

Farklı çatlak boyuna sahip plakada gerilme yoğunluğunun nümerik ve sonlu elemanlar yöntemi ile analizi

Tamer ÖZBEN*, Vedat Gürkan ARSLAN

Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, 21280 Diyarbakır, Türkiye

Özet

Gerilme şiddeti faktörü çatlak ucu yakınındaki gerilme alanı düzenleyen temel bir büyüklüktür. Gerilme şiddet faktörü de geometrik konfigürasyon ve cismin yükleme koşullarına bağlıdır. Farklı yöntemler kullanılarak bir dizi gerilme şiddeti faktörleri tespit edilmiştir. Bu yöntemler; teorik (Westergaard yarı ters yöntem ve karmaşık potansiyelleri yöntemi) sayısal (Green fonksiyonu, ağırlık fonksiyonları, sınır kollokasyon, yöntem alternatif dönüşümleri, integral, sürekli çukuk ve sonlu elemanlar yöntemleri) ve deney (fotoğraf esneklik, kostiklere ve bu yöntemlerin kombinasyonları) olarak sınıflandırılabilir. Bir eliptik çatlağın yakınındaki bir noktada oluşan gerilme alanı; açılma modu, düzlem içi kayma modu, düzlem dışı kayma modu olarak incelenmektedir. Bu faktörlerin koordine değişken bağımsızdır. Bu çalışmanın amacı tek kenarında çatlak bulunan dikdörtgen plakanın teorik hesaplamalar ve sonlu elemanlar metodunu kullanarak gerilme yoğunluğu faktörünü (K_I) incelemektir. Farklı çatlak boyu ($a=1.00, 1.25$ ve 1.5 mm) ve farklı açılar gerilme yoğunluğu elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca için gerilme ($\sigma_x=50, 75$ ve 100 MPa) altında plakanın gerilme yoğunluğu faktörü her iki yöntem ile elde edilmiştir. Söz konusu yükleme şartlarında, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ve von-Mises gerilmeleri için plaka yüzeyinde ve çatlak civarında meydana gelen gerilme alan dağılımı grafikleri gösterilmiştir. Ampirik sonuçları, özellikle Gross tarafından geliştirilen formülasyon sonuçlarının ve Ansys kullanılarak elde edilen (K_I) sonuçlarıyla oldukça yakın değerler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Gerilme yoğunluğu faktörü, çatlak boyu, sonlu elemanlar yöntemi*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Tamer Özben. tamoz@dicle.edu.tr, Tel: 0 (412) 248 80 30

Prediction on K_I for different crack length and inclined in single edge crack plate theoretical and fem

Extended abstract

The stress intensity factor is a fundamental quantity that governs the stress field near the crack tip. The stress intensity factor depends on both the geometrical configuration and the loading conditions of the body. A number of methods have been used for the determination of stress intensity factors. They may be classified as theoretical (Westergaard semi-inverse method and method of complex potentials); numerical (Green's function, weight functions, boundary collocation, alternating method, integral transforms, continuous dislocations and finite elements methods), and experimental (photo elasticity, caustics, and combinations of these methods). The stress field in the neighborhood of a point of the border of an elliptical crack is a combination of the opening-mode, sliding-mode and tearing-mode, as for a through crack in a plate, and it is governed by the values of the corresponding stress intensity factors, K_I , K_{II} and K_{III} . These factors are independent of the coordinate variables and depend only on the position of the point at the crack front, the nature of loading and the crack geometry. Irwin presented a simplified model for the determination of the plastic zone attending the crack tip under small-scale yielding. He focused attention only on the extent along the crack axis and not on the shape of the plastic zone, for an elastic-perfectly plastic material.

The universal availability of powerful, effective computational capabilities, usually based on the finite element method, has altered the use of and

the need for stress concentration factors. Often a computational stress analysis of a mechanical device, including highly stressed regions, is shown, and the explicit use of stress concentration factors is avoided. Alternatively, a computational analysis can provide the stress concentration factor, which is then available for traditional design studies. The elastic stress distribution of the case of an elliptical hole in an infinite-width thin element in uniaxial tension has been determined. At the edge of the elliptical hole, the sum of the stress components, σ_x and σ_y , is given by the other investigators. Photo elastic tests of tension members with a transverse slit connecting two small holes are in reasonable agreement with the foregoing, take into consideration the accuracy limits of the photo elastic test. The "equivalent ellipse" concept is useful for the ovaloid and other openings such as two holes connected by a slit. A shape is enveloped by an ellipse (same major axis a and minor radius r) the K_I values for the shape and equivalent ellipse may be nearly same. Aim of this study is to investigate, stress intensity factor (K_I) by using fem and theoretical formulations of rectangular plate with single edge crack. (K_I) was obtained for different crack length (a) and crack angle (θ), and results are compared. In addition, contour plot of stress field distribution was obtained for different normal stress ($\sigma_y = 50, 75$ and 100 MPa), at single edge crack plate. σ_x , σ_y , τ_{xy} and von-Mises stress field distribution was investigated contour plot for different crack length $a = 1.00, 1.25$ and 1.5 mm. By using empirical formulations and Ansys solutions were compared K_I results, and among these Gross's solution is considered to be best with finite element method (FEM) solution.

Keywords: Stress intensity factor, inclined crack, finite element method.

Giriş

İlk defa 1920 lerde (Griffth and Irwin, 1920) tarafından lineer elastik kırılma mekaniği araştırmaları kırılma teorisi, uygulama ve ampirik formüllerin geliştirilmesine öncülük etmiştir. Daha sonra geliştirilen ileri sonlu elemanlar tekniği ile çatlak ilerlemesi doğru biçimde modellenenmiştir (Dirikolu vd., 2000) (Madenci vd., 2006) çatlak büyümesini Ansys sonlu eleman kodlarını kullanarak gerçekleştirilmiş, ancak özel bazı geometriler için sınırlı uygulamaya sahip olduğunu ileri sürmüştür. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak yapılan ve tüm numunelere uygulanı araştırmada monoklinik malzemelerin kırılma tokluğu incelenmiştir (Nakasono vd., 2006). (Bouiadjra vd., 2008) farklı malzemeler için ana çatlak bölgelerini incelemiş, bu bölgedeki plastik alanların iki bölgede incelemişlerdir. Neural network model kullanarak malzemelerin kırılma tokluğunu öngörmüşlerdir. FEM kullanılarak uzama enerji kriterine göre hesaplanan değerler ile deneysel sonuçlar kullanılarak elde edilen sonuçlar arasında % 2-4 arasında bir farkın oluştuğunu ileri sürmüşlerdir

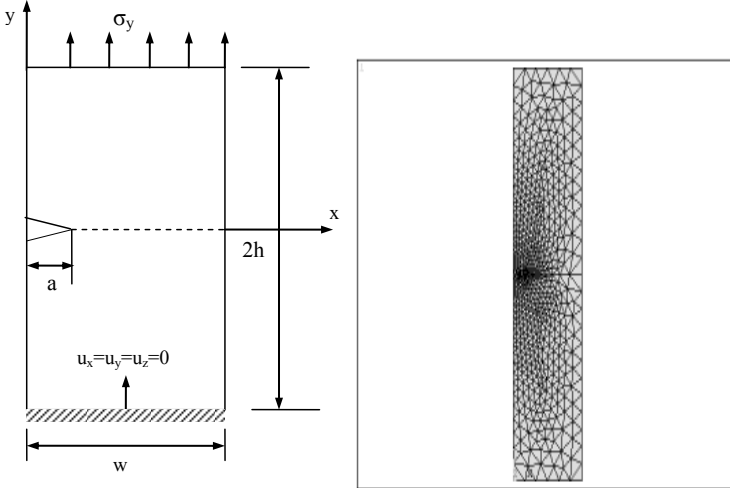
(Nikbakht vd., 2008). Karmaşık çatlak problemlerinin çözümünde geçerli ve etkili bir yöntem kullandığı ve deneysel sonuçlarla uygun sonuçlar elde ettiğini bildirmiştir (Pilkey vd., 2008). (Sun vd., 1998) çatlak ucu elamanlarıyla süreksizlik metodu kullanarak sonsuz ve sonlu elastik plak gerilme yoğunluğu faktörü analizini birçok karmaşık çatlaklar için gerçekleştirmiştir.

Analitik çözüm

Kritik gerilme yoğunluğu faktörü büyük oranda çatlak boyuna, yükleme miktarına ve sınır şartlarına bağlıdır. Elastik malzemedan elde edilen sonlu bir plaka kırılma tokluğun hesaplanmasında kullanılan plaka, uygulanan gerilme (σ_y) ve çatlak boyu (a) Şekil 1 de gösterilmiştir. Analitik çözüm, lineer elastik kırılma mekaniği kriterine göre gerçekleştirilmiştir. Tek kenarında (a) uzunluğunda çatlak bulunan sonsuz plakadaki gerilme yoğunluğu faktörü için;

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

yazılır.



Şekil1. Tek kenarında çatlak bulunan plakanın boyutları, sınır şartları ve sonlu eleman modeli.

İki boyutlu sistemde çatlak ucu etrafında meydana gelen gerilmeler aşağıdaki gibi belirlenir [10];

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2.\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2.\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2.\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (2)$$

Gerilme yoğunluğu faktörü gerilme, çatlak boyu ve çatlak geometrisini bir fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi.a} f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (3)$$

Burada, (σ) uygulanan gerilme, a çatlak uzunluğu, $f\left(\frac{a}{w}\right)$ ise çatlak boyutlarına bağlı bir geometrik bir faktördür. Bu geometriye sahip çatlak içeren bir plakayı gerilme yoğunluğu faktörünün hesaplanması için (Gross vd., 1934) tarafından sırasıyla, aşağıdaki eşitlikler geliştirilmiştir;

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = 1.122 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.550\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.710\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.382\left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (4)$$

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = 0.265\left(1 - \frac{a}{w}\right)^4 + \frac{0.857 + 0.265 \frac{a}{w}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Sonlu elemanlar metodunun (sem) probleme uygulanması ve sonuçlar

Dikdörtgen plakanın SEM analizi [Yan 2006, Zhang 2009] toplam 1844 düğüm ve 1348 eleman kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Tek kenarında çatlak bulunan plaka düzlem genleme şartlarına göre gerilme yoğunluğu faktörü analizi hesaplanmıştır. Bilgisayar modellemesinde çatlak ucunda dairesel alan oluşturulmuş Triangle 6node 2 (PLANE42) eleman tipinde plaka sonlu elemanlara bölünmüştür. Dikdörtgen plaka üst kenarından çekme yüküne maruz bırakılırken, alt kenarından ankastre olarak mesnetleşmiştir. Modellemede plaka çelik malzeme olarak kabul edilmiş ve elastiklik modülü; $E=200$ GPa, Poission oranı; $\nu=0.32$ olarak kabul edilmiştir. Plakanın boyu $2h=40$ mm, genişliği ise $w=10$ mm olarak seçilmiştir. Bir kenarında bulunan çatlak boyu için ise $a=1.0, 1.25$ ve 1.50 mm seçilmiştir.

Plakanın gerilme yoğunluğu faktörü (K_I), farklı çatlak boyu ve yüklemeler ($\sigma_y= 50, 75$ and 100 MPa) için ampirik formüller ve sonlu eleman analizi kullanılarak sonuçlar hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır.

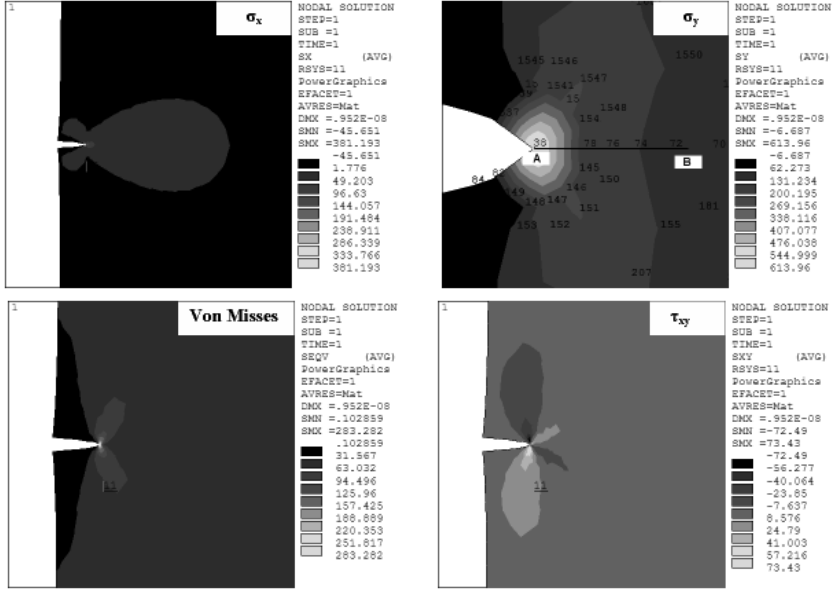
Şekil 2 de çatlak boyu $a=1$ mm ve $\sigma_y=50$ MPa yükleme durumu için σ_x, σ_y gerilme bileşenleri, kayma gerilmesi (τ_{xy}) ve von Mises kriterine göre plaka yüzeyindeki gerilme dağılımları gösterilmiştir. Beklenildiği gibi çatlak ucunda maksimum gerilme değeri y -yönünde ve 613.960 MPa olarak elde edilmiştir.

Şekil 3 te çatlak ucundan (A noktası) plaka yüzeyindeki (B noktası) arasında gerilmenin en yüksek olduğu bant aralığında σ_x ve σ_y gerilme bileşenleri değişim eğrisi gösterilmiştir. Gerilme bileşenlerinin her ikisinde de çatlak

Farklı çatlak boyuna sahip plakada gerilme yoğunluğunun analizi

ucundan uzaklaştıkça gerilme değeri azalmaktadır. Değişim her iki bileşende de paralel olarak gözlemlenmiştir. Çatlak boyu 1.25 mm ve $\sigma_y=75$ MPa değerinde bir yüklemeye sonucunda gerilme bileşenlerinin ve von Mises kriterine göre gerilme değeri ve plaka

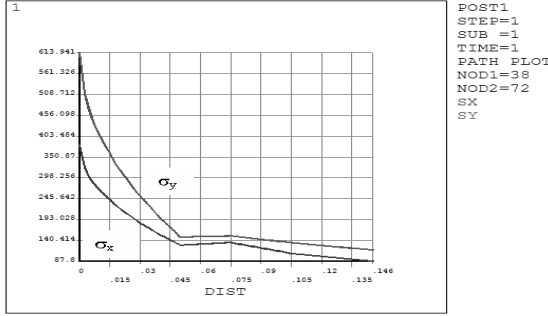
yüzeyindeki gerilme alanı dağılımı gösterilmiştir (Şekil 4). Çatlak boyu %25, uygulanan gerilme %50 artırıldığında tüm gerilme bileşenlerinde meydana gelen artış yaklaşık %73 olarak gerçekleşmiştir.



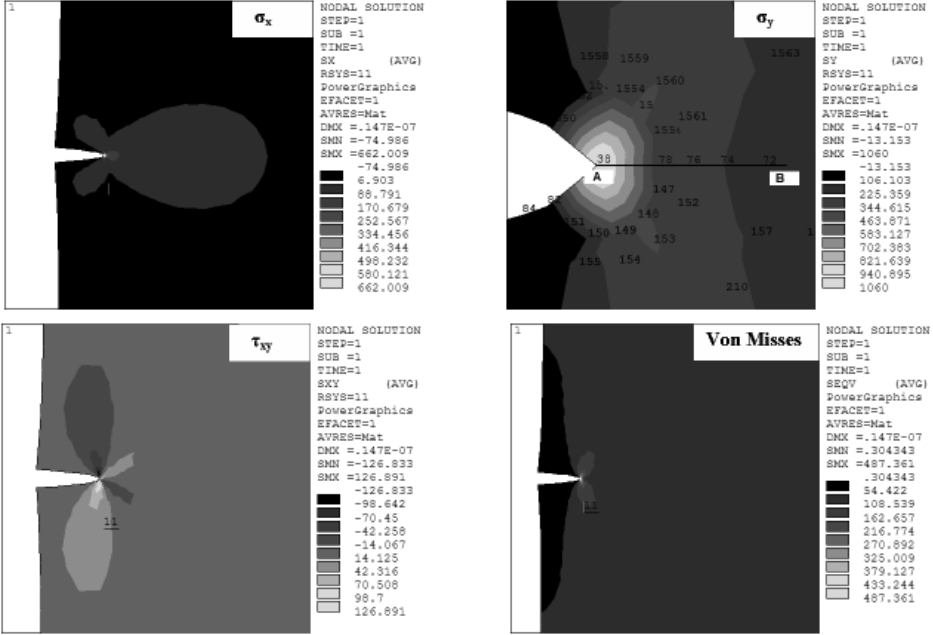
Şekil 2. $a=1$ mm ve y - ekseninde yüklemeye durumunda ($\sigma_y=50$ MPa) normal, kayma ve von Mises gerilme dağılımı.

Plaka yüzeyinde meydana gelen gerilme alanı dağılımında ise önemli bir değişim gözlemlenmemiştir.

Şekil 5 de gerilme bileşenlerinin çatlak ucundan itibaren plaka yüzeyinde bulunan herhangi bir noktaya kadar değişimi gösterilmiştir. Beklenildiği gibi çatlak ucundan uzaklaştıkça, her iki gerilme bileşeninde azalma görülmüştür.

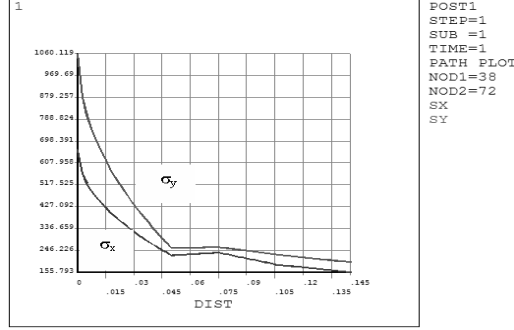


Şekil 3. Çatlak ucu A noktası (düğüm no:38) ile B noktası (düğüm no:72) arasındaki bölgede normal gerilmelerin değişim grafiği.

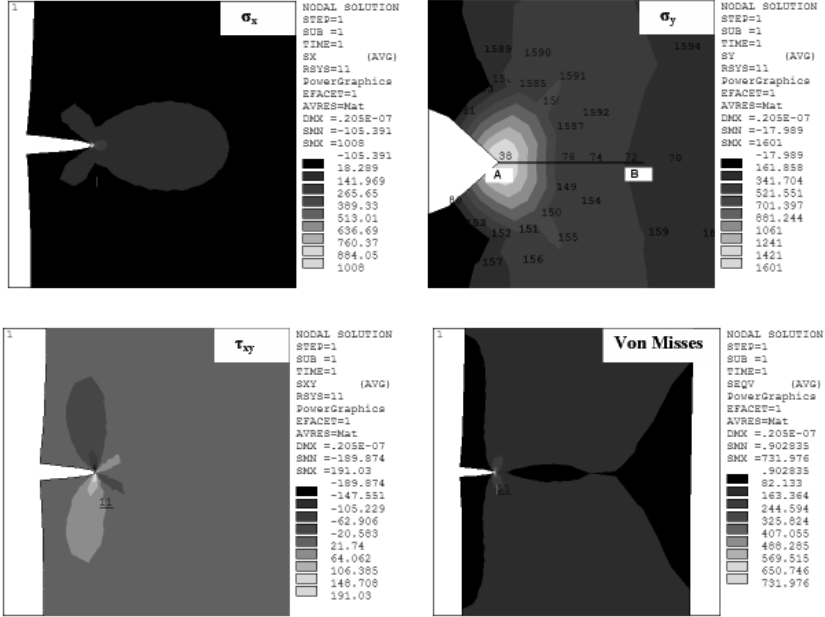


Şekil 4. $a = 1.25 \text{ mm}$ ve y - ekseninde yükleme durumunda ($\sigma_y = 75 \text{ MPa}$) normal, kayma ve von Mises gerilme dağılımı.

Farklı çatlak boyuna sahip plakada gerilme yoğunluğunun analizi



Şekil 5. Çatlak ucu A noktası (düğüm no:38) ile B noktası (düğüm no:72) arasında bulunan hattaki normal gerilmelerin değişim grafiği.



Şekil 6. $a = 1.5 \text{ mm}$ ve y - ekseninde yüklenme durumunda ($\sigma_y = 100 \text{ MPa}$) normal, kayma ve von Mises gerilme dağılımı.

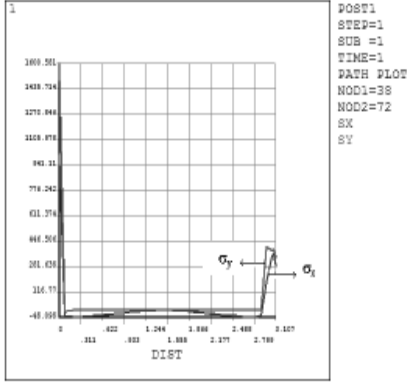
Şekil 6 çatlak boyu $a=1.5 \text{ mm}$ ve yük $\sigma_y=100 \text{ MPa}$ olması durumunda plaka davranışının grafikleri gösterilmiştir. Çatlak boyu %50, gerilme değeri ise % 100 artırılan bu durumda, gerilme bileşenlerinde (σ_x , σ_y , τ_{xy}) ve von Mises akma kriterine göre maksimum gerilme

değerlerindeki artış yaklaşık % 162 olarak gerçekleşmiştir.

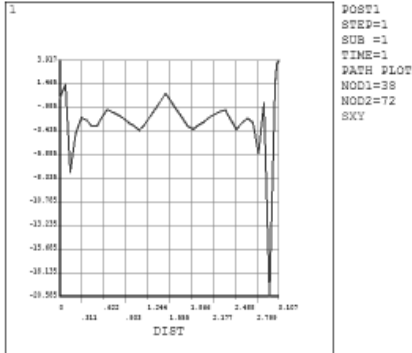
Benzer düğüm noktaları seçilerek, çizilen grafikte (Şekil 7) gerilme bileşenleri (σ_x , σ_y)

çatlak ucundan itibaren çok ani gerilme düşüşi gözlemlenmiştir. Plaka yüzeyinde paralel bir doğru değişimi gösterdikten sonra gerilme değerinde az da olsa bir gerilme artışı söz konusu olmuştur.

Şekil 8 çatlak ucu ile plaka yüzeyinde seçilen bir düğüm noktası arasındaki bölgede kayma

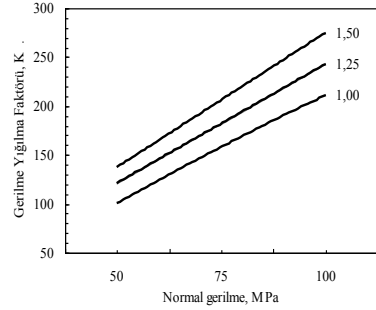


Şekil 7. Çatlak ucu A noktası (düğüm no:38) ile B noktası (düğüm no:72) arasında bulunan hattaki normal gerilmelerin değişim grafiği.



Şekil 8. Çatlak ucu A noktası (düğüm no:38) ile B noktası (düğüm no:72) arasında bulunan hattaki kayma gerilme değişim grafiği.

gerilmesi bileşeninin (τ_{xy}) değişim grafiğini göstermektedir. Çatlak ucundan itibaren plaka yüzeyinde diğer gerilme bileşenlerine göre plaka yüzeyinde daha az gerilme alanı meydana gelmesine neden olmuştur. Ancak o bölgede çekme ve basma gerilmelerinin değişkenlik göstermesi, plaka dayanımını çatlakla bağlı hassasiyetini daha fazla olduğu düşünülebilir.



Şekil 9. Farklı çatlak boyu ve gerilme yükleri için gerilme yoğunluğu faktörünün değişimi.

Plaka kenarında bulunan farklı çatlak boyuna ve gerilmesine göre ve meydana gelen gerilme yoğunluğu değişiminin gösterildiği Şekil 9 da en büyük gerilme yoğunluğu beklenildiği gibi çatlak boyu $a=1,5$ mm ve uygulanan gerilme 100 MPa olduğu durumda meydana gelmiş ve değeri $KI=275$ MPa mm^{1/2} dir.

Sonuçlar

Çatlak boyunun ve uygulanan tek eksenli yük artışı plaka yüzeyinde meydana gelen gerilme alanı dağılımında önemli bir değişikliğe neden olmamıştır. Ancak, gerilme bileşenlerinin (σ_x , σ_y ve τ_{xy}) ve von Mises akma kriterine göre elde edilen maksimum gerilme değerlerinde önemli artışlara sebep olmuştur. Bu artış gerilme yoğunluğu faktörünün (K_I) artmasına da sebep olmaktadır. Uygulanan yük artışına ve çatlak boyuna bağlı olarak plakada kayma gerilmesi (τ_{xy}) salınım halinde bir değişim göstermiştir. Bu durumda plakalarda bulunan süreksizliklerin çatlak ilerlemesine ve yorulmasına neden olarak, mukavemet dayanımlarını düşüşüne nasıl önemli ölçüde düşürdüğünü açıklamaktadır.

Kaynaklar

- ANSYS User's Manuel (Version 9.0).
- Bouiadjra B., Benguediab M., Elmequenni M., Belhouari M., Aziz B. M. N., (2008). Analysis of the effect of micro-crack on the plastic strain ahead of main crack in aluminium alloy 2024 T3, *Computer Material Science*, **42**, 100–106
- Dirikolu M.H., Aktas A., (2000). Analytical and finite element comparisons of stress intensity factors of composite materials, *Composite Structure*, **50**, 99-102.
- Griffith, A.A., (1920). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philos. Trans., R. Soc. Lond., Ser. A., Vol. 221,
- Irwin G.R., Fracture Dynamics, *Fracture of Metals*, ASM, 1948, 147-166
- Bouchard O., Bay F., Chastel Y., (2003). Numerical modeling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria, *Computer Method Applied Mechanical Engineering*, **192**, 3887–3908
- Madenci E., Güven İ., (2006). The finite Element Method and applications in Engineering Using Ansys, Springer Science-Buisness Media Inc.,
- Nakasone Y.S., Yoshimoto T.A., (2006). Stolarski, *Engineering Analysis With ANSYS*
- Nikbakht M., Choupani N., (2008). Fracture Toughness Characterization of Carbon-Epoxy Composite using Arcan Specimen, *Inter. J. Mechanical Industrial and Aerospace Engineering*, **2(4)**
- Pilkey W.D., Pilkey D.F., Peterson's Stress Concentration Factors, 3rd. ed, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2008 Software, Elsevier Publishing,
- Sun H., Rajendran S., Song D. Q., 1998, Finite Element Analysis on Delamination Fracture Toughness of Composite Specimens, *Proceedings of 2nd Asian ANSYS User Conference*, Nov 11-13, Singapore.
- Tada H., Paris P.C., Irwin G.R., (1934). The Stress Analysis of Cracks Handbook, 3rd. Ed., ASME Pres.
- Yan X., (2006). Multiple crack fatigue growth modeling by displacement discontinuity method with crack-tip elements, *Applied Mathematical Modeling*, **30**, 489–508.
- Zhang H., (2009). Simulation of crack growth using cohesive crack method *Applied Mathematical Modelling* In Press,

mühendislik dergisi

