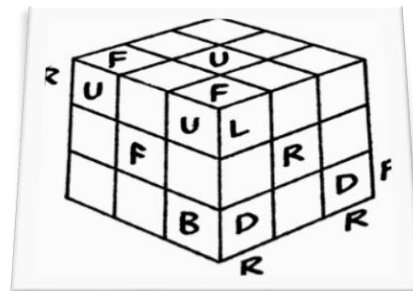
**Us:** yatay dilimi yukarıdan bakıldığında saat yönünde çeyrek tur döndürme

Benzer şekilde **Bs**, **Ds**, **Rs**, **Ls** hareketleri de tanımlanabilir.



Şekil 2. Rubik küpün hareketleri

Rubik küpünde hareketler şu önerme yardımıyla birleştirilir. X ve Y Rubik küpünde iki hamle ise, o zaman XY "X den sonra Y yap" anlamına gelmektedir. O halde XY, X ile Y nin bir tür çarpımı olarak tanımlanabilir.  $X^2 = XX$ , X'i iki kez tekrarla anlamında kullanılır. Örneğin  $U^2$ , üst yüzü saat yönünde yarım tur döndürmek anlamında kullanılır.  $X^3 = XXX$ , X' i üç kez tekrarla anlamına gelir. İki hareketin eşit olarak düşünülmesi küpte aynı etkiyi taşıması olarak algılanır.



Şekil 3. Rubik küpte hamleler

X, Rubik küpünde bir hareket olmak üzere  $X^{-1}$ , X hareketini geri almak anlamına gelir. Buna X in tersi adı verilir. Örneğin  $U^{-1}$  üst yüzü saat yönünün tersine çeyrek tur döndürmek anlamına gelir. Bir hamle sırasını geri almak için genel olarak hareketleri ters sırada geri almak gerekir.  $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$  ve  $(X^{-1})^{-1} = X$  eşitlikleri sağlanır.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  birer hamle olmak üzere;  $(X_1 X_2 \dots X_n)^{-1} = X_n^{-1} X_{n-1}^{-1} \dots X_1^{-1}$  eşitliği sağlanır. X ve Y Rubik küpü üzerinde iki hamle ise, genel olarak  $XY \neq YX$  dir. Bu durumda X ile Y ye değişmeli değildir denir. Örneğin F ve U hamleleri için  $FU \neq UF$  olduğu görülebilir. Bazı durumlarda hamleler çarpımsal olarak değişmeli olabilir.  $UD = DU$  eşitliğinin sağlandığı U ve D hamleleri örnek olarak verilebilir.

Grup Teorisi yardımıyla Rubik küpünde bir çözüm algoritması geliştirilmiştir (Joyner, 2009). Rubik küpte uygulama sahası bulan grup kavramının tanımı ise şu şekildedir: Üzerinde “\*” ikili işlemi tanımlı G nesnelere sınıfı yardımıyla oluşturulan  $(G, *)$  ikilisine bir cebirsel yapı denir. “\*” ikili işleminin G kümesi üzerinde birleşmeli olduğu, birim elemana sahip ve her elemanın tersinin mevcut olduğu  $(G, *)$  cebirsel yapısına “grup” adı verilir. O halde,  $(G, *)$  cebirsel yapısından alınan her a,b,c elemanı için,

1.  $(a * b) * c = a * (b * c)$

2.  $e * a = a * e = a$  olacak şekilde  $e \in G$  elemanı mevcut ve

3.  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  eşitliğini sağlayan  $a^{-1} \in G$  elemanı varsa bu  $(G, *)$  cebirsel yapısına grup denir.

$(G, *)$  bir grup ve  $x \in G$  olsun.  $x = y * x * y^{-1}$  olacak şekilde  $y \in G$  elemanı varsa y elemanına “x elemanının eşleniği” adı verilir.

G, Rubik küpün hamle kümesi olsun.  $X * Y$  “X hamlesi yap sonra Y hamlesi yap” anlamına gelir. Birim eleman hiçbir şey yapmayan harekettir. Çok sayıda grup türü bulunmaktadır. Örneğin  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  grubu toplamsal bir gruptur. Tamsayılarda toplama işlemine göre birleşme özelliği sağlanır. Tamsayılar kümesinin toplama işlemine göre birim elemanı 0 tamsayısı iken her n tamsayısı için -n, n elemanının toplama işlemine göre tersi olan elemandır. Sıfırdan farklı reel sayıların kümesi olan  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  üzerinde tanımlı çarpma işlemine göre bir gruptur. Birim elemanı 1 iken, her  $0 \neq x$  reel sayısının tersi  $1/x$  reel sayıdır.  $n > 1$  olan bir doğal sayı olsun. n moduna göre kalan sınıf kümesi olarak adlandırılan  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  kümesi, her  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$  için  $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b}$  ile tanımlı  $\oplus: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  ikili işlemine göre bir grup yapısına sahiptir. Verilen üç örnekteki tüm gruplar değişmelidir. Bir de simetrik gruplar gibi değişmeli olmayan gruplar da mevcuttur. Bir eşkenar üçgenin simetri grubu,  $S_3$  simetrik grubudur, dolayısıyla simetrilerinin sayısı 6 dır. Simetrik gruplar aşağıda tanımlanan simetriler yardımıyla oluşturulur.

**1:** hiçbir şey yapmayan birim eleman

**R<sub>1</sub>:** köşe 1’ i köşe 2’ ye, köşe 2’ yi köşe 3’ e, köşe 3’ ü köşe 1’ e gönderen döndürme

**R<sub>2</sub>:** ters yönde dönme

**F<sub>1</sub>:** 2. ve 3. köşeleri değiştiren yansıma

**F<sub>2</sub>:** 1. ve 3. köşeleri değiştiren yansıma

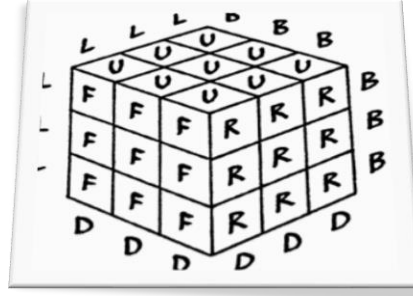
**F<sub>3</sub>:** 1. ve 2. köşelerini değiştiren yansıma

biçiminde alınırsa  $1^{-1} = 1, (R_1)^{-1} = R_2, (R_2)^{-1} = R_1, (F_1)^{-1} = F_1, (F_2)^{-1} = F_2, (F_3)^{-1} = F_3$  eşitlikleri doğrulanır. Bu simetriler yardımıyla  $R_1 R_1 = R_2, R_2 F_1 = F_3, F_1 F_3 = R_1, F_3 F_2 = R_1$  şeklindeki çarpım işlemlerini sürdürüp eşkenar üçgenin simetriler grubunun çarpım tablosuna ulaşılır. Çarpım tablosu yardımıyla,

1.  $R_1 F_1 = F_2$  iken  $F_1 R_1 = F_3$  ve  $R_1 F_1 \neq F_1 R_1$  olduğundan grubun değişmeli olmadığı görülür.

2.  $F_1 R_1 (F_1)^{-1} = R_2$  eşitliğinden  $R_1$  ve  $R_2$  simetrilerinin eşlenik olduğu açıktır.

3.  $R_2 F_1 (R_2)^{-1} = F_2$  ve  $R_2 F_2 (R_2)^{-1} = F_3$  eşitliklerinden  $F_1, F_2$  ve  $F_3$  simetrilerinin de eşlenik olduğu görülür.



Şekil 4. Rubik küpte simetri

Rubik küpün dönme simetrisi grubu da küpün 24 dönme simetrisi yardımıyla oluşturulabilir. Rubik küpün simetrisi grubunu oluşturan ve küpün dönüşünü koruyan simetrisi ise aşağıdaki şekilde listelenir:

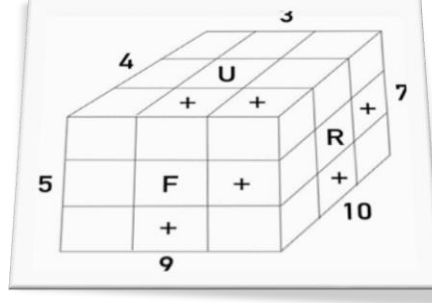
1. hiçbir şey yapmayan birim eleman
2. iki karşıt kenarın ortasından bir çizgi etrafında altı  $180^\circ$  dönüş
3. iki karşıt köşeden bir çizgi etrafında sekiz  $120^\circ$  dönüş
4. iki karşıt yüzün merkezleri boyunca bir çizgi etrafında altı  $90^\circ$  dönüş
5. iki karşıt yüzün merkezleri boyunca bir çizgi etrafında üç  $180^\circ$  dönüş

Bir küpün dönme simetrisi grubu değişmeli olmayan bir gruptur. Bu grupta aynı türden herhangi iki simetri birbiriyle eşleniktir. Sonuç olarak, cebir ve sayılar teorisinde Rubik küp çözümü, şimdiye kadar sürdürülen cebirsel çalışmalar ile grup teorisi yardımıyla yapılabilmektedir. Küp formunun farklı dönüşümleri ve yapılandırılmaları farklı yatay ve dikey dönüşler yardımıyla oluşturulan permütasyon grubunun bir alt grubu bulmacasına dönüşmektedir (Demaine ve ark.,2011). Böylece Rubik küp, grup teorisi özelliklerine sahip iyi bilinen bir bulmaca olarak akıllara kazınmaktadır (Joyner, 2009). Grup Teorisi ise, Rubik küpünün nasıl çalıştığının incelenmesine yardımcı olmakta birlikte bükülmeler ve dönüşler yardımıyla küpü çözülmüş duruma nasıl getirileceği belirlemektedir. Rubik küpünün herhangi bir konumu, çözülmüş durumdan bir permütasyon olarak tanımlanabilir. Böylece Rubik küp grubu, bir permütasyonunun 54 elemanından oluşan grubun bir alt grubu olur.  $S_{54}$  simetrik grubunun bir alt kümesi olan F, L, U, D, R, B simetrisi tarafından üretilen permütasyon grubuna "Rubik küp grubu" denir.  $S_{54}$  simetrik grubunun tüm permütasyonları Rubik küpünde mümkün olmayacağından bu küpün her iki tarafındaki orta yüzü sabittir ve farklı bir permütasyona tabi tutulamaz. Ayrıca, küp üzerindeki herhangi bir geçerli permütasyon köşe yönlerinden köşe konumuna ve kenar yönlerinden kenar konumlarına gönderilir. Diğer permütasyonların küp üzerinde fiziksel olarak oluşturulması mümkün değildir. Dolayısıyla G,  $S_{54}$  simetrik grubunun yalnızca bir alt kümesidir ve  $S_{54}$  simetrik grubuna izomorf değildir.

Hareketli yüzeylerden oluşan ve çoğunlukla plastikten yapılmış bir küp olan Rubik Küp, başlıca dört şekilde piyasaya sürülmüştür: Bunlar  $2 \times 2 \times 2$ 'lik,  $3 \times 3 \times 3$ 'lük,  $4 \times 4 \times 4$ 'lük ve  $5 \times 5 \times 5$ 'lik Rubik küplerdir. Zamanla  $6 \times 6 \times 6$  ve  $7 \times 7 \times 7$ 'lik Rubik küpler de üretilmeye başlanmıştır. Çalışmada  $3 \times 3 \times 3$ 'lük Rubik küpler ele alınacaktır. "Rubik Küpü" diye bilinmekte olan standart  $3 \times 3 \times 3$ 'lük modelin her yüzünde 9 kare bulunmakta olup toplam 54 kare mevcuttur. Ortada bulunan fakat görünmeyen küp hariç 26 tane küçük küplerden oluşmaktadır. Yüzeyindeki kareler genellikle altı farklı renk ile etiketlenmiştir. Bulmaca çözüldüğünde küpün her yüzü tek renkten oluşur. Birbirinden bağımsız olarak Rubik Küp'ün birçok çözüm yöntemi bulunmuştur. Bunlar aralarındaki en popüler yöntem David Singmaster tarafından geliştirilmiş ve 1980 yılında Notes on Rubik's Magic Cube (Rubik 'in Sihirli Küpü

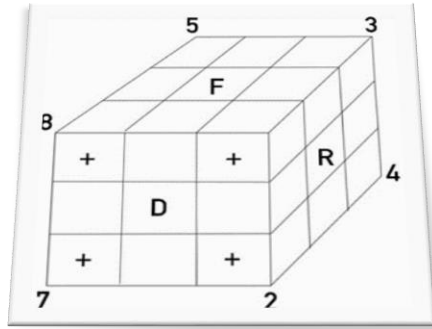


Üzerine Notlar) adlı kitapta yayımlanmıştır. Bu çözümde küp seviye seviye çözülmekte olup önce üst seviye, sonra orta, en sonda da alt seviye çözülmektedir.  $3 \times 3 \times 3$  'lük Rubik küp hareketlerinin matematiksel açıklanması için kenar oryantasyonları F, R ve U yüzlerinde olacak şekilde Şekil 5 deki gibi kullanılır:



Şekil 5. Rubik küp için kenar yönleri ve etiketleri

Kenar yönelimleri diğer yüzler için: di, db, lf, lu, bl ve bu kenarlarına '+' konularak sağlanmaktadır. Kenar etiketleri için kenarlar uf, ur, ub, ul, lf olarak sıralanıp. fr, rb, bl, df, dr, db, dl ve bunları 1'den 12'ye kadar sırayla etiketlenir (örneğin, db kenarı 11'dir). Köşe yönlendirmeleri için, tüm üst köşe yüzlerine ve tüm alt köşe yüzlerine '+' işareti konulmaktadır. Köşe etiketleri ve yönler, aşağıdaki Şekil 6'da olduğu gibi F, R ve D yüzlerinde gösterilmektedir (Joyner, 2009).



Şekil 6. Rubik küp için köşe yönleri ve etiketleri

$G$   $3 \times 3 \times 3$  'lük Rubik Küp grubu, R, L, U, D, F, B tarafından üretilen grup, yani,  $G = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$  olsun.  $V$ , küpün tepe noktaları kümesi olsun. Rubik küp, köşe alt küpleri kümesiyle özdeşleştirilerek ve  $\sigma: H \rightarrow S_V$  homomorfizması tanımlanır. Rubik küpün her hareketi ilgili köşe permütasyonlarını ilişkilendiren homomorfizma yardımıyla yapılmaktadır. E, küpün kenarlar kümesi, yani Rubik küpün kenar alt küpleri kümesiyle özdeşleştirilen küme ve  $\sigma: H \rightarrow S_E$  Rubik küpün her hareketiyle ilgili kenarların permütasyonunu ilişkilendiren homomorfizma olsun. Bu takdirde köşe yönlendirmeleri, her  $g \in H$  hareketiyle ilişkilendiren bir fonksiyon olan  $v: H \rightarrow C_3^8$  ye karşılık gelen köşe yönelimleri yardımıyla yapılır. Daha açık olarak,  $g \in H$  elemanı  $g$ 'nin  $i$  köşesini  $j$  köşesine taşıyan fonksiyon olarak tanımlanır. O halde  $v_i(g) \in C_3$ 'inci tepe noktasının  $g$  tarafından gönderildiği yön olmak üzere burada köşeler gösterilen Tablo 1 deki gibi etiketlenmiştir ve burada yön, bağıl referans '+' elde edileni döndürmek için gereken saat yönünde 120 derece bükülme sayısıdır. Bu bükülme  $i$ 'den  $j$ 'ye  $g$  hareketini kullanarak  $j$  köşesindeki standart '+' referansına hareket ettirerek sağlanır.

Bir  $g \in H$  hareketinin köşe oryantasyonları üzerindeki etkisi, '+' işaretlerinin yeniden etiketlenmesi olarak tanımlanır. Bir  $g \in H$  hareketinin köşeler üzerinde etkisi vardır.

**Tablo 1.** Rubik küp için köşe etiketleri

$X$	$\vec{v}(X)$
$F$	(2,0,1,0,1,0,0,2)
$U$	(0,0,0,0,0,0,0,0)
$D$	(0,0,0,0,0,0,0,0)
$B$	(0,1,0,2,0,2,0,1)
$R$	(1,2,2,1,0,0,0,0)
$L$	(0,0,0,0,1,2,1,2)

Köşelerin bir permütasyonu  $p(g) \in S_V$  ise, köşelerin yeniden yönlendirilmesi köşelerin bir permütasyonu ile sağlanmaktadır. Özellikle  $g, h \in H$  için yön  $\vec{v}(gh)$  yalnızca  $h$  tepe noktalarına tarafından izin verilen köşelere karşılık gelen koordinatlarda  $v(g)$  'den farklı olabilir. Şimdi,  $g$ 'nin köşeler üzerindeki etkisinin dikkate alınması şartıyla, 'göreceli' yönelimin  $\vec{v}(gh) - \vec{v}(g)$  yönelimle  $\vec{v}(h)$  aynı olduğunu sıradaki önermede doğrulanmaktadır:  $\vec{v}(h) = \rho(g)(\vec{v}(gh) - \vec{v}(g))$ .

**Önerme 1.**  $\vec{v}(gh) = \vec{v}(g) + \rho(g)^{-1}(\vec{v}(h))$  (Joyner, 2009).

**Kanıt:**  $gh$  hareketi,  $i$ 'inci köşe alt küpünü  $v_i(gh)$  ile yönlendirir ve tanım gereği köşeleri  $\rho(gh)$  ile değiştirir. Öte yandan,  $(gh)$  önce  $g$ 'yi sonra  $h$ 'yi etkiler.  $g$  hareketi,  $v(g)$  ile  $i$ 'inci köşe alt küpü alınıp  $i$ 'inci tepe noktasını  $\rho(g)(i)$ 'inci tepe noktasına gönderilirse  $h$ 'nin bunun üzerindeki müteakip etkisini incelemek için  $v(g)$ 'yi  $v(gh)$ 'den çıkartılır, böylece orijinal oryantasyonuna geri dönülür. Bu konum değiştirilmiş küp olarak adlandırılır.  $h$  hareketi önce değiştirilmiş küpün  $j$ 'inci köşe alt küpünü  $v_j(h)$  ile yönlendirir ve  $\rho(h)(j)$  tepe noktasına göre değiştirir. Değiştirilmiş küpün  $i$ 'inci alt küpü, orijinal  $\rho(g)(i)$ 'inci alt küpünden  $g$  aracılığıyla gelir. Böylece değiştirilmiş küpün  $i$ 'inci köşe alt küpü,  $h$  aracılığıyla,  $\rho(g)^{-1}(i)$  tarafından yeniden yönlendirilir. Orijinalin  $(i)$ 'inci köşesi üzerindeki  $gh$ 'nin toplam etkisini elde etmek için  $v_j(g)$  eklenmelidir. Böylece  $v_i(gh) = v_i(g) + v_{\rho(g)^{-1}(i)}(h)$  eşitliği elde edilir

**Kenar Yönleri:**  $w : H \rightarrow C_2^{12}$  ye karşılık gelen kenar yönelimlerini her  $g \in H$  hareketiyle ilişkilendiren fonksiyon olsun. Burada  $g \in H$  elemanı  $i$  kenarını  $j$  kenarına taşıyorsa  $w_i(g) \in C_2$ ,  $i$ 'inci kenarın  $g$  tarafından gönderildiği yöndür, burada kenarlar Tablo 2 de etiketlenmiştir ve burada yön, göreceli referansı '+' yöne döndürmek için gereken 180 derece döndürme sayısıdır.  $j$  kenarındaki standart '+' referansına  $g$  hareketi kullanılarak  $i$  kenarını  $j$ 'ye hareket ettirerek elde edilir (Joyner, 2009).

**Tablo 2.** Rubik küpte kenarların etiketlenmesi

$X$	$\vec{w}(X)$
$F$	(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)
$U$	(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)
$F \cdot U$	(1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0)
$U \cdot F$	(1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)
$B$	(0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0)
$D$	(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,1)
$R$	(0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)
$L$	(0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0)

Bir  $g \in H$  hareketinin kenar oryantasyonları üzerindeki etkisi, '+' işaretinin yeniden etiketlenmesi olarak tanımlanır. Bir  $g \in H$  hareketinin kenarlar üzerinde etkisi kenarların bir permütasyonu  $\sigma(g) \in S_E$  olmak üzere hareket ettirilen kenarların yeniden oryantasyonunu sağlar. Özellikle  $g, h \in H$  için  $\vec{w}(g)$  oryantasyonu yalnızca  $h$  tarafından izin verilen kenarlara karşılık gelen koordinatlarda farklı olabilir:

$$\vec{w}(gh) = \vec{w}(g) + \sigma(g)^{-1}(\vec{w}(h)),$$

denkleminde her  $1 \leq i \leq 12$  için,

$$w_i(gh) = w_i(g) + w_{\sigma(g)^{-1}(i)}(h),$$

sağlanır.

**Direkt Çarpım Grubu:**  $H' = (C_3^8 \times S_V) \times (C_2^{12} \times S_E)$  direkt çarpım grubunun veya

$H' = (C_3 \text{ wr } S_V) \times (C_2 \text{ wr } S_E)$  direkt çarpım grubunun  $h, h'$  elemanlarını

$h = (v, r, w, s), h' = (v', r', w', s') \in C_3^8 \times S_V \times C_2^{12} \times S_E$  olarak gösterilirse grup işlemi şu şekilde verilir:

$$h \cdot h' = (v, r, w, s) \cdot (v', r', w', s') = (v + P(r)(r'), rr', w + P(s)(w'), ss').$$

Burada,

$$l : H \rightarrow (C_3^8 \times S_V \times C_2^{12} \times S_E)$$

$$g \mapsto (v(g), p(g), w(g), \sigma(g)).$$

**Önerme 2.**  $l$  bir grup izomorfizmasıdır. Dolayısıyla  $H \cong H'$  izomorfizması mevcuttur (Joyner, 2009).

$$\text{Kanit: } (\vec{v}(g), p(g), \vec{w}(g), \sigma(g)) \cdot (\vec{v}(h), p(h), \vec{w}(h), \sigma(h))$$

$$= \vec{v}(g) + P(p(g))(\vec{v}(h)), p(g)p(h), \vec{w}(g) + P(\sigma(g))(\vec{w}(h)), \sigma(g)\sigma(h)$$

Herhangi bir yeniden yönlendirme ve permütasyon bazı kural dışı hareketlerle elde edilebileceğinden,  $l$  örten olmalıdır. Hiçbir alt küpe izin verilmediğinden,  $l$  birebirdir. Dolayısıyla  $l$  bir grup izomorfizmasıdır. ■

Rubik küp grubun yapısını 'küp teorisinin ikinci temel teoremi' ortaya koymaktadır.  $\rho(g)$  küpün  $V$  köşe noktaları kümesinin karşılık gelen permütasyon,  $\sigma(g)$  küpün  $E$  kenarı kümesinin karşılık gelen permütasyon ve  $v(g), w(g)$  yönelimler olmak üzere her bir  $g \in G$  'yi  $(\vec{v}(g), \rho(g), \vec{w}(g), \sigma(g))$  ye taşır. Burada  $S_n$  simetrik grup olmak üzere  $\rho : G \rightarrow S_8$  bir grup homomorfizmasıdır ve  $\sigma : G \rightarrow S_{12}$  bir grup homomorfizmasıdır. Küp teorisinin ikinci temel teoremi yardımıyla  $r, s$ 'nin yukarıdaki gibi köşelerin ve ilgili kenarların permütasyonları olmak üzere  $(v, r, w, s)$  verildiğinde ve  $v \in C_3^8, w \in C_2^{12}$  için  $v, r, w, s$  üzerindeki bazı koşullar altında Rubik küpünün olası bir konumuna karşılık gelmesini sağlar (Joyner, 2009).

**Teorem 1. (Rubik Küp Teorisinin İkinci Temel Teoremi)**  $r \in S_8, s \in S_{12}, \vec{v} \in C_3^8, \vec{w} \in C_2^{12}$  olmak üzere  $(\vec{v}, r, \vec{w}, s)$  sıralı dördlüsünün rübig küpünün olası bir konumuna karşılık gelmesi ancak ve ancak

$$(a) \quad \text{sgn}(r) = \text{sgn}(s), \text{ ('permütasyon olarak eşitlik')}$$

$$(b) \quad v_1 + \dots + v_8 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ ('toplam bükülmelerin korunması')}$$

$$(c) \quad w_1 + \dots + w_{12} \equiv 0 \pmod{2}, \text{ ('toplam döndürmelerin korunması')}$$

olması durumunda mümkündür (Joyner, 2009).

**Kanit:** Kolaylık olsun diye  $\vec{v}$  yerine  $v$  yazalım.

( $\Rightarrow$ )  $(v, r, w, s) \in S_V \times S_E \times C_3^8 \times C_2^{12}$ 'nin Rübik küpünün bir konumunu temsil ettiğini kabul edelim. Rübik küpü çözülmüş konumdan bu sıralı dördlü ile ilgili konuma hareket ettiren eleman  $g \in G$  olsun. O zaman  $r = \rho(g)$  ve  $s = \sigma(g)$  dir.  $g$ 'nin  $R, L, U, D, F, B$  temel hareketlerinde bir kelime olarak yazılabilir, örneğin  $\text{sgn}(g) = X_1 \dots X_k$  olup  $g ; R, L, U, D, F, B$ 'den birine eşittir. Eğer  $X_i$  bu temel hareketlerden herhangi biriye, o zaman  $\text{sgn}(\rho(X)) = \text{sgn}(\sigma(X))$  bulunur.  $\text{sgn}, \rho$  ve  $\sigma$  homomorfizma olduğundan, bundan bu sonuç çıkar:



$$sgn(r) = sgn(\rho(g)) = \prod_{i=1}^k sgn(\rho(X_i)) = \prod_{i=1}^k sgn(\sigma(X_i)) = sgn(\sigma(X)) = sgn(s)$$

Bu (a)'yı kanıtlar. Rubik küpteki temel hareketler için (b) kolaylıkla doğrulanabilir.

(i) (b)'deki bükülmelerin korunumu koşulu  $(v_1, \dots, v_8)$  için doğrudur, bu ancak ve ancak herhangi bir  $P(p)(v) = (v_{(1)p}, \dots, v_{(8)p})$  için yazılır;

(ii)  $(v_1, \dots, v_8)$  ve  $(v'_1, \dots, v'_8)$  'nin her biri (b)'deki bükülmelerin korunumu koşulunu sağlıyorsa, toplamları da onu karşılar.

Yukarıdaki gibi,  $g; R, L, U, D, F, B$  temel hareketleriyle bir kelime olarak yazılırsa  $g = X_1 \dots X_k$  olup  $g; R, L, U, D, F, B$ 'den birine eşittir.  $X_i$  nin seçimi bu ifadenin minimum olması anlamına gelir, böylece  $k$  mümkün olduğu kadar küçük alınmalıdır. Bu  $k$ 'ya  $g$ 'nin **uzunluğu** denir. Bu uzunluk,  $G$ 'nin Cayley grafiğindeki  $g$ 'den özdeşliğe olan mesafe aynıdır.

(b) 'yi uzunluk üzerinden tümevarımla ispatlayalım.  $k = 1$  uzunluğunda bulunan tüm kelimeler için iddia açıktır.  $k > 1$  olması durumunu değerlendirelim. İkinci çarpımının yönünü veren formülle hareketlerin iki yönelimi açısından hareket eder, öyle ki;

$$\vec{v}(X_1 \dots X_{k-1} X_k) = \rho(X_1 \dots X_{k-1})^{-1}(\vec{v}(X_k)) + \vec{v}(X_1 \dots X_{k-1}).$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki terimi, yukarıdaki (b) ile (i)'deki burulmaların korunumu koşulunu karşılar.  $\rho(X_1 \dots X_{k-1})^{-1}(\vec{v}(X_k))$  terimi, tümevarım hipoteziyle (b)'deki burulmaların korunumu koşulunu karşılar. Toplamları yukarıdaki gibi (b) ile (ii)'deki burulmaların korunumu koşulunu karşılar. Böylece (b) sağlanır. (c)'nin ispatı, (b)'nin ispatına benzer şekilde verilir.

( $\Leftarrow$ ) (a),(b) ve (c)'yi varsayarak, Rubik küpünün buna karşılık gelen bir geçerli konumu olduğunu gösterelim. İlk olarak, özel bir durumu ispatlayalım.  $r$  ve  $s$ 'nin hem birim hem de  $(w_1, \dots, w_{12}) = (0, \dots, 0)$  eşitliğini kabul edelim. Tam olarak iki köşeyi bükün ve orijinali koruyan bir hamle alalım. Örneğin,  $g = (R^{-1}D^2RB^{-1}U^2B)^2$  hareketi ufr köşesini saat yönünde 120 derece, bdl köşesini saat yönünde 240 derece döndürsün ve diğer tüm alt küplerin yön ve konumlarını korusun. Bu hareket, herhangi bir köşe çiftini bükün ve diğer tüm alt küplerin yönelimlerini ve konumlarını koruyan bir hareket elde etmek için uygun bir konjugasyonla kolayca değiştirilebilir. Bu hamleler, (b)'deki bükülmelerin korunum koşulunu sağlayan tüm olası sıralı sekizlileri üretir.  $r$  ve  $s$ 'nin aynı birim olması ve  $(w_1, \dots, w_{12}) = (0, \dots, 0)$  olması durumunda iddia açıktır. Şimdi  $r$  ve  $s$ 'nin birim birim olduğunu ve  $(w_1, \dots, w_8) = (0, \dots, 0)$  olduğunu varsayalım. Tam olarak iki kenarı çeviren, yönelimleri ve diğer tüm alt küplerin konumlarını koruyan bir hareketin var olduğunu kabul edelim. Örneğin, hareket  $g = LFR^{-1}L^{-1}U^2RURU^{-1}R^2U^2R$  ise, uf kenarını, ur kenarını çevirir ve diğer tüm alt küplerin yönelimlerini ve konumlarını korur. Bu hareket, herhangi bir kenar çiftini ters çeviren ve diğer tüm alt küplerin yönelimlerini ve konumlarını koruyan bir hareket elde etmek için uygun bir eşlenikle kolayca değiştirilebilir. Bu hareketler, (c)'deki çevirmelerin korunum koşulunu sağlayan tüm olası sıralı on ikileri üretir. Bu,  $r$  ve  $s$ 'nin aynı birim olması ve  $(v_1, \dots, v_8) = (0, \dots, 0)$  olması durumunda sağlanır. Bu son iki özel durumun bir sonucu olarak,  $r$  ve  $s$ 'nin her ikisinin de özdeş olduğu durumda doğru olduğu görülür. Son olarak, son özel durumumuzu ispatlayalım.  $(v_1, \dots, v_8) = (0, \dots, 0)$  ve  $(w_1, \dots, w_{12}) = (0, \dots, 0)$  olsun. Aşağıdaki üç iddiayı ele alalım.

- Herhangi bir üç kenarlı alt küp verildiğinde, bunlar üzerinde 3 döngü olan bir hareket vardır. Diğer tüm alt küplerin yönlerini ve konumlarını korur.

- Herhangi üç köşe verildiğinde, bu köşelerde 3 döngülü bir hareket vardır ve diğer tüm alt küplerin yönelimlerini ve konumlarını korur.

• Herhangi bir kenar çifti ve herhangi bir çift köşe verildiğinde, bu kenarlarda 2 döngü, bu köşelerde 2 döngüdür ve diğer tüm alt küplerin yönelimleri ve konumları korur.

Bu üç iddia doğrulanırsa;  $A_E$ 'nin 3 döngüsünün yukarıdaki kenar tarafından ve  $A_V$ 'nin 3 döngüsünün yukarıdaki köşe tarafından üretilmesi başka bir deyişle,  $r \in A_V$  ve  $s \in A_E$  olması koşuluyla, herhangi bir  $(r, s, 0, 0)$  sıralı dörtlüsü ile bağıntılı Rubik küpünün bir konumunu oluşturması sebebiyle  $|S_n/A_n| = 2$  olup,  $A_E \times A_V$  alt grubu  $S_E \times S_V$ 'de 4 indekslidir. Üçüncü hareket türünde kenar-köşe 2 döngüsü yukarıda olup Rubik küp grubu,  $A_E \times A_V$  alt kümesinin bir elemanına karşılık gelmez çünkü bir kenar 2-döngüsü, kenarların tek bir permütasyonudur.

Bu nedenle, her üç hareket türü tarafından oluşturulan  $S_E \times S_V$  alt grubunu ele alırsak ya tüm  $S_E \times S_V$ 'yi ya da uygun şekilde  $A_E \times A_V$ 'i içeren 2 indeksli bir alt grup elde edilir. İlk olasılık, (a) 'daki eşitlik koşuluyla çeliştiği için göz ardı edilebilir.  $A_E \times A_V$  'i düzgün bir şekilde içeren 2 indeksli kümelerinin  $S_V$  'sinin tek alt grubu, (a) 'daki koşulu sağlayan elemanların alt grubudur. Buradan,  $v$  ve  $w$ 'nin her ikisinin de sıfır olması durumunda iddianın sağlandığı sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla Rubik küpü hangi konumda olursa olsun, her zaman herhangi bir alt küpün yerini değiştirmeyen, ancak  $v$  ve  $w$  'nin her ikisi de sıfır olacak şekilde küpün yönünü "çözen" bir hareket vardır

**Sonuç 1.** Rubik küp grubu, Teorem 1 deki (a),(b),(c) koşullarını sağlayan  $g = (\vec{v}, r, \vec{w}, s) \in H$  elemanlarından oluşur. Böylece Rubik küp grubunun, merkez elemanlarından oluştuğu görülür (Joyner, 2009).

**Sonuç 2.**  $G$  'nin merkezi iki öğeden oluşur: özdeşlik ve  $z = (\vec{v}, r, \vec{w}, s)$  için  $\vec{w} = (1, 1, \dots, 1) \in C_2^{12}$ ,  $\vec{v} = \vec{0} \in C_3^8$ ,  $S = 1 \in S_{12}$  ve  $r = 1 \in S_8$  dir (Joyner, 2009).

**Kanıt:** (Brandelow, 1982) de kullanılan ispat tekniğinin benzerini uygulayalım. Basit olması için tekrar 3 yerine  $v$  yazılıp  $S_n$ 'nin merkezinin,  $n > 2$  önemsiz olduğu kullanılırsa  $(v, r, w, s) \in G$  için

$$(v, r, w, s). (v', r', w', s') = (v + P(r)(v'), rr', w + P(s)(w'), ss') = (v', r', w', s'). (v, r, w, s) \\ = (v' + P(r')(v), r'r, w' + P(s')(w), s')$$

eşitliği elde edilir. Tüm  $(v', r', w', s') \in G$  için, yalnızca  $r = 1$  ve  $s = 1$  ise bu durumda, tüm  $r' \in S_8$  için  $v + v' = v' + P(r')v$  bulunur. Böylece,  $v$ 'nin  $(0, 0, \dots, 0)$  veya  $(1, 1, \dots, 1)$  veya  $(2, 2, \dots, 2)$  'e eşit olması anlamına gelir. Bükümlerin korunumunu sağlaması gerektiğinden,  $(1, 1, \dots, 1)$  veya  $(2, 2, \dots, 2)$  olamaz. Benzer şekilde,  $w + w' = w' + P(s')w$ , tüm  $s' \in S_{12}$  için  $w$ 'nin  $(0, 0, \dots, 0)$  veya  $(1, 1, \dots, 1)$  'a eşit olması demektir. Her ikisinde de dönüşlerin korunması sağladığından, bu seçeneklerden herhangi biri geçerli olur.

Rubik küpün simetrik grubundan elde edilen kazanımlar geliştirilerek Rubik küpün hareket kümesi  $(G, *)$  ikilisi ile ifade edilecek bir hiper grup cebirsel yapısına dönüştürülebilir mi? Bu araştırma probleminde  $*$ ,  $G \times G$  den  $G$  nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi olan  $P^*(G)$  ye tanımlı olan bir hiper işlem olarak alınarak Rubik küpün tüm olası hareketlerini oluşturup oluşturmadığının kontrolü yapılmıştır. Bu kontrolün yapılması esnasında uygun yöntemlerin geliştirileceği veri analizine başvurulmuş olup olası hareketlerin Rubik küp üzerinde gösterimleri kontrol edilmiştir. Örneğin bir olası hareket, üst yüzün ardından sağ yüzün saat yönünün tersine dönüşü alınabilir. İki hareket aynı konfigürasyonla sonuçlanırsa bu iki hareket aynı kabul edilecektir. Örneğin, bir yüzü saat yönünde  $180^\circ$  döndürmek ile bu aynı yüzü saat yönünün tersine  $180^\circ$  döndürme hareketi ile aynı hareket olarak değerlendirilecektir. Hiper grup işlemi  $M_1$  ve  $M_2$  iki hamle ise, o zaman  $M_1 * M_2$ , önce  $M_1$  'i sonra  $M_2$  'yi yaptığımız hareketi sembolize edecek biçimde tanımlanmıştır. Sonuç olarak bu çalışmada yer alan grup cebirsel yapısı hiper gruplara taşınarak Rubik küpün çözümüne sağladığı katkılar sunulmaktadır.

## MATERYAL VE METOT

20. Yüzyılın ilk yılları bilimde determinizmin ve kesinliğin sonu olarak bilinir. Kuantum mekaniğinin ortaya çıkışı, Isaac Newton tarafından Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica'da kurulan klasik mekaniğin refahını sarsmıştır. 1927'de, Werner Heisenberg, kuantum mekaniğinin matematiksel temelleri üzerinde çalışırken belirsizlik ilkesini geliştirmiştir. Öte yandan, 1931'de Kurt Gödel iki eksiklik teoremini yayınlamış, böylece David Hilbert'in matematiksel hayallerine ve Bertrand Russell'in Principia Mathematica ile sonuçlanan girişimlerine son vermiştir. 1933'te Andrey Kolmogorov "Olasılık Teorisinin Temelleri" adlı kitabında olasılık teorisinin modern aksiyomatik temellerini ortaya koymuştur. Aynı on yılda belirsizlik cebiri temellendirilmiştir. Genç bir Fransız matematikçi, Frédéric Marty (1911-1940), 1934'te Stockholm'de düzenlenen 8. İskandinav Matematikçiler Kongresi sırasında, elemanların bileşimi kuralının tek bir eleman yerine bir dizi elemandan oluşan bir küme yardımıyla sonuçlandığı cebirsel bir yapı ortaya koymuştur. Bu yapıya hiper grup adını vermiştir. Marty' nin Hiper gruplardaki matematiksel mirası sadece üç makaleden ibarettir (Marty, 1934), (Marty, 1935), (Marty,1936). Ancak, M. Krasner (Krasner, 1937), (Krasner, 1940), (Krasner, 1941), (Krasner, 1944), (Krasner, 1947) gibi diğer matematikçiler, J. Kuntzmann (Kuntzmann, 1937), H. Wall (Wall, 1937), O. Ore (Ore, 1937), M. Dresher (Dresher ve Ore, 1938)), E. J. Eaton (Eaton ve Ore, 1940), (Eaton, 1940) ve L. W. Griffiths (Griffiths, 1938) kısa bir süre sonra hiper gruplar üzerinde çalışmaya başlamıştır (Corsini, 1993). Böylece hiper kompozisyon cebiri ortaya çıkmıştır. Hiper kompozisyon cebiri, çok değişkenli işlemlerle donatılmış yapılarla ilgilenen soyut cebirin dalıdır. Hiper operasyonlar veya hiper kompozisyonlar olarak da adlandırılan çok değişkenli işlemler, her eleman çiftine tek bir eleman yerine bir eleman kümesini ilişkilendiren boş olmayan bir kümenin elemanlarının sentezlenmesidir. Hiper kompozisyon cebirinin temel yapısı hiper gruptur. Kanonik hiper grup kavramı özel bir form olarak çalışılmıştır. Diğer hiper kompozisyonel yapılar hiper modül (Massouros, 1988) ve hiper vektör uzayıdır (Mittas, 1975). (Massouros, 1988) 'deki analitik projektif geometrileri ve Öklid küresel geometrileri özel hiper modüller olarak düşünülebilir.

Boştan farklı bir  $A \neq \emptyset$  kümesi için  $P^*(A) = P(A) \setminus \emptyset$  olsun.  $\circ: A \times A \rightarrow P^*(A)$  bir fonksiyonsa  $(A, \circ)$  ikilisine *hiper grupoid* denir burada  $\circ$  ya *hiper işlem* adı verilir. Tanımdan da görüleceği üzere hiper grupoid kavramı grupoid kavramından daha genel bir kavramdır. Boştan farklı  $X, Y \subseteq A$  alt kümeleri  $X \circ Y = \{x \circ y | x \in X, y \in Y\}$  biçiminde tanımlanır.  $s \in A$  keyfi elemanı için  $\{s\} \circ X := s \circ X$  ve  $X \circ \{s\} := X \circ s$  biçiminde tanımlanır.  $(A, \circ)$  hiper grupoidi  $a, b, c \in A$  keyfi elemanları için  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  eşitliğini sağlıyorsa  $(A, \circ)$  ikilisine *yarı hiper grup* denir.  $(A, \circ)$  hiper grupoidi verilsin. Her  $s \in A$  için  $s \circ A = A \circ s = A$  eşitliği sağlanıyorsa  $(A, \circ)$  ya *hemen hemen hiper grup* denir.  $(A, \circ)$  hemen hemen hiper grup ve yarı hiper grupsa  $(A, \circ)$  ya *hiper grup* denir.  $(A, \circ)$  hiper grup ve  $B (\neq \emptyset)$ ,  $A$  nın alt kümesi olsun. Her  $b \in B$  için  $b \circ B = B = B \circ b$  ise,  $B$  ye  $A$  nın *alt hiper grubu* denir. Aşağıdaki koşulları sağlayan  $(A, \circ)$  hiper grubuna *kanonik hiper grup* adı verilir:

- (i) Her  $a, b \in A$  için  $a \circ b = b \circ a$ 'dir. Yani  $(A, \circ)$  değişmelidir;
- (ii) Her  $a \in A$  için  $\{a\} = (a \circ e) \cap (e \circ a)$  olacak şekilde  $e \in A$  vardır;
- (iii) Her  $a \in A$  için  $e \in a \circ a^{-1}$  olacak şekilde bir tek  $a^{-1} \in A$  vardır;
- (iv) Her  $s \in A$  için  $s \in y \circ z$  olması  $y \in s \circ z^{-1}$  olmasını gerektirir.

Yukarıda (ii) koşulunda yer alan  $e$  elemanına  $(A, \circ)$  *hiper grubunun birim elemanı* denir (Corsini,1993). (Massouros, 2015) genel ayrışım teoremlerinin hiper gruplarda geçerli olan sonuçlarından iyi bilinen ayrışım teoremlerini içermektedir. Soyut grup teorisinin geniş kapsamlı bir kavramı ise alt gruplarına göre yan sınıflara ayırıp bölüm gruplarını çalışmaktır. Hiper grup, grup yapısından daha genel bir yapı olmakla birlikte, çeşitli tipte alt hiper gruplara sahiptir. Vougiouklis, hiper

grupların genelleştirilmiş permütasyonlarla temsiline odaklanmıştır. Bazı genelleştirilmiş permütasyon sınıfları tanıtarak bu sınıfların bazı özelliklerini incelemiştir. Böylece her grubun genelleştirilmiş permütasyonlarla temsil edilmesine katkı sunmuştur. Bunu, hiper grupta tanımlanan temel  $\beta^*$  denklik bağıntısı, yani bölüm kümesinin bir grup olacağı şekilde minimum denklik bağıntısı kullanarak sağlamıştır (Vougiouklis, 1992).  $X$  bir küme ve  $f: X \rightarrow P(X) \setminus \{\emptyset\}$  bir fonksiyon olsun.  $\cup_{x \in X} f(x) = f(X) = X$  ise,  $f$  ye  $X$  in genelleştirilmiş permütasyonu denir.  $f$  fonksiyonu  $X$  den  $\cup_{x \in X} \{x\} \times f(X)$  e tanımlı ise  $f$  ye birleşmelidir denir.  $X$  üzerindeki genelleştirilmiş permütasyonların kümesi  $M_X$  ile gösterilir. Bu küme (Gionfriddo, 1978) de tanımlanmıştır.  $f \in M_\theta$  ve  $M_f = \{p \in M_X | g \subset f\}$  olsun. Bu takdirde keyfi  $f_1, f_2$  elemanları için  $f_1 * f_2 = \{p \in M_X | p \subset f_1 \circ f_2\}$  hiper işlemi ile tanımlı  $M_f$  bir hiper gruptur. Bu hiper gruplar genelleştirilmiş permütasyon hiper gruplarının işlevini görmektedir. Ayrıca Her  $f \in M_\theta$  için  $(M_f, *)$  hiper grubu  $f$ 'nin  $\theta$ -sınıfları üzerindeki permütasyonlarla tanımlanan indislenmiş hiper grupların kartezyen çarpımına izomorf olduğu ispatlanmıştır (Vougiouklis, 1992). (Vougiouklis, 1992) in çalışması permütasyon hiper gruplarının Rubik küpe aktarılmasında yardımcı olmuştur.

Mekanik olarak düşünüldüğü zaman Rubik küpün nasıl inşa edildiğine dair Temel Mekanik problem olsa da, iç yapısının son derece basit ve ustaca tasarlanmış olması Rubik küpe olan hayranlığımızı arttırmaktadır. Rubik küp, Budapeşte'deki usta bir Macar Heykeltıraş mimar ve tasarımcı, Profesör Ernő Rubik tarafından icat edilmiştir. Ernő Rubik, temel matematik probleminin biçimsel matematiğini çözmemiş olsa da, uygulanabilir bir algoritma bulmuştur. Rubik küpün cebirsel olarak ele alındığı en önemli iki temel kaynak olarak (Brandelow, 1982) ve (Singmaster, 1981) verilebilir. Bu iki kaynağın temelini grup teori yardımıyla Rubik küpün; köşe küplerinin konumları, kenar küplerinin konumları, köşe küplerinin yönelimleri ve kenar küplerinin yönelimleri yöntemleriyle tasarımları oluşturulmaktadır. Tasarımı yapılacak Rubik küpte, komütatör kavramı uygulama sahasına olarak devreye girmektedir.  $X$  ve  $Y$  Rubik küp üzerinde iki hamle ise, bu hamlelerin "komütatörü"  $XYX^{-1}Y^{-1}$  hareketini oluşturmaktadır. Bu sayede  $XYX^{-1}Y^{-1} = XY(YX)^{-1}$  olması sebebiyle  $X$  ve  $Y$  hamlelerinin değişmeli olması durumunda  $XYX^{-1}Y^{-1} = XY(YX)^{-1} = XY(XY)^{-1} = 1$  olduğu açıktır. Böylece,  $X$  ve  $Y$  komütatörü, küpü çözmek için önemli bir yöntemdir.

Rubik küpün iki kenarını çevirme problemi bir komütatör örneğidir. sol üst ve üst ön kenarları çevirmek için;

1.  $X = L(U_S)^{-1}L^2(U_S)^2L$  üst katmanın geri kalanını bozmadan sol üst kenarı çevirir. Burada  $L(U_S)^{-1}L^{-1}$  sol üst kenarı üst katmandan alır ve sonra  $L^{-1}(U_S)^{-1}L^{-1}$  ters çevrilecek şekilde farklı bir şekilde geri koyar.

2.  $Y = U$  sağ üst ön köşeyi sol üst ön konuma taşır ve Rubik küpün alt iki katmanını etkilemez.

3.  $X^{-1} = L^{-1}(U_S)^2L^2U_S L^{-1}$  sol üst kenarı çevirir ve küpün alt iki katmanını etkilemez.

4.  $Y^{-1} = U^{-1}$  üst katmanı orijinal konumuna dönüştürür.

Böylece  $XYX^{-1}Y^{-1} = (L(U_S)^{-1}L^2(U_S)^2L)U(L^{-1}(U_S)^2L^2U_S L^{-1})U^{-1}$ , küpün geri kalanını bozmadan sol üst ve üst ön kenarları çevirir.

Rubik küpün iki köşesini döndürme problemi bir komütatör örneğidir. üst ön sol ve üst ön sağ köşeleri döndürmek için;

1.  $X = F^{-1}DFDL^{-1}$  üst katmanının geri kalanını bozmadan üst ön sol köşeyi saat yönünde döndürür. Burada  $F^{-1}DF$  köşeyi üst katmandan alır ve  $LDL^{-1}$  döndürülmesi için farklı bir şekilde geri koyar.

2.  $Y = U$  sağ üst ön köşeyi sol üst ön konuma taşır ve küpün alt iki katmanını etkilemez.

3.  $X^{-1} = LD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}F$  sol üst köşeyi saat yönünün tersine döndürür ve alt iki kattaki hasarı onarır.

4.  $Y^{-1} = U^{-1}$  üst katmanı orijinal konumuna dönüştürür.

Buradan  $XYX^{-1}Y^{-1}=(F^{-1}DFLDL^{-1})U(LD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}F)U^{-1}$  olup küpün geri kalanını bozmadan üst ön sol köşeyi saat yönünde ve üst ön sağ köşeyi saat yönünün tersine dönüştürür.

Rubik küpte ayrık permütasyon kavramı şu şekilde izah edilir. X ve Y aynı küplerden herhangi birini etkilemezse, X ve Y gidip gelir, bu nedenle  $XYX^{-1}Y^{-1}=1$  olur.

1. Önce X hamlesi,

2. Sonra Y hamlesi yapılırsa X tarafından taşınan küplerin hiçbirini etkilemez.

3. Bu nedenle  $X^{-1}$  hamlesini yapmak, Y tarafından taşınan küpleri etkilemeden X tarafından taşınan tüm küpleri geri taşır.

4.  $Y^{-1}$  hamlesini yaparak başladığımız yere döneriz. Örneğin, U yalnızca üst katmanı ve D yalnızca alt katmanı daha sonra etkilediği için  $UDU^{-1}D^{-1}=1$  dir.

Komütatör kavramı, Rubik küp stratejisini kurabilmek için kullanılan elverişli bir yöntemdir. X ve Y aynı küplerden birini etkiliyorsa  $XYX^{-1}Y^{-1}$  yalnızca birkaç küpü etkilemelidir. Hem X hem de Y hamlesi tarafından izin verilen bir küp varsa ve başka hiçbir küp hem X hem de Y den etkilenmiyorsa  $XYX^{-1}Y^{-1}$  üç döngüdür. Bunu a,b,c küpleri yardımıyla açıklayalım.  $XYX^{-1}Y^{-1}$  a' yi b' ye taşır, b' yi c' ye taşır, c' yi a' ya taşır ve başka bir şey taşımaz. a, hem X hamlesi hem de Y hamlesi tarafından taşınan küptür. b, Y' nin a' ya taşıdığı küptür. Bu nedenle  $Y^{-1}$  hamlesi a dan b' ye hareket eder. c, X' in a' ya hareket ettiği küptür. Yani  $X^{-1}$ , a' dan c' ye hareket eder.

Rubik küpün üç köşesini çevirme bir komütatör örneğidir.  $X=LDL^{-1}$ , üst ön sol köşe küpünü üst katmanın dışına taşır ve üst katmanın geri kalanını etkilemez.  $Y=U$  sadece üst katmanı etkiler. Bu nedenle, yalnızca sol üst ön köşe küpü hem X hem de Y' den etkilenir. Buradan hareketle  $XYX^{-1}Y^{-1}=(LDL^{-1})U(LD^{-1}L^{-1})U^{-1}$ , köşe küplerinin üç döngüsü bulunur.

Rubik küpün üç kenarını çevirme de bir komütatör örneği olarak düşünülebilir.  $X=R_S$ ,  $Y=U^2$  olsun. Bu takdirde  $XYX^{-1}Y^{-1}=R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2$  üç kenar küpünü çevirir.

Rubik küpünde eşlenik kavramı da elverişli bir yöntem olarak çalışılabilir. Şöyle ki, X ve Z Rubik küpünde iki hamle ise, yeni bir hamle  $ZXZ^{-1}$  olarak elde edilir. Buna X in “eşleniği” denir. Eşlenik hareketleri farklı yerlerde aynı işlevi görür. Örneğin, X iki kenarı çevirirse,  $ZXZ^{-1}$  iki kenarı çevirir. X üç kenarı çevirirse,  $ZXZ^{-1}$  genellikle farklı üç kenarı çevirir.

Rubik küpünde üç üst kenarı döndürme bir eşlenik örneğidir. Bunun için üst ön, sağ üst ve sol üst kenarı çevirip,  $X=R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2$  hamlesiyle ön alt, üst ön ve üst arka kenarları çevrilir.  $Z=F^2 U$  ise  $ZXZ^{-1}$  hamlesi hesaplandığında;

1. Z, çevrilmesini istediğimiz üç kenarı ön alt, üst ön ve üst arka konumlara taşır.

2. X ön alt, üst ön ve üst arka kenarları döngüler.

3.  $Z^{-1}$  bu üç kenarı istediğimiz yere geri koyar ve Z tarafından yapılan hasarı onarır.

Böylece  $ZXZ^{-1}=F^2 U R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2 (U^{-1} F^2)=F^2 U R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2 (U^{-1} F^2)=F^2 U R_S U^2 (R_S)^{-1} U F^2$  üst yüzdeki istenen üç kenarı çevirir.

Rubik küpünde gösterimi korurken üç üst köşenin çevrilmesi de bir eşlenik örneği olarak karşımıza çıkmaktadır.  $X=FLF^{-1}$ ,  $Y=R^2$ ,  $Z=F^2$  hamleleri için hem X hem de Y tarafından hareket ettirilen tek küp sağ alt köşedir.  $XYX^{-1}Y^{-1}$  komütatörü üç döngülü bir köşedir. Üst ön arka, ön sağ alt ve ön sol alt köşeleri çevirip çevirmediği kontrol edilebilir. Z son iki köşeyi üst katmana taşımaktadır. Böylece  $Z(XYX^{-1}Y^{-1})Z^{-1}=F^{-1} L F^{-1} R^2 F L^{-1} F^{-1} R^2 F^2$  eşleniği üst katmanda üç köşe döndürür. Bu üç döngü, üst çıkartmaları üstte tuttuğundan üst katmanın yönlendirilmiş olması durumunda kullanışlıdır.

Rubik küpünde eşlenik örneklerini arttırmak mümkündür. X hamlesi  $RUR^{-1}U^{-1}$  şeklinde iki bitişik yüz dönüşünün komütatörü olarak alınırsa X dört köşe küpünü ve üç kenar küpünü etkiler.  $Z^{-1}$  bu hamlelerin hepsini üst katmana koyarsa,  $ZXZ^{-1}$  yalnızca üst katmanı etkiler. Bu tür hareketler üst katmanı yönlendirmek için kullanışlıdır. Örneğin  $Z=F$  ve  $X=RUR^{-1}U^{-1}$  alınırsa  $ZXZ^{-1}=FRUR^{-1}U^{-1}F^{-1}$  iki



üst kenarı çevirir, iki üst köşeyi döndürür ve bazı üst katman küplerine izin verir.  $Z=RU$  ve  $X=R^{-1}URU^{-1}$  ise,  $ZXZ^{-1}=RUR^{-1}URU^2R^{-1}$  üç üst köşeyi döndürür ve bazı üst katman küplerine izin verir.

Rubik küpünde aynı anda tek bir kenarı çevirmek, iki küpü değiştirmek, tek bir köşeyi döndürmek imkansızdır. Küpü söküp rastgele yeniden monte ettiğimizde çözülme olasılığı  $(1/2)(1/2)(1/3)=1/12$  dir. Burada ilk çarpım olan  $1/2$ , tek bir kenarı çevirmeme olasılığı, ikinci çarpan olan  $1/2$  iki küpü değiştiremememe olasılığı ve üçüncü çarpan olan  $1/3$  ise tek bir köşeyi döndürememe olasılığıdır. Rubik küpü çözmek, bazıları için merak olarak başlar zamanla hobiye dönüşür. Stres atıcı bir aktivite olduğundan Rubik küpünü çözmeyi öğrenmek sabır ve güçlü irade yardımıyla olur. Rubik küpü çözmek çok zaman gerektirir. Ancak bu zamanı kısaltmak elimizdedir. Eğer Rubik küpü çözme işini, matematiksel bir probleme dönüştürerek yaparsak uygun algoritmalar yardımıyla sonuca kısa sürede ulaşmış oluruz. Burada önemli olan Rubik küpü uygun algoritmalar yardımıyla çözebilmektir. Bu algoritmalar zamanla pratik kazanıp kas hafızamızı geliştirmeye yardımcı olur. Uygulanan antrenman stratejileri kas hafızamızı güçlendirerek motor ve bellek sistemimizi maksimum verimle kullanmamızı sağlar. Rubik küpü çok hızlı çözmek yerine her adımını anlayarak çözebileceğimiz farklı matematik fikirlerini geliştirmek bu projenin temel amacıdır. Rubik küpü üzerinde gerçekleştirilebilecek hareketler, grup adı verilen matematiksel bir yapı oluşturur. Rubik küpü grup teorisinde iki temel fikir olarak bulunan komütatör ve eşlenik kavramları yardımıyla çözülebilir. Bunun dışında çözüm yöntemleri küpü söküp rastgele karıştırılmış bir konumda yeniden monte etmektir ya da küpte en fazla 20 yüz dönüşü yapmaktır. Bu çalışma yardımıyla, Rubik küp için literatürde var olan algoritmalar ile değil de farklı bir sınıfa ait uygun algoritmalar ile çözülebilmek tekniği geliştirilmiştir. Bilindiği üzere Rubik küp, çoğu kişi için problem çözme becerilerini geliştirmekte, bir problemi birçok küçük parçaya bölmek ve sonra her birine ayrı ayrı odaklanmayı gerektirir. Binlerce bükülme, dönüş ve kombinasyonla Rubik küp minik bir evreni andırır. Bu problemi kurgularken, bir sonraki hareketimizi etkileyen her bölüme ve her bükülmeye odaklanmamız gerekir. Çalışma kapsamında kullanılan genelleştirilmiş permütasyon kavramı ile zihnin diğer yönlerini de geliştirebilecek kalıpları görmeyi başarıp hiper grup kavramında, refleksleri arttırmasından bilgisayarda daha hızlı yazmaya tutunda iyi bir kodlama yapabilmeye kadar saymakla bitmeyen faydası bulunan Rubik küp için genelleştirilmiş permütasyonlar yardımıyla farklı bir algoritma geliştirildi.

## BULGULAR VE TARTIŞMA

### Rubik Küp Hiper Grubu

Rubik Küpün tasarımında kullanılacak tipi  $3 \times 3 \times 3$  boyutlarıdır. Her yüz dokuz yüzden oluşan altı yüz içermektedir. Her birinde orta yüz sabittir ve hareket ettirilemez. Toplamda  $6 \cdot 9 = 54$  yüz vardır. Her yüzey de renklidir ve küpü çözmek için her yüzün bir düz renk olması hedeflenmektedir. Yani, yanın dokuz yüzünün hepsi aynı renkte olmalıdır. Rubik küpünü çözmek için yüzlerin bir dizi dönüşüne ihtiyacı vardır. Rubik Küpün saat yönünde çeyrek dönüş (90 derece) dönüşünü sağlamak adına düz bir yüzeye oturduğunu ve yüzün her dönüşünün bir olacağı varsayılarak aşağıdaki küme elemanlarından birini sağlayan dönüşler için aşağıdaki notasyonlar kullanılmaktadır:

- U yukarı (üst) yüz
- F ön yüz
- L sol yüz
- R sağ yüz
- B arka yüz
- D aşağı (alt) yüz

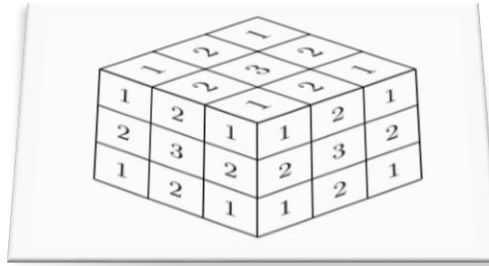


Her hareketin tersi yüzün saat yönünün tersine 90 derecelik dönüşü olsun  $M_i \in \{\{U\}, \{F\}, \{L\}, \{R\}, \{B\}, \{D\}\}$  bir dönüş ise  $M_i^{-1}$  de bu dönüşün tersini simgelemektedir.  $\{\{F\} * \{L\} * \{U\}\}$  kombinasyonu, küpün ön yüzünün 90 derece, ardından sol yüz 90 derece ve son olarak üst yüz 90 derece döndürülmesini sağlamaktadır.  $\{\{F\} * \{L\} * \{U\}\}$ 'nun tersi,  $\{\{U^{-1}\} * \{L^{-1}\} * \{F^{-1}\}\}$  hareketidir.

Rubik Küpünde, düzenlenebilen ve yeniden düzenlenebilen 54 yüzey olduğundan yüzleri çevirmek ve döndürmek için Rubik küpün herhangi bir konumu bir genelleştirilmiş permütasyon olarak tanımlanabilir. Böylece, Rubik Küpü hiper grubu bir genelleştirilmiş permütasyonun 54 mertebeli bir hiper alt grubudur.

**Tanım 1** Rubik küp genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu  $(M_{\theta,*}) = \langle \{F\}, \{L\}, \{U\}, \{D\}, \{R\}, \{B\} \rangle$  biçiminde tanımlanır.

Rubik küp hiper grubunun iki farklı sınıflandırmasının olduğu gözlenmiştir. Bunlar geçerli Rubik küp hiper grubu ve geçersiz Rubik küp hiper grubudur. Arasındaki fark ise geçersiz Rubik küp hiper grubunun çözülmesinde çözücünün küpü parçalara ayırmasına ve yeniden düzenlemesine izin vermesidir. Her iki durumda da çözücünün çıkartmaları her yönden çıkarması mümkün değildir. Ancak geçerli Rubik küp hiper grubu, geçersiz Rubik küp hiper grubunun bir alt kümesidir. Rubik küpün her iki tarafındaki orta yüz sabit olduğundan ve farklı bir şekle permütasyon yapılamadığından küp üzerindeki herhangi bir geçerli genelleştirilmiş permütasyon köşeyi göndererek köşe konumlarına yönler ve kenar konumlarına kenar yönleri belirler. Diğer genelleştirilmiş permütasyonlar Rubik küp üzerinde fiziksel olarak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle,  $(M_{\theta,*})$  yalnızca 54 yüzey için oluşturulan genelleştirilmiş permütasyonların hiper grubunun bir alt kümesidir.



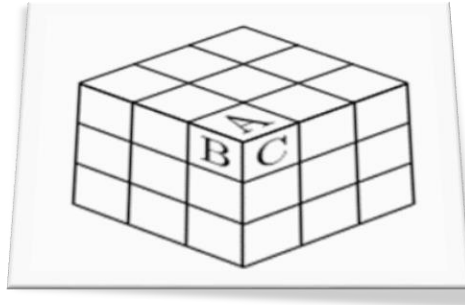
Şekil 7. Rubik küpün farklı yüzey türleri

- 1, köşe küplerini oluşturan yüzleri,
- 2, kenar küplerini oluşturan yüzleri belirtir ve
- 3, sabit merkez küpleri belirtir.

**Köşe Küpleri:** Şekil 8'de gösterildiği gibi, her köşe küpü üç yüzden oluşur.

Şimdi, bir Rubik Küpünde toplam sekiz köşe küpü vardır ve bu her bir yüz köşe küpü, küpün üç farklı tarafında yer alır.

Şekil 8'de gösterildiği gibi, A yüzü üst yüzde, B yüzü sol yüzde ve C yüzü ön yüzdedir. Böylece bir merkez küpün yüzeylerini yeniden yönlendirmek mümkündür: A yüzü, B'nin olduğu konumdadır, B yüzü, C'nin olduğu yere taşınır, C yüzü, B'nin konumuna taşınır; ve A yüzü, C yüzü konumuna taşınır, C yüzü, B'nin konumuna ve B yüzü, A'nın konumuna taşınır. Böylece bir köşe küpün yüzlerinin üç elemanlı bir  $Y$  kümesi üzerindeki  $\beta$  genelleştirilmiş permütasyonu yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş permütasyon hiper gruba ait olduğu anlamına gelir. Ayrıca, sekiz köşe küpü olduğu için, bir köşe küpün herhangi bir yüzünün oryantasyonu  $M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} \times M_{\beta} = M_{\beta}^8$  olarak tanımlanır.



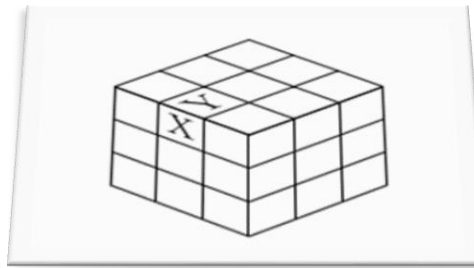
Şekil 8. Köşe küpü oluşturan 3 yüzey

Köşe küplerinin olası düzenlemeleri benzer şekilde tarif edilir. Tekrar, sekiz köşe küpünden herhangi biri, Rubik küpün köşe küp konumlarından herhangi birini kaplar. Rubik Küpünün, köşe küplerinin olası düzenlemeleri yardımıyla 48 elemanlı  $M_{\theta}^8$  genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu tanımlanır.

**Lemma 1.** Rubik Küpü üzerindeki tüm köşe yüzlerinin konumu  $M_{\theta}^8$  genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu tarafından tanımlanabilir.

Kanıt. Kartezyen çarpım elemanlarının tanımından ve herhangi bir köşe küpü konumunun küp üzerindeki konumu ve köşe küpünün üç yönünün döngü yönelimi ile tanımlanabilmesinden açıktır. ■

**Kenar Küpleri:** Rubik Küpündeki her kenar küpü, Şekil 9 'daki gibi iki yönden oluşur. Rubik Küpünde 12 kenar küpü vardır. Her kenar için bir kenar küpü, iki yüzünün her birinde ve küpün farklı yüzlerinde bulunur.



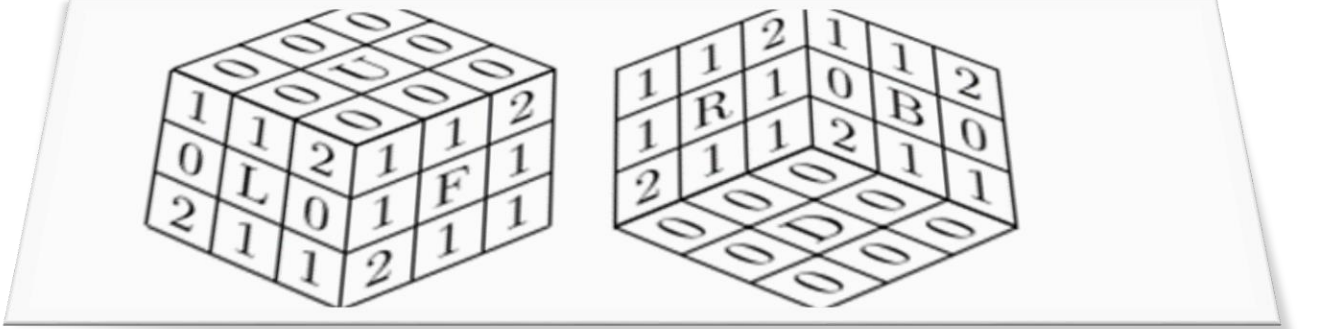
Şekil 9. Bir kenar küpünü oluşturan 2 yön

Şekil 9' da X yönü sol yüzdedir ve Y yönü üst yüzdedir. Aynı şekilde, X ve Y yönlerinin yer değiştirmesi de mümkündür. Yani, X yönü Y yüzeyinin olduğu yere yeniden konumlandırılır ve Y yüzü, X yüzeyin bulunduğu konuma taşınır. Hiper gruplar açısından, herhangi bir kenar küpünün yönleri, iki elemanlı  $X$  kümesi üzerindeki keyfi bir  $\theta$  permütasyonu yardımıyla kurulan genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu olan  $M_{\theta}$  ye aittir. Ek olarak, Rubik Küpünde 12 kenar küpü vardır ve herhangi bir kenar küpü bir kenar küpü noktasını kapsayabilir. Böylece bir kenar küpünün herhangi bir yönü  $M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} \times M_{\theta} = M_{\theta}^{12}$  kümesinde bulunacaktır. Böylece, Rubik Küpünün kenar küplerinin olası düzenlemeleri, 24 elemandan oluşan genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu  $M_{\theta}^{12}$  ile tanımlanır.

**Lemma 2.** Rubik Küpü üzerindeki tüm kenar yüzlerinin konumu  $M_{\theta}^{12}$  genelleştirilmiş permütasyon hiper grubu tarafından tanımlanır.

Kanıt. Kartezyen çarpım elemanlarının tanımından ve herhangi bir kenar küpü konumunun küp üzerindeki konumu ve köşe küpünün iki yönünün döngü yönelimi ile tanımlanmasından açıktır. ■

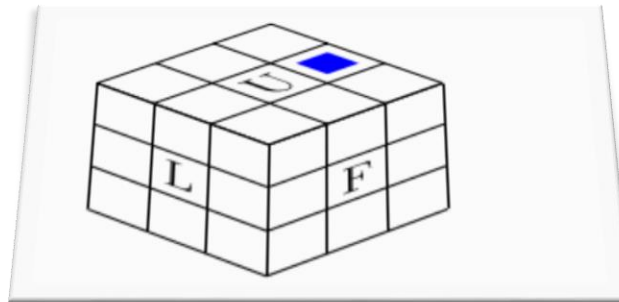
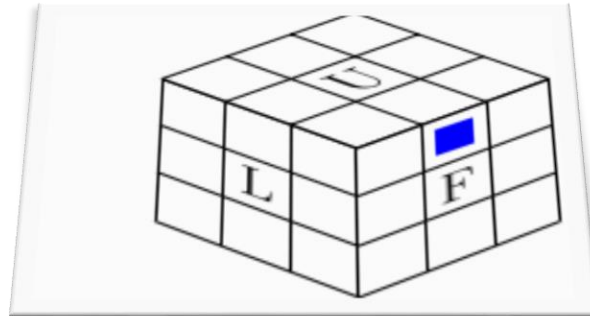
**Rubik Küp Konumu.** Lemma 1'den herhangi bir köşe küpü konumu 8-demet olarak ifade edilebilir ve Lemma 2'den herhangi bir kenar küpü konumu 12-demet olarak ifade edilebilir. Bununla birlikte, demetlerin tek tek bileşenlerini belirlemek için sabit bir numaralandırma sistemine ihtiyaç duyulacaktır.



Şekil 10. Sabit yönlendirme işaretleri

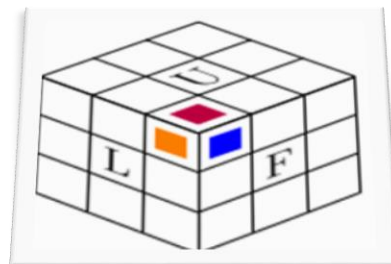
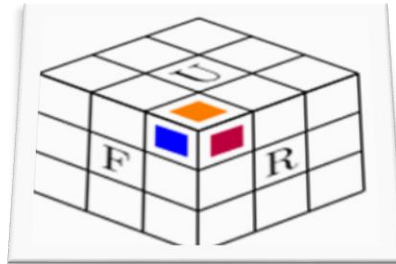
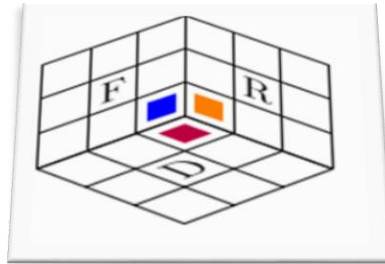
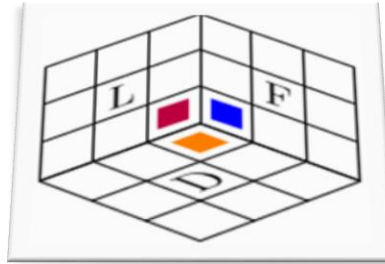
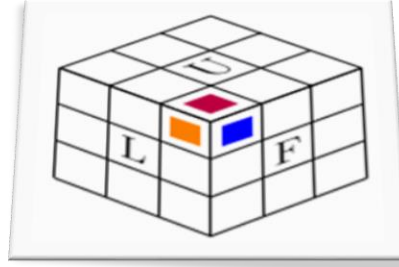
Herhangi bir keyfi yüz için, yüz konumuna yukarıdaki karşılık gelen bir sayı atanır. Yüzler küpün etrafında hareket edecek olsa da, numaralandırma sistemi sabit kalır.

**Örnek 1.** Rubik Küpünün ön yüzündeki üst kenar küpü 1 sayısı ile başlatılırsa  $\{F\} * \{R\}$  hareketini yaparak, Rubik küpün yüzü sağ taraftaki üst yüze taşınır. Kenar küpünün bu konumuna 0 numarası atanır.



Her dönüşte, kenar küpünün yönlendirme numarası aşağıdakilerden biriyle değiştirilir:  
 $\equiv 0 \pmod{2}$  veya  $\equiv 1 \pmod{2}$

## Örnek 2.



$F$  ile komşu olan yüzü takip ederek 1 numara ile başlanır, ardından 2 numara, 1 numara, 2 numara takip edilir ve ardından döngüyü tamamlamak için 1 numaraya geri dönülürse,  $R$  ile komşu olan yüz 0 numaraya başlanıp ardından 1 numaraya, 0 numaraya, 1 numaraya ve ardından 0'a geri dönülürse döngü tamamlanır. Son olarak, turuncu yüz 2 numara ile başlanıp, ardından 0 numara, 2 numara, 0 numara ve ardından 2 numaraya geri döner.  $R, L, F$  veya  $B$  yüzünün her dönüşünde, köşe yüz yönlendirme numarası  $\equiv 1 \pmod{3}$  veya  $\equiv 2 \pmod{3}$  ile değiştirilir.  $U$  veya  $D$  yüzünün her dönüşünde numaralandırma değişmeden kalır ( $\equiv 0 \pmod{3}$ ). Herhangi bir yüz için oryantasyon numarası ile yüzün Rubik Küpü üzerindeki konumu, Şekil 10'de gösterilen sabit numaralandırma ile karşılaştırılır.

**Geçersiz Rubik Küpü Hiper Grubu:** Geçersiz Rubik Küp Hiper grubu, çözücünün küpü parçalara ayırmasına ve herhangi bir yönde yeniden birleştirmesine izin verir. Yine, bazı yönelimleri küp üzerinde fiziksel olarak yapılmasına olanak kılmaz. Yüzlerin tüm olası konumları bir bütün olarak birleştirildiğinde, bazı düzenlemeler küp üzerinde fiziksel olarak mümkün olmaz.

**Lemma 3.** Geçersiz Rubik Küp hiper grubu  $I = M_{\theta}^{12} \times M_{\beta}^8$  'dir.

**Kanıt.** Lemma 1, Lemma 2 kullanılarak doğrudan görülür

### Rubik Küp Hiper Grup Teorisinin Temel Teoremleri

Geçerli ve geçersiz Rubik Küp hiper grubunu ayırt edebilmek için Rubik küp teorisinin Birinci ve İkinci Temel Teoremleri tanımlandı. Böylece Rubik küp teorisinin ilk temel teoremi ile Rubik küpünün çözülebilir düzenlemeleri için kriterler verilerek geçerli olmayan Geçersiz Rubik küp hiper grubunun çözücüler tarafından tasarımı sağlandı.

### Teorem 2. (Rubik Küp Hiper Grup Teorisinin Birinci Temel Teoremi)

$\{v\}, \{r\} \in M_{\beta}^8$  ve  $\{w\}, \{s\} \in M_{\theta}^{12}$  olsun.  $\{(v, r, w, s)\}$  sıralı dörtlüsünden oluşan olası bir Rubik küpteki konumun korunması ancak ve ancak

(1) Genelleştirilmiş polinomlar için  $sgn(\{r\}) = sgn(\{s\})$  eşitliğinin sağlanmasıyla,

(2)  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_8 \equiv 0 \pmod{3}$  olarak tanımlı toplam bükülme sayısının korunmasıyla,

(3)  $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{12} \equiv 0 \pmod{2}$  olarak tanımlı toplam çevirme sayısının korunmasıyla ilişkilidir.

**Kanıt. ( $\Rightarrow$ )**  $\{v\}, \{r\} \in M_{\beta}^8$ ,  $\{w\}, \{s\} \in M_{\theta}^{12}$  ve  $\{h\} \in H$  olsun. Böylece  $h$  Rubik küpte bir harekettir.  $h$ , Rubik küpü çözülmüş durumdan bir duruma  $\{(v, r, w, s)\}$  yardımıyla getirir. Dolayısıyla  $H_i \in \{\{F\}, \{L\}, \{U\}, \{B\}, \{R\}, \{D\}\}$  olmak üzere  $\{h\} = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$  biçiminde belirlenir.

(1) Her hareketle toplam dört kenar küpü ve dört köşe küpü hareket ettirilir; böylece aynı sayıda köşe küpü hareket ettirilir ve aynı sayıda kenar küpleri hareket ettirilir. Her genelleştirilmiş permütasyonun, tek olan ve sahip olduğu sıralı dörtlü olması sebebiyle  $sgn = -1$  dir. Yani her  $h$  için:  $sgn(\{r\}) = \prod_{k=1}^n sgn(H_k) = sgn(\{s\})$  eşitliği sağlanır.

(2)  $H_i, \{U\}$  veya  $\{D\}$  ise, tüm köşe küpleri olduğundan  $\{v\}$ 'nin değişmeden kalır.  $H_i, \{R\}, \{L\}, \{F\}$  veya  $\{B\}$  ise, iki köşe küpü taşınır. Bir köşe küpü  $\{U\}$  yüzünden aşağı doğru hareket ettirilir ve bir köşe küpü  $\{U\}$  yüzüne doğru ilerler. Buradan  $\{v\}$  bileşenlerinin değişimini sırasıyla  $1 \pmod{3}$  veya  $1 \pmod{3}$  formunda değiştirir. Ancak bu, herhangi bir  $\{R\}$  için,  $\{L\}, \{F\}$  veya  $\{B\}$ ,  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_8 \equiv 1 \pmod{3} - 1 \pmod{3} = 0 \pmod{3}$  olur. Böylece  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_8 \equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir.

(3) Her  $\{h\}$  hareketi için toplam dört kenar küpü yeniden yönlendirildiğinden  $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{12} \equiv 0 \pmod{2}$  olduğu açıktır.

( $\Leftarrow$ )  $A = \{(v, r, w, s)\}$  olsun ve  $A$ 'nın (1), (2) ve (3) koşullarını sağladığını kabul edelim. Koşul (1)  $sgn(\{s\}) = sgn(\{r\})$  olduğunu gösterir. Yani birbirine denk olan genelleştirilmiş permütasyonlar vardır. Böylece köşe küplerinin ve kenar küplerinin genelleştirilmiş permütasyonları ya çift ya da tektir.  $sgn(\{s\}) = sgn(\{r\}) = 1$  ise genelleştirilmiş permütasyonlar çifttir. Genelleştirilmiş permütasyonlar tekse, temel hareketlerden birini ( $\{B\}, \{F\}, \{L\}, \{U\}, \{R\}, \{D\}$ ) uygulamak yeterlidir ve yeni konum  $sgn(\{s\}) = sgn(\{r\}) = 1$  eşitliğini karşılar. Bir köşenin 3 döngüsü için hareketi alınır, Örneğin  $H = \{R\} * \{B^{-1}\} * \{R\} * \{F^2\} * \{R^{-1}\} * \{B\} * \{R\} * \{F^2\} * \{R^2\}$  ise,  $H$  hareketi, diğer küplerin konumunu değiştirmeden üst-ön-sol, üst-ön-sağ ve üst-sağ köşe küplerini döndürür. Sol üst küpü  $\{a_1\}$ , sağ ön üst küpü  $\{a_2\}$ , sağ arka üst küpü  $\{a_3\}$  ve kalan köşe küplerini  $\{a_4\}, \{a_5\}, \{a_6\}, \{a_7\}, \{a_8\}$  olarak adlandırılır. Her  $\{a_1\}$  için,  $\{a_4\}, \{a_5\}, \{a_6\}, \{a_7\}, \{a_8\}$ 'den  $\{\{B\}, \{F\}, \{L\}, \{U\}, \{R\}, \{D\}\}$ 'den en fazla iki hamleden (yani  $\{B\}, \{F\}, \{L\}, \{U\}, \{R\}, \{D\}$ 'den ikisi) bir  $\{x\}$  hareketi ile  $\{a_i\}, \{a_1\}$  ve  $\{a_2\}$ 'nin konumunu değiştirmeden  $a_3$  konumuna taşınır.  $\{x\}H\{x^{-1}\}$  dönüşümünü uygulanırsa, bu hareket ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_i\}$ ) sıralı üçlüsünü oluşturur. Bu sıralı,  $\{a_i\}$ 'lerden herhangi biri için elde edilebilir; yani ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$ ), ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}$ ), ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_5\}$ ), ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_6\}$ ), ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_7\}$ ) ve ( $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_8\}$ ) lerin hepsi uygun  $\{x\}$  hareketiyle elde edilebilir. Ancak bu, 18 köşe küpünün tüm eşit genelleştirilmiş permütasyonlarını üretir. Bu nedenle, tüm köşe küplerini kendi konumlarına döndürecek uygun bir  $\{x\}$  hareketi vardır. Şimdi, bir kenar sıralı üçlüsü hareketi oluşturalım.  $H' = \{R^2\} * \{U\} * \{F\} * \{B^{-1}\} * \{R^2\} * \{F^{-1}\} * \{B\} * \{U\} * \{R^2\}$  hareketi yapılırsa  $H'$  hareketi, diğer küplerden herhangi birinin konumunu değiştirmeden üst ön, üst arka ve üst sağ kenar küplerini döndürür. Ön üst küpü  $\{b_1\}$ , arka üst küpü  $\{b_2\}$  ve sağ üst küpü  $\{b_3\}$  olarak adlandırılırsa ve kalan kenar küplerini  $\{b_4\}, \{b_5\}, \{b_6\}, \{b_7\}, \{b_8\}, \{b_9\}, \{b_{10}\}, \{b_{11}\}$  ve  $\{b_{12}\}$  ile adlandırılırsa köşe küplerinde olduğu gibi,  $\{b_4\}, \{b_5\}, \{b_6\}, \{b_7\}, \{b_8\}, \{b_9\}, \{b_{10}\}, \{b_{11}\}$  ve  $\{b_{12}\}$ 'den herhangi bir  $b_i$  için bir  $\{y\}$  hareketi vardır.  $\{\{B\}, \{F\}, \{L\}, \{U\}, \{R\}, \{D\}\}$  en fazla 2 hamle yaparak kenar küpü  $b_i$  konumuna hareket ettirir. Bu durumda  $\{b_3\}, \{b_1\}$  ve  $\{b_2\}$  nin konumunu değiştirmez. Şimdi  $\{y\} * H' * \{y^{-1}\}$  dönüşümünü uygulayalım. Bu dönüşüm ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_i\}$ ) sıralı üçlüsünü oluşturur. Ancak  $\{y\}$  için uygun bir seçim kullanarak, ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_4\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_5\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_6\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_7\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_8\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_9\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_{10}\}$ ), ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_{11}\}$ ) ve ( $\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_{12}\}$ ) sıralıları oluşturulur. Bunlar, kenar küplerinin tüm eşit genelleştirilmiş permütasyonlarını oluşturur. Böylece, tüm kenar küplerini kendi konumlarına döndürecek uygun bir  $\{y\}$  hareketi vardır. Rubik küpün yönlerinin renk eşleşmesi için yeniden yönlendirmektedir. Koşul (2) gereğince toplam dönüşlerin korunması gerekir, böylece saat yönünde dönüşlerin sayısı, saat yönünün tersine dönüşlerin sayısına eşittir. Bu, tam olarak 2 köşe küpünü bükme ve diğer tüm küplerin yönünü ve konumunu koruyan bir hareket olduğu anlamına gelir, yani sağ ön üst köşe küpünü 120 derece döndüren  $H_1 = (\{R^{-1}\} * \{D^2\} * \{R\} * \{B^{-1}\} * \{U^2\} * \{B\})^2$  hareketi ve sol alt küpü -120 derece döndüren bir hareket olduğu anlamına gelir.  $H_1$  hareketinin, herhangi bir 2 köşe küpü için benzer bir sonuç elde etmek üzere değiştirilebileceğinden köşe küplerinin yönlerini eşleştirmeye başlamak için, önce saat yönünde ve saat yönünün tersine çiftleri çözülmüş yönlerine çevrilmelidir. Kalan köşe köşe küpleri  $\sum_{i=1}^8 v_i \equiv 0 \pmod{3}$  'e uyduğundan küp yönelimleri üçlü olarak gerçekleşecektir. Böylece saat yönünde 3 bükülme veya saat yönünün tersine 3 bükülme meydana gelmektedir. Bu 3 küp  $\{c_1\}, \{c_2\}$  ve  $\{c_3\}$  olarak adlandırılırsa kalan köşe küpleri, bir dizi köşe bükme hareketi ile çözülebilir, örneğin  $H_1^* = \{L^{-1}\} * \{D^2\} * \{L\} * \{B\} * \{D^2\} * \{B^{-1}\} * \{U\} * \{B\} * \{D^2\} * \{B^{-1}\} * \{L^{-1}\} * \{D^2\} * \{L\} * \{U^{-1}\}$  veya yeniden yönlendirilmesi gereken kalan köşe küplerinden ikisi için benzer bir hareket uygulanabilir.  $H_1$  kalan köşe küplerinden birini çözmek için  $\{c_1\}$  uygulanır ve diğer köşe küpünü  $\{c_2\}$ 'yi el değmemiş köşe küpünün tersi konumuna yönlendirmek için  $\{c_3\}$  uygulanır. Yani,  $\{c_3\}$ 'ün saat yönünde bir bükülme ile çözülmesi gerekiyorsa  $H_1', \{c_2\}$  'yi



çözülmesi gereken saat yönünün tersine bir bükülme gerektiren tam tersi bir konuma yeniden yönlendirecektir. Kalan iki küp için uygun hareket  $H_1$  ile çözülebilir. Böylece tüm köşe küpleri çözülmüş hale gelmiş olur. Koşul (3) sağlansın. Bu takdirde toplam dönüşlerin korunması sağlanır.  $\sum_{i=1}^{12}\{w_i\} \equiv 0 \pmod{2}$  denkliği yardımıyla çevrilmesi gereken çift sayıda kenar küpü olduğu görülür. Ancak tam olarak 2 kenar küpünü çeviren ve kalan küplerin yönünü ve konumunu koruyan bir hareket bulmak için  $H_2 = \{L\} * \{F\} * \{R^{-1}\} * \{F^{-1}\} * \{L^{-1}\} * \{U^2\} * \{R\} * \{U\} * \{R\} * \{U^{-1}\} * \{R^2\} * \{U^2\} * \{R\}$  hareketi yapılır.  $H_2$  hareketi, 19 konumundan çıkarken ön üst kenar küpünü ve sağ üst kenar küpünü çevirir ve diğer tüm küpler el değmeden yönlendirilir.  $H_2$  hareketi uygun şekilde değiştirilebilir, böylece herhangi bir 2 kenar küpü çevrilebilir ve diğer tüm küplerin konumu ve yönü korunur. Çift sayıda kenar küpü olduğundan, tüm kenar küpleri çözülmüş yönelimlerine geri dönebilir. Böylece  $A$ , Rubik Küpü üzerinde çözülebilir bir konuma gelmiş ve  $(\{v\}, \{r\}, \{w\}, \{s\})$  Rubik küpünün olası bir düzenlemesi haline gelmiş olur

Rubik Küp Teorisinin İkinci Temel Teoremi, Rubik küpü üzerindeki geçerli hareketlerin kriterlerini verir.

**Teorem 3. (Rubik Küp Hiper Grup Teorisinin İkinci Temel Teoremi)** Rubik küpün bir işleminin mümkün olması ancak ve ancak aşağıdaki üç ifadenin sağlanmasıyla ilişkilidir:

(1) Çift uzunluktaki toplam kenar ve köşe döngüsü sayısı çifttir.

(2) Sağa bükülmüş köşe döngülerinin sayısı, sola bükülmüş köşe döngülerinin sayısına  $\pmod{3}$ 'e göre eşittir.

(3) Çift sayıda yeniden yönlendirme kenar döngüsü vardır.

**Kanıt.**  $(\Rightarrow) \{v\}, \{r\} \in M_{\theta}^8, \{w\}, \{s\} \in M_{\theta}^{12}$  olmak üzere küpü çözülmüş durumdan  $h = (\{v\}, \{s\}, \{w\}, \{r\})$  konumuna götüren küp üzerinde bir işlem tanımlayalım. Teorem 2' nin (1) 'ine göre,  $sgn(\{r\}) = sgn(\{s\})$  dir. Ancak bu durumda genelleştirilmiş permütasyonun çift olduğu anlamına gelir. Böylece kenar ve köşe döngülerinin uzunluğu çifttir.

(2) Herhangi bir  $H$  hareketi için köşe küpleri sağa, sola veya hiç hareket ettirilmez. Böylece döngü,  $v_i$  toplamını sırasıyla 2, 1 veya 0  $\pmod{3}$  olarak değiştirir. Teorem 2'ye göre,  $\sum_{i=1}^8 v_i \equiv 0 \pmod{3}$  sağ dönüş sayısı, sol dönüş sayısına eşittir.

(3) Bir kenar döngüsünün yalnızca tek bir sayı ile değiştirilirse yeniden yönlendirilmelidir. Yani,  $j = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  için  $w_j = 1$  dir. Teorem 2'ye göre,  $\sum_{j=1}^{12} w_j = 0$  dir. Ancak bu durumda, bir kenar döngüsü yeniden yönlendiriliyorsa, toplam sıfır olduğu için başka bir kenar döngüsünün yeniden yönlendirilmesi gerektiği anlamına gelir. Bu nedenle, çift sayıda yeniden yönlendirme kenar döngüsü olmalıdır.

$(\Leftarrow)$  (1), (2) ve (3) 'ün sağlandığını varsayalım. Teorem 2'ye göre, Rubik küpü çözülmüş durumdan  $\{h\}$  durumuna götüren  $H$  hareketi vardır. Ayrıca  $H^{-1}$  hareketi de vardır. Bu hareket yardımıyla Rubik küp  $\{h\}$  durumundan çözülmüş duruma gelir.  $H$  ve  $H^{-1}$  ın (1), (2) ve (3) 'ü karşıladığı kabul edilirse  $H$  ve  $H^{-1}$  'in her ikisi de Rubik Küpü üzerinde geçerli işlemler haline gelir. Bu da istenendir.

## SONUÇ

Hiper gruplar teorisinin uygulama alanı bulduğu bu çalışma Tübitak 2209-A Üniversite Öğrenciler Araştırma Projeleri Destekleme Programı çerçevesinde 1919B012105753 proje numarası ile desteklenmiştir. Çalışma kapsamında “Joyner, D. 2009. Adventures in Group Theory: Rubik’s Cube, Merlin’s Machine, and other Mathematical Toys. John Hopkins University Press, Second Edition, ISBN-13 978-0801890130” kaynak kitabından Rubik küp çözümlemesinde kullanılacak yöntemin geliştirilmesi sağlanarak grup teorisinde literatürde mevcut olan yöntemler, hiper grup teorisinde

çalışmada geçen yöntem yardımıyla Rubik küpe taşınarak ve çözüm algoritması elde edilmiştir. Bu çalışmanın devamında geçerli Rubik küp hiper gruplarının uygulamaları üzerinde çalışılabilir veya problem  $4 \times 4 \times 4$  ve  $5 \times 5 \times 5$  Rubik küplerinde de irdelenebilir.

### Teşekkür

Bu çalışma, Tübitak 2209-A Üniversite Öğrenciler Araştırma Projeleri Destekleme Programı çerçevesinde 1919B012105753 proje numarası ile desteklenmiştir. Çalışmanın geliştirilmesine fırsat veren TÜBİTAK 'a ve makalenin detaylı biçimde incelenmesinde katkı sunan hakemlere teşekkürlerimizi sunarız.

### Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

### Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

### KAYNAKLAR

- Ameri, R. (2003), On categories of hypergroups and hypermodules, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 6:2-3, 121-132.
- Baker, M., Bowler, N. (1991), *Matroids over hyperfields*. arxiv 2017, arXiv:1601.01204. adresinden alındı.
- Barlotti, A., Strambach, K. (1971), Multigroups and the foundations of Geometry. *Rend. Circ. Mat. Palermo XL*, 5–68.
- Bourbaki, N. (1971). *Éléments De Mathématique, Algèbre; Hermann: Paris, France*.
- Brandelow, C. (1982), *Inside the Rubik's Cube and Beyond*. Birkhäuser, 12, 17, 19, 23.
- Chvalina, J., Chvalinova, L. (1996), State Hypergroups Of Automata. *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav.* 4, 105–120.
- Chvalina, J., Křehlik, S., Novak, M. (2016), Cartesian Composition And The Problem Of Generalizing The Mac Condition To Quasimultiautomata. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 24, 79–100.
- Chvalina, J., Novak, M., Křehlik, S. (2019), Hyperstructure Generalizations Of Quasi-Automata Induced By Modelling Functions And Signal Processing. *Aip Conf. Proc.*, 2116, 310006.
- Chvalina, J., Novak, M., Smetana, B., Stan'ek, D. (2021). Sequences Of Groups, Hypergroups And Automata Of Linear Ordinary Differential Operators. *Mathematics*, 9, 319.
- Chrorani, M., Zahedi, M. M. (2012), Some Hypergroups Induced By Tree Automata. *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, 6, 680–692.
- Chrorani, M. (2018), State Hyperstructures Of Tree Automata Based On Lattice-Valued Logic. *Rairo Theor. Inf. Appl.*, 52, 23–42.
- Connes, A., Consani, C. (2011), The Hyperring Of Adèle Classes. *J. Number Theory*, 131, 159–194.
- Connes, A., Consani, C. (2010), *From Monoids To Hyperstructures: In Search Of An Absolute Arithmetic*. Arxiv 2010, Arxiv:1006.4810. Adresinden Alındı.
- Corsini, P. (1993), *Prolegomena Of Hypergroup Theory*, 2nd Ed. Tricesimo Italy, Aviani Editore Italy.
- Corsini, P., Leoreanu, V. (2003), *Applications Of Hyperstructures Theory*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands.
- Daniels, L. (2014), *Group Theory And The Rubik's Cube, A Project Submitted To The Department Of Mathematical Sciences In Conformity With The Requirements For Math 4301*, Lakehead University Thunder Bay, Ontario, Canada.

- Demaine, E.D., Demain, M. L, Eisenstat, S., Lubiw, A., Winslow, A. (2011), Algorithms For Solving Rubik's Cubes. *Lecture Notes In Computer Science*, 6942, 689-700, 1.
- Dramalidis, A. (2011), On Geometrical Hyperstructures Of Finite Order. *Ratio Math.*, 21, 43–58.
- Dresher, M., Ore, O. (1938), Theory Of Multigroups. *Am. J. Math.*, 1938, 60, 705–733.
- Dummit, D. S., Foote, R. M. (1999), *Abstract Algebra*. Prentice Hall., 9.
- Eaton, E.J., Ore, O. (1940), Remarks On Multigroups. *Am. J. Math.* 62, 67–71.
- Eaton, E.J. (1940), Associative Multiplicative Systems. *Am. J. Math.* 62, 222–232.
- Freni, D. (1985), Sur Les Hypergroupes Cambistes. *Rend. Ist. Lomb.*, 119, 175–186.
- Freni, D. (1986), Sur La Théorie De La Dimension Dans Les Hypergroupes. *Acta Univ. Carol. Math. Phys.* 27, 67–80.
- Freni, D. (2004), Strongly Transitive Geometric Spaces: Applications To Hypergroups And Semigroups Theory. *Commun. Algebra*, 32, 969–988.
- Gallian, J.A. (2010), *Contemporary Abstract Algebra*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 3, 4, 9.
- Gionfriddo, M. (1978), Hypergroups Associated With Multihomomorphisms Between Generalised Graphs. *Convegno Su: Sistemi Binari E Loro Appl., Taormina (Me)*, 161-174.
- Griffiths, L.W. (1938), On Hypergroups, Multigroups, And Product Systems. *Am. J. Math.* 60, 345–354.
- Hoskova-Mayerova, S., Maturo, A. (2018), Algebraic Hyperstructures And Social Relations. *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 39, 701–709.
- Hoskova-Mayerova, S., Maturo, A. (2015). A. An Analysis Of Social Relations And Social Group Behaviors With Fuzzy Sets And Hyperstructures. *Int. J. Algebraic Hyperstruct. Appl.*, 2, 91–99.
- Hoskova-Mayerova, S., Maturo, A. (2013). Hyperstructures In Social Sciences. *Awer Procedia Inf. Technol. Comput. Sci.*, 3, 547–552.
- Jantosciak, J. (1985), *Classical Geometries As Hypergroups*. In Proceedings Of The Atti Del Convegno Su Ipergruppi Altre Structure Multivoche Et Loro Applicazioni, Udine, Italy, 15–18, 93–104.
- Jantosciak, J. (1994). A Brief Survey Of The Theory Of Join Spaces. In Proceedings Of The 5th Intern. Congress On Algebraic Hyperstructures And Applications, Iasi, Romania, 4–10 July 1993; Hadronic Press: Palm Harbor, Fl, Usa, 109–122.
- Joyner, D. (2009), *Adventures In Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, And Other Mathematical Toys*. John Hopkins University Press, Second Edition, Isbn-13 978-0801890130.
- Jun, J. (2017), *Geometry Of Hyperfields*. Arxiv:1707.09348 Adresinden Alındı.
- Kacprzyk, M. (2018), Eds, J., Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2018, 103–111.
- Kottwitz, S. (2008), *Example: Sudoku 3d Cube*. *Tex Example.Net*, <http://www.texample.net/Tikz/Examples/Sudoku-3d-Cube/> 13, 14, 15, 23 Adresinden Alındı.
- Krasner, M. (1937), Sur La Primitivité Des Corps B-Adiques. *Mathematica*, 13, 72–191.
- Krasner, M. (1940), La Loi De Jordan—Holder Dans Les Hypergroupes Et Les Suites Generatrices Des Corps De Nombres P—Adiques, (I). *Duke Math. J.* 6, 120–140, (Ii) *Duke Math. J.*, 7, 121–135.
- Krasner, M. (1941), La Caractérisation Des Hypergroupes De Classes Et Le Problème De Schreier Dans Ces Hypergroupes. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 212, 948–950.
- Krasner, M. (1944), Hypergroupes Moduliformes Et Extramoduliformes. *Acad. Sci. (Paris)*, 219, 473–476.
- Krasner, M., Kuntzmann, J. (1947), Remarques Sur Les Hypergroupes. *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 224, 525–527.
- Krasner, M. (1957), Approximation Des Corps Valués Complets De Caractéristique  $P \neq 0$  Par Ceux De Caractéristique 0, Colloque D' Algèbre Supérieure (Bruxelles, Decembre 1956), Centre Belge De

- Recherches Mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain, Librairie Gauthier-Villars, Paris., 129–206.
- Krehlik, S. (2020), N-Ary Cartesian Composition Of Multiautomata With Internal Link For Autonomous Control Of Lane Shifting. *Mathematics*, 8, 835.
- Kuntzmann, J. (1937), Opérations Multiformes. Hypergroupes. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 204, 1787–1788.
- Kuntzmann, J. (1937), Homomorphie Entre Systèmes Multiformes. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 205, 208–210.
- Lorscheid, O. (2019), Tropical Geometry Over The Tropical Hyperfield. Arxiv:1907.01037 Adresinden Alındı.
- Marty, F. (1934), Sur Une Généralisation De La Notion De Groupe. Huitième Congrès Des *Mathématiciens Scand.* Stockholm, 45–49.
- Marty, F. (1935), Rôle De La Notion De Hypergroupe Dans L' Étude De Groupes Non Abéliens. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 201, 636–638.
- Marty, F. (1936), Sur Les Groupes Et Hypergroupes Attachés À Une Fraction Rationnelle. *Ann. L' Ecole Norm.* 1936, 3, 83–123.
- Massouros, C.G. (1989), Hypergroups And Convexity. *Riv. Mat. Pura Appl.*, 4, 7–26.
- Massouros, C.G. (1996), Hypergroups And Geometry. *Mem. Acad. Romana Math. Spec.*, Issue Xix, 185–191.
- Massouros, C. G. (2015), On Connections Between Vector Spaces And Hypercompositional Structures. *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 34, 133–150.
- Massouros, C.G., Mittas, J. (1990), *Languages—Automata And Hypercompositional Structures*. In Proceedings Of The 5th Intern. Congress On Algebraic Hyperstructures And Applications, Xanthi, Greece, 27–30 June 1990; World Scientific: Singapore, 199, 137–147.
- Massouros, C.G. (1993), *Automata, Languages And Hypercompositional Structures*. Ph.D. Thesis, National Technical University Of Athens, Athens, Greece, 1993.
- Massouros, C.G. (1994), Automata And Hypermoduloids. In Proceedings Of The 5th Intern. Congress On Algebraic Hyperstructures And Applications, Iasi, Romania, 4–10 July 1993; Hadronic Press: Palm Harbor, Fa, Usa, 1994, 251–265.
- Massouros, C.G. (1994), *An Automaton During Its Operation*. In Proceedings Of The 5th Internation Congress On Algebraic Hyperstructures And Applications, Iasi, Romania, 4–10 July 1993; Hadronic Press: Palm Harbor, Fa, Usa, 1994; Pp. 267–276.
- Massouros, C.G. (2003), On The Attached Hypergroups Of The Order Of An Automaton. *J. Discrete Math. Sci. Cryptogr.*, 6, 207–215.
- Massouros, G.G (1994), Hypercompositional Structures In The Theory Of Languages And Automata. *An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Inform.*, Iii, 65–73.
- Massouros, G.G. (2021), Hypercompositional Structures From The Computer Theory. *Ratio Math.*, 1999, 13, 37–42.
- Massouros, C.G., Massouros, G.G. (2009), Hypergroups Associated With Graphs And Automata. *Aip Conf. Proc.*, 1168, 164–167.
- Massouros, C.G. (2016), On Path Hypercompositions In Graphs And Automata. *Matec Web Conf.* 41, 5003.
- Massouros, G.G. (2020), Hypercompositional Algebra, Computer Science And Geometry. *Mathematics* 8, 1338.
- Massouros, C.G. (1988), Free And Cyclic Hypermodules. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 150, 153–166.

- Maturo, A., Hoskova-Maayerova, S., Soitu, D.T., Kacprzyk, J. (2017), *Eds.; Studies In Systems, Decision And Control 66*; Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2017, 211–221.
- Mittas, J. (1975), Espaces Vectoriels Sur Un Hypercorps. Introduction Des Hyperspaces Affines Et Euclidiens. *Math. Balk.*, 5, 199–211.
- Mittas, J., Massouros, C.G. (1989), Hypergroups Defined From Linear Spaces. *Bull. Greek Math. Soc.*, 30, 63–78.
- Novak, M., Krehlik, S., Stanek (2019), D. N-Ary Cartesian Composition Of Automata. *Soft Comput.*, 24, 1837–1849.
- Novak, M. (2008), Some Remarks On Constructions Of Strongly Connected Multiautomata With The Input Semihypergroup Being A Centralizer Of Certain Transformation Operators., *J. Appl. Math.*, 2008, I, 65–72.
- Ore, O. (1937), Structures And Group Theory, I. *Duke Math. J.*, 3, 149–174.
- Prenowitz, W. (1943), Projective Geometries As Multigroups. *Am. J. Math.*, 65, 235–256.
- Prenowitz, W. (1946), Descriptive Geometries As Multigroups. *Trans. Am. Math. Soc.*, 59, 333–380.
- Prenowitz, W. (1950), Spherical Geometries And Mutigroups. *Can. J. Math.*, 2, 100–119.
- Prenowitz, W. (1961), A Contemporary Approach To Classical Geometry. *Am. Math. Month.*, 68, 1–67.
- Prenowitz, W., Jantosciak, J. (1972), Geometries And Join Spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 257, 100–128.
- Prenowitz, W., Jantosciak, J. (1979), *Join Geometries. A Theory Of Convex Sets And Linear Geometry*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany.
- Reynolds, T. (2014), World Cube Association Official Results. World Cube Organization. <https://www.worldcubeassociation.org/results/regions.php> 1 Adresinden Alındı.
- Rokicki, T. (2010), Twenty-Two Moves Suffice For Rubik's Cube. *Math Intelligencer*. 32, No. 1, 33-40. 1.
- Rokicki, T., Kociemba, H., Davidson, M., Dethridge, J. (2013), The Diameter Of The Rubik's Cube Is Twenty. *Siam J. Discrete Math*, 27, No. 2 , 1082-1105. 1.
- Vahedi, V., Jafarpour, M., Aghabozorgi, H., Cristea, I. (2019), Extension Of Elliptic Curves On Krasner Hyperfields. *Comm. Algebra* , 47, 4806–4823.
- Vahedi, V., Jafarpour, M., Cristea, I. (2019), Hyperhomographies On Krasner Hyperfields. *Symmetry*, 11, 1442.
- Vahedi, V., Jafarpour, M., Hoskova-Mayerova, S., Aghabozorgi, H., Leoreanu-Fotea, V., Bekesiene, S. (2020), Derived Hyperstructures From Hyperconics. *Mathematics*, 8, 429.
- Viro, O. (2010), Hyperfields For Tropical Geometry I. *Hyperfields And Dequantization*. Arxiv:1006.3034.
- Viro, O. (2011), On Basic Concepts Of Tropical Geometry. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 273, 252–282.
- Vougiouklis, T. (1992), Representations Of Hypergroups By Generalized Permutations, *Algebra Universalis*, 29, 172-183.
- Wall, H.S. (1937), Hypergroups. *Am. J. Math.*, 59, 77–98.