

Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çerçevelerin doğrusal analizi

Halil GÖRGÜN*, Sercan KAYMAK, Asım ÇELİK

Dicle Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 21280, Diyarbakır

Özet

Bu makalede, kayma deformasyonlarının etkisi de göz önüne alınarak sonsuz rijit kısımları bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin doğrusal analizi yapılmış ve bu konuda bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Önce, her iki ucunda rijit bölgeler ve dönel yaylar bulunan bir çubuk için rijitlik katsayıları elastik bölgesindekiler cinsinden elde edilmiştir. Daha sonra, ikinci mertebe teorisi kullanılarak ve kayma deformasyonları hesaba katılarak rijitlik katsayıları çıkarılmıştır. En sonunda, doğrusal prizmatik bir çubuğun üniform yayılı yük, tekil yük, doğrusal yayılı yük, simetrik yamuk şeklinde yayılı yük ve simetrik olmayan üçgen şeklinde yayılı ara yükler için ankastrelik uç kuvvetleri elde edilmiştir. Literatürde bulunan bazı sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmış ve aralarında uyum olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: *Rijit uçlu bölgeler, Kayma deformasyonları, Elastik bağlı çubuklar, Düzlemsel çerçeveler, Doğrusal analiz.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Halil GÖRGÜN. hgorgun@dicle.edu.tr; Tel: (412) 248 80 30 (3523)

The linear analysis of frames composed of semi-rigidly connected members with rigid end sections considering shear deformations

Extended abstract

In this study, the linear analysis of frames with linear prismatic members, which may have rigid end sections and rotational semi-rigid end connections, has been carried out taking into account the effects of shear deformations.

When analysing and designing reinforced precast concrete frames, and steel frames the real behaviour of beam-to-column connections are generally idealized either pinned or fully rigid. The notions of the two alternatives either pinned or fully rigid connections are simply the extreme cases of the actual connection behaviour, and experimental works up to date, many of which are referred to in section of previous studies of this paper show without doubt that true connections exhibit characteristics over a wide spectrum between these two extreme cases. The rigid connection idealization indicates that relative rotation of the connection does not exist and the end moment of the beam is entirely transferred to the columns. In contrast to the rigid connection assumption, the pinned connection idealization indicates that any restraint does exist for rotation of the connection and the connection moment is zero. Although these idealizations simplify the analysis and design process, the predicted response of the frame may be different from its real behaviour. Most connection normally regarded as fully rigid often display some flexural flexibility, while connections which are regarded as pinned, implying no moment transfer, possess some flexural stiffness. It would therefore seem more correct that to classify all the behaviour of beam-to-column connections in reinforced precast concrete frames, and steel frames under the heading of semi-rigid connections, while keeping in mind that pinned and fully rigid connections as extreme cases.

Here, the linear analysis of planar frames with semi-rigid connections and rigid end sections is performed. Modified stiffness coefficients in the shear wall axis of the beam connected to the shear wall are obtained with assumption that the rigid strain would be at the part between the elastic beam end and the shear wall axis.

The matrix stiffness method of analysis was modified to allow for flexible connections and rigid end parts.

The stiffness matrices are modified by correction matrices and the resulting linear equations are solved for as in the normal stiffness method. The advantages of the matrix stiffness method are that it can be programmed so that relatively large frames can be analyzed with ease and that the use of interactive techniques would permit the inclusion of improvements in the end restraint representation. The linear semi-rigid connection behaviour is used to modify the member stiffness matrices and the fixed-end forces vector.

The current paper considers the linear structural analysis of planar frames with flexibly connected members having rigid end sections taking into consideration the effect of shear deformations and a computer program has been prepared for the pertinent design purposes. To accomplish the foregoing goal, first the stiffness coefficients of the stiffness matrix of linear prismatic members has been found using pertinent differential equations assuming there are rigid sections of arbitrary lengths and rotational beam-to-column connections at the both ends. This kind of members, which may have rigid end sections, show up when there are lintel beams connecting shear walls and column connecting high beams. Then, the stiffness coefficients of the stiffness matrix of beams itself have been obtained, taking shear deformations into consideration. Finally, the fixed end forces have been found for a uniformly distributed load, a concentrated load, a linearly distributed load, a symmetric trapezoidal distributed load and a nonsymmetrical triangular distributed load.

A computer program has been prepared for the numerical applications of the analytical results. This program carries out the linear and also the second order structural analysis of planar frames and pierced shear walls using modified stiffness matrix method, taking shear deformations into considerations, not only the effects of bending and axial deformations, but also due to shear, as well.

Solving some problems in different ways, the validity of the pertinent computer program has been proved by the close match of the results. Some examples from the literature have been treated by the present method and a perfect match has been observed between the corresponding numerical results.

Keywords: Rigid end sections, shear deformations, flexibly connected members, planar frames, linear analysis

Giriş

Günümüzde teknolojinin ilerlemesi ile çok yüksek dayanımlı malzemelerle çok narin yapıların yapılması olanak kazanmıştır. Ayrıca kat döşemelerinin ince tutulması isteği ve yüksek katlı binalarda alt kat kolon boyutlarının büyümesi sonucunda hacim kaybı olması gibi nedenlerden dolayı çerçevelerle birlikte perde duvarları gibi yatay yük taşıyıcı elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır. Özellikle, yanal yük etkisinin büyük olduğu deprem bölgelerinde, yanal rijitliği yapı rijitliğine göre daha büyük olan perde duvarların kullanılması ile bu tür hacim kayıplarının önüne geçilmesi mümkündür.

Düzlem içi rijitlikleri yüksek olan ve kesme duvarları olarak da adlandırılan bu perde duvarları, yapı planında uygun yerleştirildikleri takdirde, yatay yüklere karşı dayanımı da ekonomik olarak sağlamaktadırlar. Mimari nedenlerle perdelerde bir dizi boşluklar bırakılmaktadır. Bu tip perdelerde de boşluklu perdeler denilmektedir. Bina çerçeveleri daha çok kayma deformasyonları, perde elemanları daha çok eğilme deformasyonları yaptıkları halde boşluklu perdelerde her iki tip deformasyon da önemli olmaktadır. Ayrıca bazı hallerde bağlantı kirişlerinin ve perdelerin yükseklikleri, açıklıklarının yanında oldukça büyük değerler aldığı kayma şekil değiştirmelerinin etkisi de önemli olmaktadır.

Genellikle düzlem çerçeve tipi yapıların analiz ve tasarımları kiriş-kolon birleşim noktalarının ya tam mafsallı ya da rijit oldukları varsayımları ile yapılır. Fakat, prefabrik betonarme ve çelik yapılarıdaki gerçek düğüm noktaları üzerinde yapılan deneysel çalışmalar göstermiştir ki, mafsal olarak kabul edilen bağlantılar bir miktar dönme rijitliğine ve rijit bağlantılar ise bir miktar esnekliğe sahiptir. Yani, bağlantıların çoğu mafsal davranış ile rijit bağlantı arasında bir davranış gösterir. Genellikle bu davranış literatürde yarı-rijit (semi-rijit) olarak adlandırılır. Yapı analiz ve tasarımları sırasında bu gerçek davranışın hesaba katılması ile büyük ölçüde ekonomi sağlanabilir. Literatürde çelik yapılarda %13'e varan ekonomi sağlandığı belirtilmiştir Anderson ve diğerleri (1993).

Ayrıca bağlantı davranışının çerçeve stabilitesi üzerindeki etkisi de göz ardı edilmemelidir. O halde, bağlantı davranışının bir şekilde matematiksel olarak modellenerek yapı analiz ve tasarıma katılması gerekmektedir. Öyleyse, kiriş ve kolonların bağlantı noktalarında birbirlerine doğrusal elastik dönel yaylarla bağlı imiş gibi düşünmek oldukça uygun bir yaklaşım olur. Böylece, eşdeğer dönel yay sabitlerini deneysel v.b. yöntemlerle yaklaşık olarak bulup analiz yapmak mümkün olacaktır.

Yapılan bu çalışmada, yukarıdaki etkiler, rijit uçlu bölgeler, dönel yaylar ve kesmenin eğilmeye etkisi, dikkate alınarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programında rijitlik matrisi yöntemi kullanılmıştır. Yöntemi uygulayabilmek için kayma şekil değiştirmeleri de hesaba katılarak doğrusal analize ait eleman rijitlik matrisinin teşkili ve ankastratik uç kuvvetlerinin elde edilmesi incelenmiştir. Elastik mesnetli bir çubuğun rijitlik matrisi diferansiyel denklemler yardımıyla elde edilmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı kullanılarak, elemanları birbirlerine elastik dönel yaylar ile bağlı ve rijit uçları bulunan elemanlardan oluşan çerçevelerin statik analizi yapılabilmektedir. Yapılan analizde dönel yayların doğrusal elastik davranış gösterdiği varsayımı yapılmıştır.

Diğer birçok bilim ve mühendislik konularında olduğu gibi yapı analizlerinde de analizcinin etkili aracı lineerleştirmedir. Yüzyıllar boyunca yapı analizlerinde lineerleştirme yoluyla pek çok problemin yeter doğrulukta çözülmesi mümkün olmuştur. Ancak, günümüzde teknolojinin ilerlemesi ile çok yüksek dayanımlı malzemelerle çok narin yapıların yapılması mühendisleri doğrusal olmayan analiz uygulamasına yöneltmiştir. Özellikle doğrusal olmayan analize gerek duyulan problemler, çok özel bir doğrusal olmayan davranış gösteren malzemeler, yüksek dayanımlı malzemeler ile yapılan narin yapılar ve temas bölgesinin genişliği yüke bağlı olan yapı elemanları ile ilgili problemlerdir. Burada ikinci tür nonlineerlik yani, ikinci mertebe teorisinden doğan geometrik nonlineerlik incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı, yapı sistemlerinin analizinde kayma deformasyonlarını hesaba katarak birleşimlerin yarı-rijit olmasını ve eleman uçlarında bulunan rijit kısımları göz önüne almak ve böylece birleşimlerin özelliğini hesaba katmaktır.

Yapılan kabuller

Bu çalışmada aşağıdaki kabuller göz önüne alınmıştır.

1. Yapı malzemesi doğrusal elastik, homojen ve izotropdur.
2. Çubuk elemanı sabit kesitli ve doğru eksenslidir.
3. Dış yükler statiktir.
4. Bağ kirişlerinin uçları perde kesitinin ağırlık merkezi üzerindedir.
5. Kirişlerin geniş perdeler, perdelerin de yüksek bağlantı kirişlerinin içinde kalan bölgeleri sonsuz rijittir.
6. Çubuk kesitinde kayma merkezi ile ağırlık merkezi çakışmaktadır.
7. Kullanılan dönel yay modeli doğrusal elastik ve yay boyu sıfır alınmıştır.
8. Dönel yaylarda sadece bağlı dönmeler göz önüne alınmıştır.

Önceki çalışmalar

Bu bölümde bu konularda daha önceden yapılan bazı çalışmalara değinilmiştir. Yapılan çalışmalar kronolojik olarak aşağıda sıralanmıştır:

Monforton ve Wu (1963) dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin doğrusal analizini matris yöntemle yapmışlar, kuvvetler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı çıkarıp, rijitlik matrisini elde etmişlerdir. Bazı yüklenme durumları için ankastrilik uç kuvvetlerini de bulmuşlardır.

Livesly (1964) uçlarında dönel yaylar bulunan elemanların rijitlik matrisinin çıkarılmasını incelemiştir. Ancak ankastrilik uç kuvvetlerinin ne olacağı hakkında bir çalışma yapılmamıştır.

Romstad ve Subramanian (1970) dönel yaylarla bağlı çerçevelerin analizini yapmışlardır. Düğüm noktalarının mafsallı, tam rijit veya yarı rijit olması durumları için moment ve bağlı

dönme ilişkisini bir grafikte vermişlerdir. Konuyla ilgili deneysel çalışmalar da yapan aynı yazarlar moment-dönme ilişkisini bir grafikte vermişlerdir.

Ackroyd ve Gerstle (1983) dönel yaylarla bağlı çerçevelerin elastik stabilitesini incelemişlerdir. Bir çerçevenin elastik burkulma kapasitesinin daha rijit bir bağlantı seçilerek önemli ölçüde artırıldığı sonucuna varmışlardır.

Yu ve Shanmugan (1986) yarı-rijit bağlı çerçevelerin stabilitesi üzerinde çalışmışlar ve bu tür yapıların elastik göçme yükünün bulunması için bir rijitlik matrisi yöntemi sunmuşlardır. Bu yöntem, bağlantıların yarı-rijit davranışlarının göz önüne alınması yanında ayrıca aksenal rijitliği, geometrik değişiklikleri ve $P-\Delta$ etkisini de göz önüne almaktadır. Araştırmacılar, yaptıkları deneyler ile teorik analizlerinin geçerliliğini ölçmüşler ve yöntemlerinin kabul edilebilir doğrulukta olduğu sonucuna varmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda düğüm noktalarının rijitlik derecesinin artırılması ve takviyelendirme ile göçme yükünün artırılacağı kanısına varmışlardır.

Stelmack ve diğerleri (1986) doğrusal dönel yaylarla bağlı çelik çerçeveler için olan analitik yöntemlerin geçerliliğini kanıtlamak amacıyla deneysel çalışmalar yapmışlardır. Deneyler sonucunda bu çerçeve analiz yöntemlerinin iyi sonuçlar verdiği sonucunu elde etmişlerdir.

Dinçer (1989) Kayma deformasyonlarının etkisi göz önüne alınarak rijit bağlı çubuklar için rijit uçların varlığının ikinci mertebe analizine etkilerini değişik ara yük durumlarını da inceleyerek ele almıştır.

Cunningham (1990) çelik yapılarda dönel yaylı bağlantılar hakkında bir çalışma yapmıştır. Yapılan bu deneysel çalışmadan kiriş-kolon bileşiminin karakteristik özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada kiriş ve bağlantı için verilen bir momente karşılık gelen dönmeyi veren grafik elde edilmiş ve değişik bağlantıları olan çelik elemanlar için sonuçlar bir grafikte özetlemiştir.

Akkaya (1991) Elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin doğrusal analizini ele almış ve bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamıştır. Önce, uçlarında dönel yaylar bulunan bir eleman için rijitlik matrisini bulmuş ve daha sonra tekil yük, üniform yayılı yük, doğrusal yayılı yük, simetrik olmayan üçgen şeklinde yük ve simetrik yamuk şeklinde yük için ankastratik uç kuvvetlerini elde etmiştir.

Görgün (1993) Elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin doğrusal olmayan analizini ele almış ve bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamıştır. Önce, uçlarında dönel yaylar bulunan bir eleman için rijitlik matrisini bulmuş ve daha sonra tekil yük, üniform yayılı yük, doğrusal yayılı yük, simetrik olmayan üçgen şeklinde yük ve simetrik yamuk şeklinde yük için ankastratik uç kuvvetlerini elde etmiştir.

Akavcı (1994) Uçlarında rijit bölgeler bulunan dönel yaylı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin stabilite analizi üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmada, eleman elastisite modülüne, atalet momentine, uzunluğuna ve ekstenel kuvvetine bağlı eleman rijitlik matrisi verilmiş ve her iki konuda da birer bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Aksoğan ve diğerleri (1993) uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin doğrusal olmayan analizini, yayların doğrusal olmayan davranışının üçüncü dereceden bir polinom olduğu varsayımı ile yapmışlar ve bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Erdem ve Aksoğan (1994) uçlarında rijit bölgelere doğrusal olmayan dönel yaylarla bağlanmış çubuklardan oluşan çerçevelerin analizi üzerinde çalışmışlar ve bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Aksoğan ve diğerleri (2005) Uçlarında rijit bölgeler bulunan ve doğrusal olmayan yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin geometrik nonlineerliği hesaba katarak analizi üzerinde çalışmışlar. Bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Yılmaz (2008) kesmenin etkisini de hesaba katarak yarı-rijit bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi üzerinde çalışmıştır. Çeşitli ara yükler için ankastratik uç kuvvetlerini elde edip bu konuda bir bilgisayar programını hazırlamıştır.

Karacan (2011) kesmenin etkisini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan yarı-rijit bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi üzerinde çalışmıştır.

Analiz

Yöntem

Bu çalışmada kullanılan yöntem, açı yönteminin geliştirilmiş şekli olan rijitlik matrisi yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde yapıyı oluşturan her çubuk elemanı için i ve j uçlarındaki kuvvet ve yer değiştirme kolon vektörleri alt alta getirilirse

$$[p] = [k][d] + [f] \quad (1)$$

şeklinde bir bağıntıdan yararlanılır. Burada $[p]$, $[k]$, $[d]$ ve $[f]$ sırası ile uç kuvvetleri kolon vektörü, eleman rijitlik matrisi, uç deplasmanları kolon vektörü ve ankastratik uç kuvvetleri kolon vektörüdür.

Elemene ait uç kuvvet-yer değiştirme ilişkileri eleman için eleman koordinat takımında yazılır. Yapı yer değiştirmeleri ve kuvvetleri için eleman koordinat takımı uygun olmayıp yapı için seçilen ortak koordinat takımına dönüşüm yapılarak her düğüm noktasında gerekli denge ve uygunluk koşulları sağlamak üzere yapı genel denklemleri

$$[P] = [K][D] \quad (2)$$

şeklinde yazılır. Burada $[P]$ ve $[D]$ sırasıyla düğüm noktalarındaki dış yük ve deplasman kolon vektörleri, $[K]$ ise sistemin rijitlik matrisidir. $[P]$ bilindiğine göre $[D]$ bu ifadeden bulunur.

Doğrusal analizde bir elemanın (1) denklemdeki eleman rijitlik matrisi $[k]$ sabit olup elemanın A, E, I, G, k, L ve yay sabitleri k_1 ve k_2 değerlerine bağlıdır. Geometrik doğrusal olmayan analizinde ise elemanın rijitlik matrisi yukarıda sayılanlara ek olarak eleman eksenel kuvveti olan N değerine de bağlı olup bu konu ikinci yayında işlenmiştir.

Değiştirilmiş rijitlik matrisi

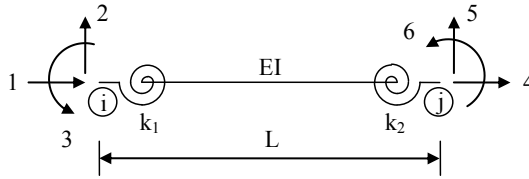
Uçlarında dönel yaylar bulunan ve kayma deformasyonları dikkate alan prizmatik elemanların doğrusal analizinde kullanılacak değiştirilmiş rijitlik matrisleri Görgün ve Yılmaz (2008) tarafından verilmiştir. O çalışmada literatürde pek çok çalışmada olduğu gibi yalnız bağlı dönmeler için elastik bağlılık ele alınmıştır. Bu tür elastik bağlar, dönel bir yay ile modellenerek, i ve j bağ noktalarının iki yanındaki kesitlerin bağlı dönmeleri sırasıyla θ_i ve θ_j ile bu bağ noktalarına etkiyen mesnet eğilme momentleri M_i ve M_j arasında

$$M_i = k_1 \theta_i \quad (3)$$

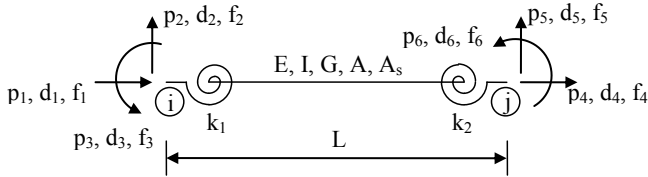
$$M_j = k_2 \theta_j \quad (4)$$

şeklinde bir bağıntı kullanılır. Burada $k_1 = k_1$ ve $k_2 = k_2$ bağlantıların bir radyan dönmeleri için gerekli eğilme momentini göstermektedir.

Elemanın her iki ucunda meydana getirilen tek tek birim deplasmanlar altında çubuk uçlarında oluşan tepkilere çubuk elemanın rijitlik etki katsayıları denir. Belirli bir doğrultuda birim deplasman oluşması için taşıyıcı sisteme bir kuvvet uygulamak gerekir. Ancak uygulamada, oluşacak deplasmanın ve uygulanacak kuvvetin doğrultu, yön ve uygulama noktalarının açık olarak belirtilmesi gerekir. Bunun için taşıyıcı elemanın bütün serbestlik dereceleri bir okla ve okun başı, kabul edilen işaret kuralına göre pozitif yönü göstermek üzere bir şekil üzerinde gösterilir. Kuvvetler ve ötelenmeler için doğru, dönmeler için eğri oklar kullanılır ve bütün oklar sıra ile numaralanır (Şekil 1, Şekil 2).



Şekil 1 Notasyon ve kodlama



Şekil 2. Kiriş-kolon eleman modeli

Şekil 1’de görülen, uçlarında doğrusal elastik dönele yaylar bulunan kayma deformasyonları dikkate alınan i ve j uçlu çubuk elemanın doğrusal analiz için rijitlik matrisi aşağıda belirtilmiştir.

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dönele yayların, aksenele kuvvetin ve kayma deformasyonlarının elastik eğilme rijitliği üzerindeki etkisi göz önünde tutularak (Timoshenko giriş teorisi) hesaplanan Denklem (5)’deki rijitlik etki katsayıları k_{ij} ($i=1,2,\dots,6$; $j=1,2,\dots,6$) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$k_{11} = \frac{EA}{L} = k_{44} = -k_{14} = -k_{41} \quad (5a)$$

$$k_{22} = \frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} = k_{55} = -k_{25} = -k_{52} \quad (5b)$$

$$k_{23} = \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} = k_{32} = -k_{35} = -k_{53} \quad (5c)$$

$$k_{26} = \frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} = k_{62} = -k_{56} = -k_{65} \quad (5d)$$

$$k_{33} = \frac{EI\chi_4}{L\Omega} \quad (5e)$$

$$k_{36} = \frac{EI\chi_5}{L\Omega} = k_{63} \quad (5f)$$

$$k_{66} = \frac{EI\chi_6}{L\Omega} \quad (5g)$$

Denklem (5a-g)’de aşağıdaki kısaltmalar yapılarak doğrusal çözüm için eleman koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisinin etki katsayıları matris formunda verilmektedir. Denklem (5a)’daki EA/L elastik aksenele rijitliktir.

$$\chi_1 = 12\{1 + \beta_1 + \beta_2\}$$

$$\chi_2 = 6(1 + 2\beta_2)$$

$$\chi_3 = 6(1 + 2\beta_1)$$

$$\chi_4 = 4\{1 + 3(\beta_1 + \beta_2)\} \quad (6)$$

$$\chi_5 = 2(1 - 6\beta)$$

$$\chi_6 = 4\{1 + 3(\beta_1 + \beta_2)\}$$

$$\Omega = 1 + 12\beta(1 + \beta_1 + \beta_2) + 4(\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_1\beta_2)$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & 0 & -\frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & \frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} \\ 0 & \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_4}{L\Omega} & 0 & -\frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_5}{L\Omega} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & -\frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & 0 & \frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & -\frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} \\ 0 & \frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_5}{L\Omega} & 0 & -\frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_6}{L\Omega} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Örneğin doğrusal çözüm için yukarıda sayılan bütün etkiler ihmal edilirse ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0$), bu durumda çok iyi bilinen

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

eleman rijitlik matrisi elde edilmektedir. Burada kullanılan notasyon;

EI : Kesit eğilme rijitliği

E : Elastisite modülü

G : Kayma modülü

A : Kesit alanı

I : Atalet momenti

L : Eleman boyu

$k_t = kGA = GA_s$

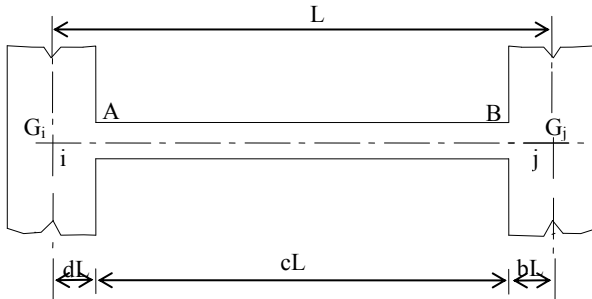
k : kesit şekline bağlı bir sabiti göstermektedir.

$$\beta = \frac{EI}{L^2 k_t} = \frac{EI}{L^2 GA_s}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4k_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{4k_2}$$

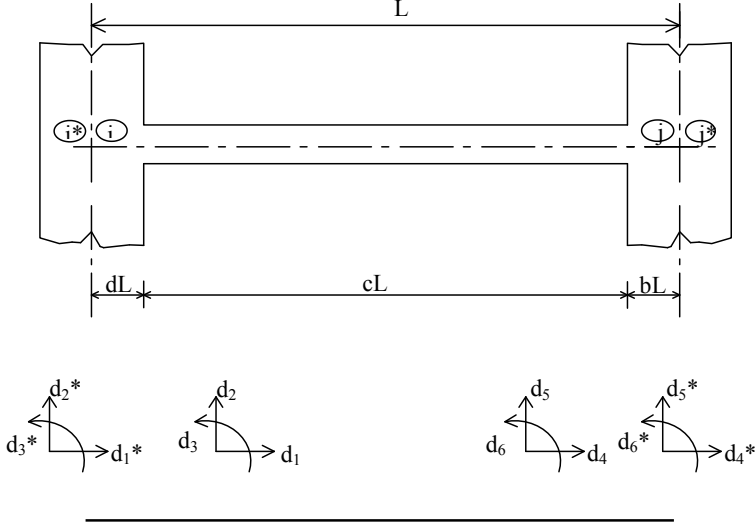
Sonsuz rijit kısımları bulunan çubukların birinci mertbe teorisine ait birim deplasman sabitleri

Boşluklu perdeler, bağlantı kirişi eksenleriyle perde eksenlerinin oluşturduğu çerçeveler olarak idealize edilerek hesap yapılır. İdealize etmede, kirişlerin geniş perdeler, perdelerin de yüksek bağlantı kirişlerinin içinde kalan bölgeleri sonsuz rijit olarak alınmaktadır. Bundan başka kirişleri çok yüksek olan çerçevelerin kolonları da benzer durumdadır. Bu tür çerçeve hesaplarının yapılabilmesi için bir veya iki tarafında sonsuz rijit kısımları bulunan doğru eksenli çubukların eleman rijitlik matrisinin tayininde birim deplasman sabitlerinin bilinmesine gerek duyulmaktadır.



Şekil 3. Perde duvarları arasında bir bağ kirişi

Şekil 3.'de görülen i ve j perdeleri bağlantı kirişleriyle birbirine bağlanmışlardır. Bu kirişin i ve j uçları, perde kesitlerinin G_i ve G_j ağırlık merkezlerinin üzerindedir.



Şekil 4. Boşluklu perdelerin uç deplasmanları

Burada L kirişin $i^* j^*$ açıklığını, cL kirişin ij açıklığını, dL ve bL ise kirişin perdeye saplandığı noktadan perde eksenine olan mesafenin L cinsinden ifadelerini göstermektedir.

Kirişin perde içerisindeki kısmı sonsuz rijit olduğundan perde eksenindeki dönme ile bağ kirişinin perdeye saplandığı noktadaki dönme birbirine eşit olacaktır. Benzer şekilde, yatay yönde rijit kısım boy değişimi yapmadığından yatay deplasmanlar da eşit olurlar.

$i^* j^*$ çubuğunun eleman rijitlik matrisi simetrik olup ij çubuğu eleman rijitlik matrisinden farklı olan elemanları Şekil 4. yardımıyla,

$$k_{33}^* = k_{33} + k_{23}(dL) + k_{22}(dL)^2 + k_{32}(dL) \quad (9a)$$

$$k_{32}^* = k_{32} + k_{22}(dL) = -k_{53}^* \quad (9b)$$

$$k_{63}^* = k_{63} + k_{53}(dL) + k_{62}(dL) + k_{52}(dL)(bL) \quad (9c)$$

$$k_{62}^* = k_{62} - k_{52}(dL) = -k_{65}^* \quad (9d)$$

$$k_{66}^* = k_{66} + k_{56}(bL) + k_{55}(bL)^2 + k_{65}(bL) \quad (9e)$$

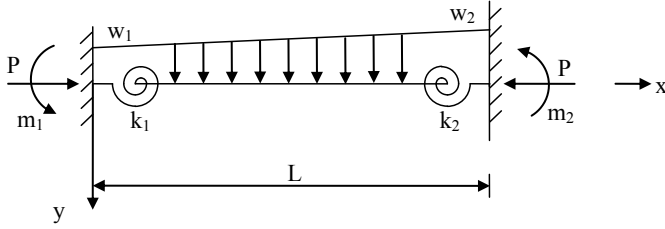
olarak elde edilir.

O halde bağ kirişinin birim deplasman sabitleri, yukarıdaki eşitliklerde ij çubuğunun birim deplasman sabitleri yerine konularak bulunabilir.

Ankastrelik uç kuvvetleri

Gerek bir önceki bölümdeki rijitlik matrisinin gerekse ankastrelik uç kuvvetlerinin bulunmasında moment eğrilik ilişkisinden elde edilen diferansiyel denklemler uygun sınır koşulları ile birlikte kullanılmıştır. İki bölgeyi gerektiren durumlar için bölgeler arasında süreklilik koşullarından yararlanılmıştır. Diğer ara yük durumları için ankastrelik uç kuvvetleri Yılmaz (2011)'den alınabileceği için burada yalnız doğrusal yayılı yük (Şekil 5) ve simetrik trapez yayılı yük hali (Şekil 6) için geçerli olan ifadeler verilmiştir.

Doğrusal yayılı yük



Şekil 5. Doğrusal yayılı yüklü ankastre giriş için ankastrelik uç momentleri.

$$m_1 = \frac{L^2}{60\Omega} \{3w_1 + 2w_2 + 30(w_1 + w_2)\beta + 2(8w_1 + 7w_2)\beta_2\} \quad (10a)$$

$$m_2 = -\frac{L^2}{60\Omega} \{3w_2 + 2w_1 + 30(w_1 + w_2)\beta + 2(8w_2 + 7w_1)\beta_1\} \quad (10b)$$

formüllerini elde edilir. Burada,

$$\Omega = 1 + 12\beta(1 + \beta_1 + \beta_2) + 4(\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_1\beta_2)$$

kısaltması kullanılmıştır.

Özel bir durum olarak kesmenin ve dönel yayların etkisi terk edilirse ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0$) bu durumda,

$$m_1 = \frac{L^2}{60}(3w_1 + 2w_2) \quad (10c)$$

$$m_2 = -\frac{L^2}{60}(3w_2 + 2w_1) \quad (10d)$$

ve $w = w_1 = w_2$ kabul edilirse, bu durumda iki ucu ankastre mesnetli düzgün yayılı yükten meydana gelen,

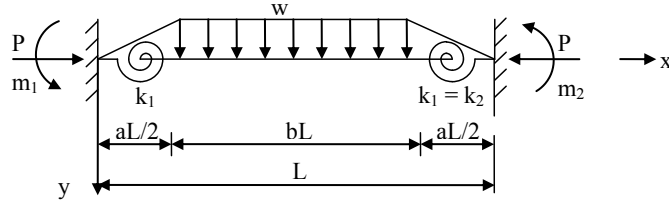
Simetrik trapez yayılı yük

$$m_1 = \frac{L^2}{60}(3w + 2w) = \frac{5wL^2}{60} = \frac{wL^2}{12} \quad (10e)$$

$$m_2 = -\frac{L^2}{60}(3w + 2w) = -\frac{5wL^2}{60} = -\frac{wL^2}{12} \quad (10f)$$

ankastrelik uç momentlerini veren formüllerini elde edilir.

Bu bölümde bütün yükleme durumları için kesme kuvvetleri elemanın herhangi bir ucuna göre moment alınarak bulunabilir.



Şekil 6. Simetrik trapez yayılı yüklü ankastre kiriş için ankastrelik uç momentleri

$$m_1 = \frac{wL^2}{96} \left\{ \frac{8 + a^2(a-4)}{(1+2\beta_1)} \right\} \quad (11a)$$

$$m_2 = -\frac{wL^2}{96} \left\{ \frac{8 + a^2(a-4)}{(1+2\beta_2)} \right\} \quad (11b)$$

formülleri elde edilir. Burada kesmenin etkili olmadığı görülmektedir, yani $\beta = EI/L^2GA_s$ formülde yer almamaktadır. Özel bir durum olarak, kontrol amacıyla dönel yayların etkisi de terk edilirse ($\beta_1 = \beta_2 = 0$),

$$m_1 = \frac{wL^2}{96} \{8 + a^2(a-4)\} \quad (11c)$$

$$m_2 = -\frac{wL^2}{96} \{8 + a^2(a-4)\} \quad (11d)$$

ve $a=0$ kabul edilirse, bu durumda iki ucu ankastre mesnetli düzgün yayılı yükten meydana gelen,

$$m_1 = \frac{8wL^2}{96} = \frac{wL^2}{12} \quad (11e)$$

$$m_2 = -\frac{8wL^2}{96} = -\frac{wL^2}{12} \quad (11f)$$

ankastrelik uç momentlerini veren formülleri elde edilir.

Sayısal sonuçlar

Hazırlanan bilgisayar programı ile örnek bir problem çözülerek veriler ve çıktılar tablolar halinde verilmiştir.

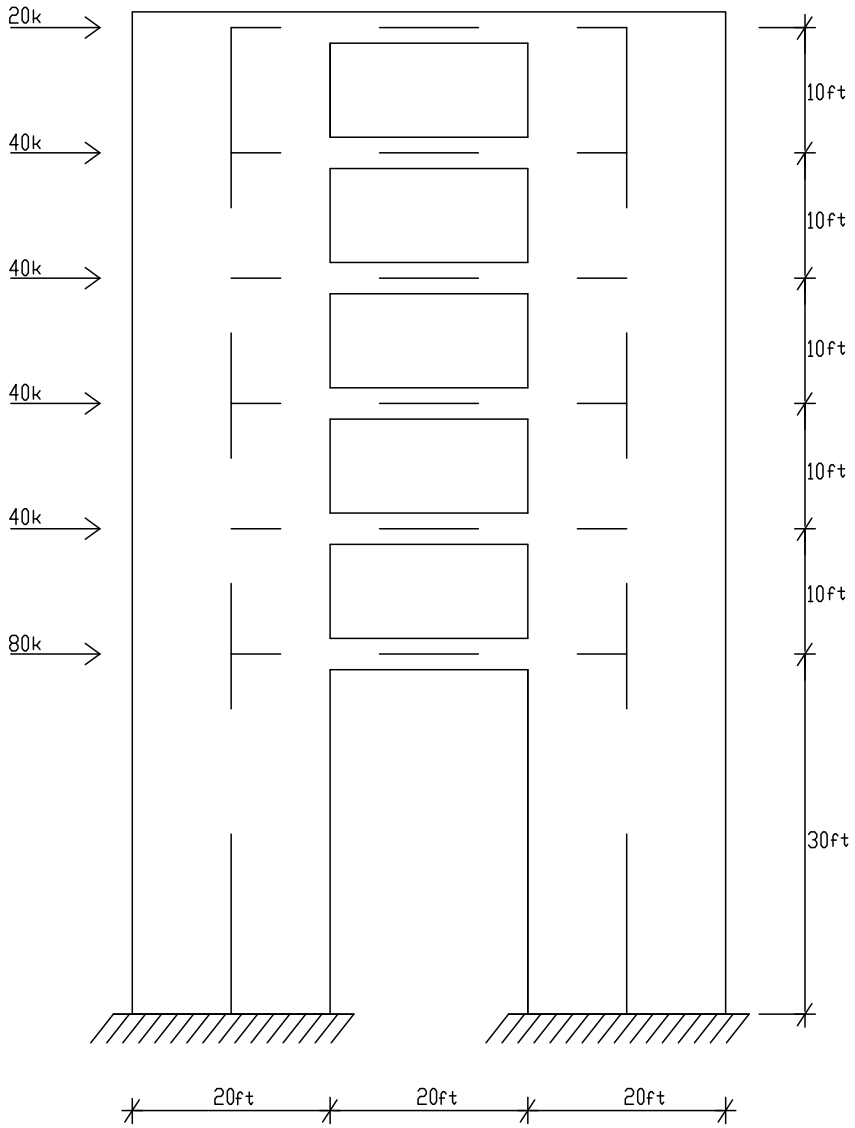
Bu örnek, Girijavallabhan (1969), Popov ve ark. (1979) tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Şekil 7).

Girijavallabhan (1969), direk sonlu elemanlar yöntemi ile çözdüğü modelde 918 düğüm noktası ile 1568 eleman kullanmıştır. Popov ve ark. (1979), aynı problemi yeni sonlu elemanlar yöntemi ile program SUBWALL'u kullanarak 264 eleman göz önüne almışlardır. Dinçer (1989) ve bu çalışmada sadece 18 eleman üzerinden çözüm yapılmıştır. Eleman kod numaraları, sistem kodlama durumu Şekil 8'de verilmektedir. Sonuçlar Tablo 1 ile karşılaştırma kolaylığı bakımından özetlenmiştir.

Tablo 1'den görüleceği gibi elde edilen sonuçlar Dinçer (1989) ile çakışmakta, Popov ve ark. (1979) tarafından bulunan değerlerle uyum içerisindedir. Girijavallabhan tarafından bulunan sonuçların farklı olması yapılan bir sayısal hatadan kaynaklanmış olup, hata Popov ve arkadaşlarının düşündüğü gibi basit eğilme teorisinin kullanımından kaynaklanmış değildir.

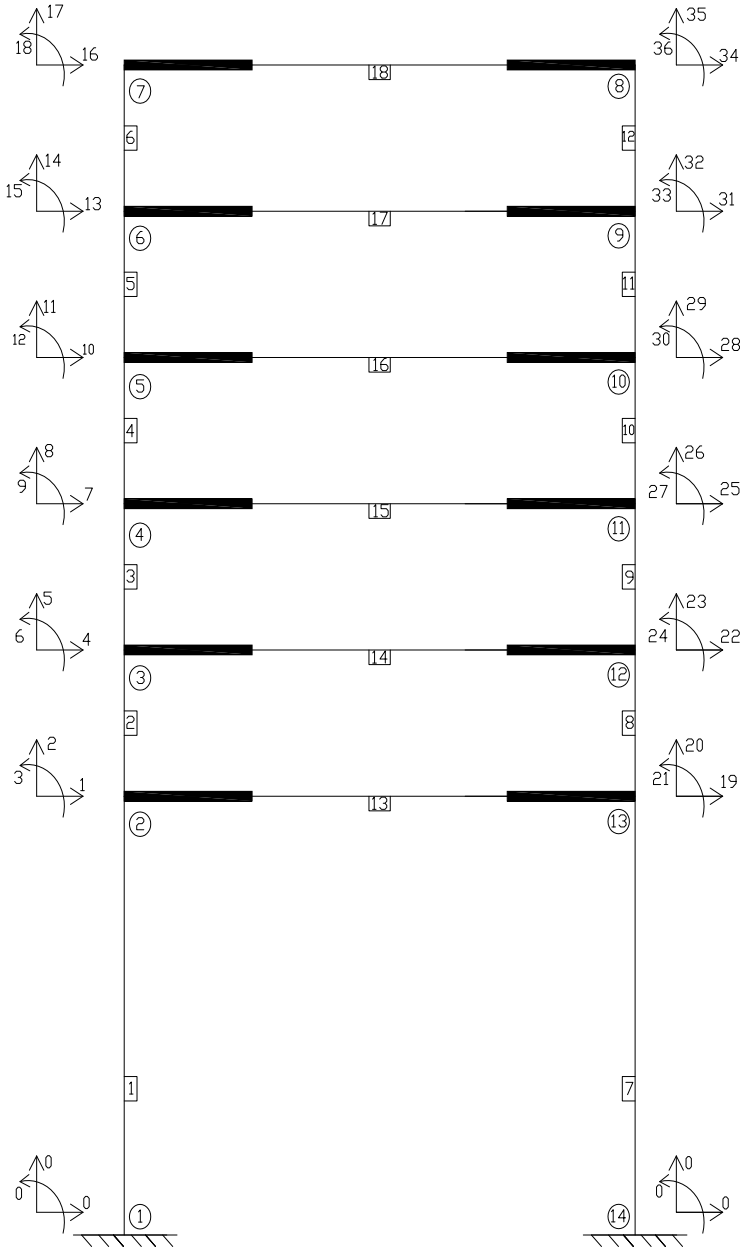
Aynı örnek, malzemenin elastisite modülü artırılarak çözülmüştür. Elastisite modülünün artırılmasıyla, iç kuvvetlerin eğilme momentlerine katkılarıyla elemanın rijitliğine etki etmesi, dolayısıyla analizin nonlineer olması sağlanmıştır.

Tutarlı bir kıyaslama yapabilmek için aynı örnek bir sonraki yayında doğrusal olmayan çözüm için de kullanılmış ve sonuçlar orada verilmiştir.



Şekil 7. rnek problemin yükleme durumu (boşluklu perde)

Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çerçevelerin lineer analizi



Şekil 8. Örnek problemin kodlama durumu

Tablo 1. Örnek probleme ait 1. iterasyon sonunda bulunan eleman uç momentlerinin karşılaştırılması.

Bağ kirişi no	Eleman uç momentleri (kip-ft)					
	Grijavallabhan (1969)		Popov ve ark. (1979)		Dinçer (1989) ve Bu çalışma	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
13	38.78	38.48	62.70	62.50	62.00	61.76
14	41.10	40.89	69.32	69.25	69.29	69.25
15	41.33	41.06	72.26	72.35	72.83	72.90
16	40.29	39.79	72.90	73.05	73.80	73.94
17	38.75	38.27	72.17	72.37	73.37	73.59
18	31.37	31.60	61.59	62.91	72.73	72.97

Not: 1 ft = 304.8 mm; 1 kip = 4.44822 kN; 1 kip-ft = 1.35582 kNm

Sonuçlar ve öneriler

Bu çalışmada, uçlarında sonsuz rijit kısımları bulunan ve düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin statik analizi incelenmiştir. Analizde kayma şekil değiştirmeleri de göz önüne alınmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile gerçek çözüme çok yakın sonuçlar veren rijitlik matrisi yöntemi kullanılması ile kişisel bilgisayarlarla yapılabileceği anlaşılmıştır.

İki boyutlu ince yapı elemanlarındaki düzlem içi kuvvetler belirli bir düzeyin altında kaldıkları sürece sistemin doğrusal davranışını bozmazlar. Ancak malzemenin elastisite modülü ile yapı elemanlarının mesnetleniş şekli ve atalet momentlerine bağlı olarak yük belirli bir düzeye çıkınca iç kuvvetler eğilme momentlerine katkıları nedeniyle yapı elemanlarının rijitliğine etki ederek analizin non-lineer olmasına neden olmaktadır. Bu non-lineerlik bu yayını takip eden ikinci bir yayında incelenmiştir.

Yapılan çalışmada uçlarında sonsuz rijit kısımları bulunan ve dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin değişik yay katsayıları ile çözülüp karşılaştırılmasıyla aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır.

- Boşluklu perdelerin analizinde bağ kirişleri yeterince narin ise tüm sistemi çubuklardan oluşan çerçeve olarak ele almak ve bağ kirişlerinin perde duvarlar içine rastlayan kısımlarının tümüyle rijit oldukları varsayımıyla yapılan analiz ile iki boyutlu elastisiteden bulunan sonuçlara çok yakın sonuçlar elde edilmektedir.
- Yay katsayıları büyüdükçe uç momentler büyümekte, buna karşılık açıklık sehimleri küçülmektedir.
- Yay katsayıları büyüdükçe, sistem deplasmanları küçülmekte, yay katsayıları limit olarak sonsuz büyük değerler aldığı zaman sistem her yayla bağlı noktada rijit bağlanmış gibi davranmaktadır.
- Sistemdeki yay katsayıları küçüldükçe, sistem deplasman değerleri büyümektedir. Yay katsayılarının sıfır limit değere varması durumunda sistem yay bulunan noktalarda mafsalla bağlanmış gibi davranmaktadır.

Kaynaklar

- Ackroyd MR. ve Gerstle, K.H., (1983). Elastic stability of flexibly connected frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **109**, 1, 241-245.
- Akavcı, S.S., (1994). Uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin stabilite analizi. Yüksek lisans tezi, *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana*.
- Akkaya, F., (1991). Düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin statik analizi için bir bilgisayar programı. Yüksek lisans tezi, *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana*.
- Aksoğan, O., Oskouei, A.V. ve Akavcı, S.S., (1993). Uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin nonlineer analizi. 7. Prefabrikasyon Sempozyumu Bildirileri, İstanbul, XI-1-21.
- Aksogan, O., Akavcı, S.S. ve Görgün, H., (2005). Analysis of frames with flexible connections, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **20**, 1, 1-11.
- Anderson, D., Colson, A. ve Jaspert, JP., October (1993). Connections and frame design for economy, *New Steel Construction*, 30-33.
- Azizaminani, A. ve Radziminski, J.B., (1989). Static and cyclic performance of semi-rigid steel beam-to-column connections, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **115**, 12, 2979-2999.
- Cunningham, R., (1990). Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork, *The Structural Engineer*, **68**, 5, 85-92.
- Diñer, R., (1991). Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin nonlineer analizi için bir bilgisayar programı. Yüksek lisans tezi, *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana*.
- Erdem, H., ve Aksoğan O., (1994). The analysis of frames consisting of members connected to their rigid end sections by nonlinear rotational springs. *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **9**, 1, 33-46.
- Girijavallabhan, C.V., (1969). Analysis of shear wall openings. *Journal of Structural Division*, ASCE, **95**(10): 2093-2103.
- Görgün, H., (1993). Düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin nonlineer analizi. Yüksek lisans tezi, *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana*.
- Karacan, S. S., (2011). Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan ve düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin nonlineer analizi. Yüksek lisans tezi, *DÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır*.
- Livesley, R.K., (1964). Matrix methods of structural analysis, Permagon Press, Inc., New York, N.Y.
- Monforton, A.R. ve Wu, T.S., (1963). Matrix analysis of semi-rigidly connected frames, *Journal of Structural Division*, ASCE, **89**, 13-42.
- Popov, E.P., Petersson, H., ve Le, D.Q., (1979). Program Subwall, Finite element analysis of structural walls. *ACI Journal*, **76**, 30, 679-696.
- Romstad, K.M. ve Subramanian, C.V., (1970). Analysis of frames with partial connection rigidity, *Journal of Structural Division*, ASCE, **96**, 2283-2300.
- Stelmack, T.W., Marley, MJ. ve Gerstle, KR., (1986). Analysis and tests of flexibly connected steel frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **112**, 7, 1573-1588.
- Yılmaz, S., (2008). Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin nonlineer analizi. Yüksek lisans tezi, *DÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır*.
- Yu, CR. ve Shanmugam, N.E., (1986). Stability of frames with semi-rigid joints, *Comput. Struct.*, **23**, 5, 639-648.