

Hava Taşıtlarının Uçuş Kontrolü için Doğrusal Kuadratik Regülatör Yöntemi ile Optimal Kontrolör Tasarımı

Mehmet Cem ÇATALBAŞ¹, Zehra URAL BAYRAK², Arif GÜLTEN¹

¹Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Elazığ
²Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır
zural@dicle.edu.tr

(Geliş/Received: 01.12.2014; Kabul/Accepted: 05.05.2015)

Özet

Hava taşıtlarının kontrol dinamikleri, kontrol mühendisliğinin önem arz eden konularından biridir. Bu çalışmada öncelikle hava taşıtları için uzun periyot ve kısa periyot kavramlarına değinilmiştir. Sonrasında doğrusal kuadratik regülatör tasarımının aşamaları ve gerçekleştirilmesi anlatılmıştır. Örnek uygulama olarak bir Boeing 747 uçağının belli parametreler ışığında durum uzay denklemi elde edilmiştir. Ve bu sisteme ilişkin doğrusal kuadratik regülatör tabanlı optimal kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bu sayede kararsız olan hava taşıtlarının hareket dinamikleri, kontrol edilebilir hale getirilir. Doğrusal kuadratik regülatör tasarımındaki Q ve R parametreleri değiştirilerek sistemin geçici rejim karakteristiklerine olan etkisi incelenmiştir. Ayrıca hava taşıtlarının, uzun periyot ve kısa periyottaki davranışlarını belirleyen parametreler irdelenmiştir. Tasarlanan doğrusal kuadratik regülatör yöntemi ile örnek bir hava taşıtlarının hareketi, kontrol edilebilir hale getirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hava taşıtları kontrolü, Lineer kuadratik regülatör, Optimal kontrol teorisi, Uçuş kontrol sistem tasarımı.

OPTIMAL CONTROLLER DESIGN VIA LINEER QUADRATIC REGULATOR METHOD FOR FLIGHT CONTROL OF AIRCRAFT

Abstract

Control dynamics of the aircraft is one of the important issues in the control engineering. In this study, the term of longitudinal period and short period for the aircraft has been firstly mentioned. Then, steps and implementation of the linear quadratic regulator design have been expressed. State space equation of a Boeing 747 aircraft in consideration of specific parameters has been obtained by a sample application. Design of the linear quadratic regulator based optimal control design has been performed for this system. Thus, instable motion dynamics of the aircraft can be controlled dynamically. Its effects to transient characteristics of the system have been investigated by changing of Q and R parameters in linear quadratic regulator design. In addition, the parameters determining the behaviour of the longitudinal period and short-period of the aircraft have been examined. Motion of a sample aircraft becomes controllable with the designed linear quadratic regulator.

Keywords: Aircraft control, Lineer quadratic regulator, Optimal control theory, Flight control system design.

1. Giriş

Hava taşıtları ve bunların hareket karakteristiği kontrol mühendisliğinin önem arz eden konularının başında gelmektedir. Günümüz dünyasında insansız hava taşıtları kullanımının artmasına paralel olarak hava taşıtlarının kontrolü ve hareket dinamikleri konusu oldukça popülerleşmektedir [1-5]. Bu çalışmada, hava taşıtlarının hareketlerini belirleyen parametreler ve bu parametrelerin iyileştirilmesi süreci

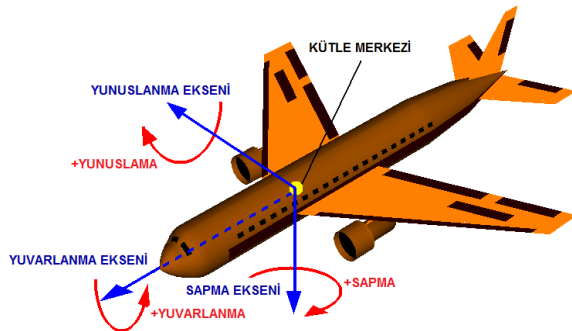
irdelenmiştir. Hava taşıtlarının hareketleri kısa periyotlu ve uzun periyotlu hareketler olarak iki ana başlık altında incelenebilir. Bu çalışma kapsamında uzun periyot sürecindeki kararsız davranışların elimine edilerek sistemin kararlı ve kontrol edilebilir hale getirilmesi amaçlanmıştır. İlgili iyileştirme sürecinde optimal kontrol teorisinde sıklıkla kullanılan doğrusal kuadratik regülatör (LQR) yöntemi kullanılmıştır. LQR yöntemi sonucunda sistemin davranışını

belirleyen Q ve R parametre değişimlerinin sistem davranışı üzerindeki etkisi irdelenmiştir.

2. Uçak Dinamiklerinin İrdelenmesi

Hava taşıtlarının hareket dinamikleri uzun periyot ve kısa periyot olarak incelenebilir. Uçağın davranışını belirleyen ve temel karakteristiğini oluşturan yapı uzun periyot olarak adlandırılır. Sistemin kararlı hale gelmesi ve kontrol edilebilmesi için öncelikle uzun periyot davranışını belirleyen köklerin kararlılık kriterini sağlaması gerekmektedir. Hava taşıtları için kontrol yapısı tasarlanırken belirtilen uzun periyot yapısının iyileştirilmesi esas alınarak gerçekleştirilir [1,6].

Şekil 1'de havacılıkta kullanılan yunuslama (pitch), sapma (yaw) ve yuvarlanma (roll) kavramlarının, hava taşıtı üzerindeki gösterimi bulunmaktadır [7]. Hava taşıtlarına uygulanacak olan optimal kontrol tasarımı ile hava taşıtının bu eksenler üzerindeki hareketlerinin daha kararlı ve kısa sürede gerçekleşmesi öngörülmektedir.

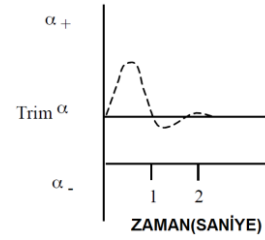


Şekil 1. Yunuslama, sapma ve yuvarlanma kavramlarının gösterimi

2.1. Kısa periyot (Short period)

İki farklı yunuslama-yükselme osilasyonu vardır; yüksek sönüm oranına sahip olan kısa periyot olarak bilinir. Genellikle kısa periyodun sönümlenme oranı yaklaşık $\zeta_s = 0.3$ veya daha fazladır. Sönüm oranı daha düşük olan ve daha çok bilinen periyot ise uzun periyot yada phugoid mod olarak adlandırılır. Uzun periyot için sönüm oranı yaklaşık olarak $\zeta_p = 0.05$ veya daha azdır. Bu bilgiler ışığında uzun periyot ve kısa periyot süreleri arasında sistem parameterlerine bağlı olarak yaklaşık 50 kat bir oran olabilmektedir [6].

Uçağın yükseldiği veya manevra yapıldığı süreçlerde ilk olarak kısa periyot etkilidir. Hava akımındaki ani bir değişim veya bir fırtına durumu da hava taşıtının kısa periyot olarak adlandırılan geçici rejim karakteristiği göstermesine neden olabilir. Uçağın temel hareketinde ince ayar değişiklikleri yapılabilmektedir. Bu ayarlar *trim* olarak adlandırılmaktadır. Yunuslama açısındaki (α) ince değişimlerin zamanla değişimi Şekil 2'de gösterilmektedir [6].



Şekil 2. Yunuslama açısının değişimi

Yunuslama açısının değişimine bağlı olarak uçak hızlı bir şekilde yüksek salınımlar yapar ve yunuslamanın orijinal açısını yeniden yakalar veya bir pilot girişi ve uçağın değişen pozisyonunda yeni bir yunuslama açısı değeri oluşur.

Uçağın diğer parçalarının da sönümlenmeye (osilasyona) katkıda bulunmasına rağmen kuyruk hareketi daha fazla sönümlenme oluşturur. Kısa periyot osilasyonu süresince, uçak kendi ağırlık merkezi etrafında sendeler. Kısa periyodun pozitif sönümlenmesi oldukça önemlidir. Uçak aniden bölümler içine dalgalanma yapmaktadır. Kısa periyot, pilot tarafından oluşturulan osilasyonların gerçekleştiği bir alandır. Çünkü pilotun cevabındaki tipik gecikme zamanı (yaklaşık 1-2 saniye) ile kısa periyot süresi hemen hemen aynıdır. Bunun bir sonucu olarak, pilot bir osilasyona cevap verdiği zamanlarda, pilotun belirlediği kontrol girişi faz dışıdır ve düzeltmeye çalıştığı hareket etkisini yok etmektense bu etkiyi kuvvetlendirebilir.

Genel tanım olarak kısa periyodu; uçağın yönelimini ve manevrasını belirleyen ve gerçekleşmesi uzun periyoda oranla oldukça kısa süren bir zaman dilimi olarak tanımlayabiliriz [2,6].

2.2. Uzun periyot (Phugoid mode- Longitudinal motion)

Uzun periyot (hafif sönümlü veya phugoid mod), kısa periyottan farklı olarak sönümlenmesi çok uzun süren bir süreçtir. Uzun periyotun oluşturduğu salınımları sonlandırmak dakikalar alabilir. Fakat bu çok sık oluşmaz. Kısa periyodun aksine uzun periyot, pilotun kolayca müdahale edebileceği ve uçağı yeniden denge haline getirebileceği kadar uzundur. Genellikle uzun periyot; yunuslama ile yüksenildiğinde uçağı yavaşlatarak yaklaşık 20 mil/saat değerinde sabit tuttuğu gözlemlenir.

En üstteki ve alttaki yunuslama irtifası yaklaşık olarak dagedeki orjinal yunuslama yüksekliği ile aynı olacaktır. Minimum hız maksimum yükseklik noktasında, maksimum hız ise minimum yükseklikte meydana gelecektir. Bu durum Şekil 3'te gösterilmektedir.

Uzun periyot süresince uçak, dengeyi yeniden kazanana kadar periyodik olarak yükseklik ve hava hızına (potansiyel ve kinetik enerji) bağlı olarak Şekil 4'te gösterildiği gibi sabit bir saldırı açısını (α) korur. Yunuslama oranı ve maksimum yunuslama yüksekliğindeki değişim her osilasyon ile birlikte azalacaktır [6].

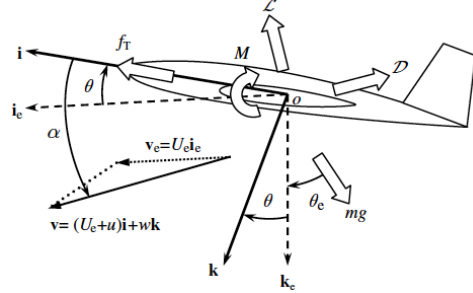


Şekil 3. Hız ve yükseklik değişimi

2.3. Hava taşıtlarının hareket denklemlerinin elde edilmesi

Doğrusallaştırma, araçların doğrulanması ve çeşitli uçuş rejimlerinde durum-uzay matrisinin elde edilmesi için simülasyonun içine basit bir lineer uçak modelini katarak geliştirilmektedir [2,4,8]. Eşitliklerde tanımlanan sabitler; X_u , X_a , X_q , Z_u , Z_a , Z_q , M_u , M_a , M_q : trim durumundaki

hava taşıtlarına ait türev sabitleri, J_{yy} : başlangıç durumundaki kütle moment sabiti, X_{δ} , X_T , Z_{δ} , Z_T , M_{δ} , M_T , M_q : trim durumundaki hava taşıtlarına ait kontrol türev sabitleri şeklinde tanımlanmıştır [8,9].



Şekil 4. Hava taşıtlarının parametrelerinin gösterimi [1]

$$m\dot{u} = X_u u + X_\alpha \alpha + X_q q - mg\theta \cos\theta_e \quad (1)$$

$$mU(\dot{\alpha} - q) = Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_\alpha \dot{\alpha} + Z_q q - mg\theta \sin\theta_e \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3)$$

$$J_{yy}\dot{q} = M_u u + M_\alpha \alpha + M_q q + M_\alpha \dot{\alpha} \quad (4)$$

Bu denklemler durum-uzay formunda Eşitlik 5'deki gibi ifade edilmiştir. Burada u : gövde eksenine boyunca uçağın hızı, a : gövde eksenine dik olarak uçağın hızı, θ : gövde eksenine ve yatay arasındaki açı, q : uçağın açısal hızını (yunuslama oranını), m : hava taşıtlarının kütle oranını, U : eksensel hız vektörünü etmektedir [1,2]. Kontrol girişine ait parametreler ise δ_E : elevator saptırma açısını, β_T : uçağın yan kayma açısını temsil etmektedir.

A_{Long} ise hava taşıtlarının uzlamsal hareketi için tanımlanmış durum dinamikleri matrisidir.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{a} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = A_{Long} \begin{Bmatrix} u \\ a \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} \quad u = \begin{Bmatrix} \delta E \\ \beta T \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Eşitlik 6'da uzlamsal mod kontrol katsayıları matrisi gösterilmektedir. Eşitlik 7'de uzlamsal mod hareketleri için durum dinamikleri matrisinin elde edilmesini gösterilmektedir [1].

$$B_{Long} = \begin{bmatrix} \frac{X_\delta}{m} & \frac{X_T}{m} \\ \frac{Z_\delta}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_T}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} \\ \frac{M_\delta}{J_{yy}} + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_u}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} & \frac{M_T}{J_{yy}} + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_T}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A_{Long} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_\alpha}{m} & 0 & -g\cos\theta_e \\ \frac{Z_u}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_\alpha}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} & -\frac{mg\sin\theta_e}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{mU + Z_q}{mU - Z_{\dot{\alpha}}} \\ \frac{M_u}{J_{yy}} + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_u}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} & \frac{M_\alpha}{J_{yy}} + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\alpha}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} & -\frac{M_{\dot{\alpha}}(mg\sin\theta_e)}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} & \frac{M_q}{J_{yy}} + \frac{M_{\dot{\alpha}}(mU + Z_q)}{J_{yy}(mU - Z_{\dot{\alpha}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Uzlamasal mod, farklı kuadratik form çiftlerine ayrılmış kuartik karakteristik denklemlerinden belirlenmiştir.

$$|sI - A_{Long}| = (s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2) = 0 \quad (8)$$

ω_p ve ζ_p ; uzun periyodun doğal frekansı ve sönümlenme oranını, ω_s ve ζ_s ise kısa periyodun doğal frekansı ve sönümlenme oranını temsil eder [1].

3. Doğrusal Kuadratik Regülatör

Optimal kontrol teorisinin temelinde yatan unsur minimum maliyet ile sistemin devamlılığının sağlanmasıdır. Bu amaçla sistemin davranış yapısını belirleyen kontrolör yapıları tasarımı gerekmektedir. Bunun için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerin başında doğrusal kuadratik regülatör (LQR) yöntemi gelmektedir. Bu yöntem sayesinde sistemin kontrolü için gerekli optimal kontrolör tasarımı kapalı çevrim yapıya ait kutupların manipülasyonuna gerek kalmadan optimal bir şekilde hesaplanabilmektedir. LQR yöntemi sistemin karakteristiğini optimize edecek şekilde bir kazanç değeri (K) belirlenir. Doğrusal kuadratik regülatör sisteminin uygulanma esası, belirlenen maliyet fonksiyonunun minimizasyonu şeklindedir. Eşitlik 9'da bir sisteme ait genel durum denklemi gösterilmektedir. Bu durum denkleminde ait maliyet fonksiyonu Eşitlik 10'da gösterilmektedir. Eşitlik 11 ve 12'de ise aynı

durumların ayrık zaman için gösterimi bulunmaktadır. $x=[nx1]$ durum vektörünü, $y=[mx1]$ çıkış vektörünü, $u=[rx1]$ giriş vektörünü, $A=[n \times n]$ durum matrisini, $B=[n \times r]$ giriş matrisini, $C=[m \times n]$ çıkış matrisini ve $D=[m \times r]$ ileri yön matrisini temsil etmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$J(u) = \int_0^T (x(t)^{Tr} Q x(t) + u(t)^{Tr} R u(t) + (x(T)^{Tr} Q_f x(T))) dt \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k+1] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \quad (11)$$

$$J[u] = \sum_{k=0}^{N-1} (x[k]^{Tr} Q x[k] + u[k]^{Tr} R u[k]) + (x[N]^{Tr} Q_f x[N]) \quad (12)$$

Bu bilgiler ışığında T ve N değerleri sonlu veya sonsuz olabilmektedir. Q ve R değerleri LQR yöntemi ile optimal kontrolör tasarımı için kullanıcı tarafından belirtilen parametrelerdir. Bu değerler Eşitlik 13'te gösterildiği gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} Q &= Q^{Tr} \geq 0 & Q_f &= Q_f^{Tr} \geq 0 \\ R &= R^{Tr} > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

LQR yöntemi gerçekleştirilmeden önce sistemin kontrol edilebilirliği test edilmelidir.

Bunun için kontrol matrisinin hesaplanması gerekmektedir. Kontrol matrisi durum matrisi ve girdi matrisi üzerinden hesaplanmaktadır. Kontrol edilebilirlik matrisinin ($R_{n \times nr}$) hesabı Eşitlik 14'te gösterildiği gibidir.

$$R = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (14)$$

Sistemin kontrol edilebilirliği için kontrol edilebilirlik matrisinin derecesi n değerine eşit olmalıdır [10,11].

$$\text{rank}(R) = n \quad (15)$$

Sistemin kontrol edilebilirliğinin gözlenmesi ve uygunluğu sonucunda ilgili optimal LQR kontrolör tasarlanır [1]. Eşitlik 10 veya 12'de gösterilen maliyet fonksiyonunu minimize edecek kontrol yapısı tasarlanır. Bu kontrolör parametreleri $u(t), t \in [0, T]$ ile alakalı olarak başlangıç durumundaki sistemi düzenleyeceği öngörülmektedir. Q ve R parametrelerin seçim süreçleri ile alakalı çeşitli varsayımlar bulunmaktadır. Q değeri genellikle $I_{n \times n}$ şeklinde, R değeri ise $I_{m \times m}$ boyutlarındaki birim matrislerden seçilmektedir.

Bu çalışma kapsamında, Q ve R parametrelerin seçimlerinin sistem davranışı üzerindeki etkisi irdelenecektir. LQR yöntemi ile optimal kontrolör elde edilmesi sürecinde, Riccati Diferansiyel Denklemi kullanılır ve bu denklem belirtilen $P(t), t \in [0, T]$ parametreler ışığında hesaplanır. Eşitlik 16'da Riccati denkleminin LQR yöntemi için gösterimi bulunmaktadır. Riccati denklemlerinin analitik çözümleri bulunmamaktadır. Fakat ilgili denklemin özel çözümlerinin bulunması sayesinde ilgili denklem doğrusallaştırılarak çözülebilir.

$$-\dot{P}(t) = A^T r P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T r P(t) + Q \quad (16)$$

$$P(T) = Q_f$$

Eşitlik 16'da gösterilen denklemden, eşitliğin zamanda geriye doğru bir karakteristik gösterdiği gözlemlenebilir. $T \rightarrow \infty$ iken, Riccati diferansiyel denklemlerinin sürekli durum çözümü olan P değeri optimal kontrolör parametresi olan $P(t)$ ile yer değiştirir. Bu P değeri pozitif tanımlı cebirsel Riccati denkleminin çözümünü ifade etmektedir. İlgili

denklem Eşitlik 17'de gösterilmektedir.

$$0 = A^T r P + PA - PBR^{-1}B^T r + Q \quad (17)$$

İlgili denklem ile alakalı sürekli zamanda tanımlı optimal kontrol değeri Eşitlik 18'de gösterilmektedir.

$$u(t) = (-R^{-1}B^T r P(t))x(t) \text{ veya} \quad (18)$$

$$u(t) = (-R^{-1}B^T r P)x(t)$$

Ayrık zamanda Riccati diferansiyel denklemi ile optimal kontrol tasarımı çözümü ise Eşitlik 20'de gösterildiği gibidir.

$$P[k], k \in \{0, \dots, N\} \quad (19)$$

$$P[n] = Q_f$$

$$P[k] = Q + A^T r P[k+1]A - A^T r P[k+1]B(R + B^T r P[k+1]B)^{-1}B^T r P[k+1]A \quad (20)$$

Eşitlik 20 ile alakalı ayrık zamanda tanımlı optimal kontrol değeri Eşitlik 21'de gösterilmektedir [1,10,11].

$$u[k] = (-(R + B^T r P[k+1]B)^{-1}B^T r P[k+1]A)x[k] \quad (21)$$

$$u[k] = (-(RB^T r PB)^{-1}B^T r PA)x[k]$$

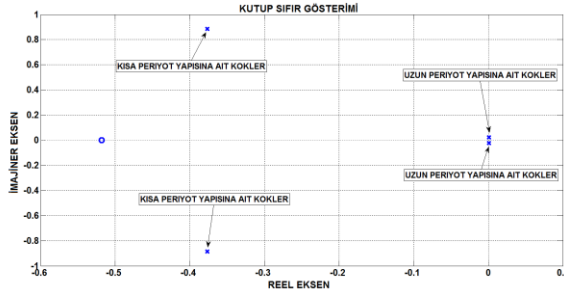
4. Hava Taşıtları İçin Optimal Kontrolör Tasarımı

Çalışmanın bu aşamasında LQR yöntemi ile hava taşıtları için optimal kontrol tasarımı yapılacaktır. Uygulamanın ilk aşamasında tanımlanmış olan durum uzay denklemleri elde edilecektir ve sonrasında bu durum uzay denklemlerine sahip sistemin kontrol edilebilirliği irdelenecektir. Aşağıdaki durum uzay denklemleri $h=40$ kft yükseklikte ve $V=774$ ft/saniye hızında hareket ettiği ön görülen bir Boeing 747 yolcu uçağı üzerinden elde edilmiştir [2].

$$A_{Long} = \begin{bmatrix} -0.003 & 0.039 & 0 & -0.0322 \\ -0.065 & -0.319 & 7.74 & 0 \\ 0.02 & -0.101 & -0.429 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Şekil 5'te A_{Long} durum uzay matrisine ilişkin özdeğerlerin gösterimi bulunmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi hava taşıtının uzun periyot (phugoid period) davranışına ilişkin özdeğerleri sağ yarı düzlemde bulunmaktadır. İlgili sisteme ilişkin özdeğerler $-0.377 \pm 0.885i$ (kısa periyot) ve $0.00102 \pm 0.0212i$ (uzun periyot) şeklindedir.

Eşitlik 23-26'da hava taşıtına ait sönümlenme oranları ve osilasyon periyotlarının hesaplanması gösterilmektedir. Eşitliklerde de görüldüğü gibi örnek hava taşıtı için, uzun periyodun kısa periyoda oranı yaklaşık 40 kat şeklindedir ve uzun periyodun sönümlenme değeri kısa periyodun sönümlenme değerinin yaklaşık 8 katıdır [2,4].



Şekil 5. A_{Long} durum uzay matrisine ait kutupların gösterimi

Sönümlenme Oranı (Kısa periyot)

$$\zeta_s = \tan^{-1} \left(\frac{0.885}{0.377} \right) \quad (23)$$

$$= 66.92^\circ \Rightarrow \cos(66.92) = 0.392$$

Sönümlenme Oranı (Uzun periyot)

$$\zeta_p = \tan^{-1} \left(\frac{0.0212}{0.00102} \right) \quad (24)$$

$$= 0.0481 \Rightarrow \cos(0.0481) = 0.0481$$

Osilasyon periyodu (Kısa periyot)

$$T = \frac{2\pi}{0.885} = 7.09 \text{ (saniye)} \quad (25)$$

Osilasyon periyodu (Uzun periyot)

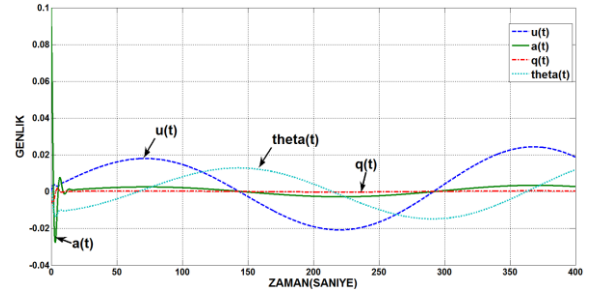
$$T = \frac{2\pi}{0.0212} = 296.376 \text{ (saniye)} \quad (26)$$

Tablo 1. A_{Long} durum matrisine ait parametreler

Özdeğerler (Eigenvalue)	Sönümlenme Oranı (Damping Ratio)	Osilasyon Periyodu (s)
$0.377+0.885i$ (Kısa Periyot)	0.392	7.09
$-0.377-0.885i$ (Kısa Periyot)	0.392	7.09
$0.00102+0.0212i$ (Uzun Periyot)	0.0481	296.376
$0.00102-0.0212i$ (Uzun Periyot)	0.0481	296.376

Şekil 6'da Eşitlik 27'de belirtilen başlangıç şartlarına sahip A_{Long} durum uzay matrisinin zamana göre değişimi gösterilmektedir.

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ a_0 \\ q_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$



Şekil 6. $u(t)$, $a(t)$, $q(t)$ ve $\theta(t)$ değerlerinin zamana göre değişimi

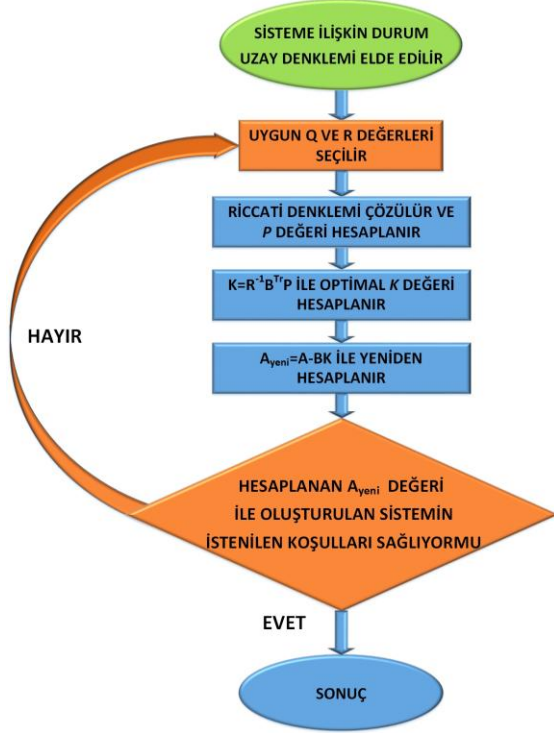
LQR tabanlı optimal kontrol tasarlamadan önce sistemin kontrol edilebilirliği irdelenmelidir. Bu aşamada A_{Long} matrisine ve B matrisine bakılarak sistemin kontrol edilebilirliği test edilmelidir. Yolcu uçağına ait durum uzay matrisine ait parametreler Eşitlik 28'de gösterildiği gibidir.

$$B = \begin{bmatrix} 0.01 & 1 \\ -0.18 & -0.04 \\ -1.16 & 0.598 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu bilgiler ışığında kontrol edilebilirlik matrisi olan R 'nin derecesi $rank(R)=4$ olarak bulunmaktadır ve bu şekilde sisteme kontrol yapısı tasarlanabilmektedir. Şekil 7'de LQR uygulamasına ait akış şeması verilmektedir [10].



Şekil 7. Doğrusal Kuadratik Regülör uygulamasının akış şeması

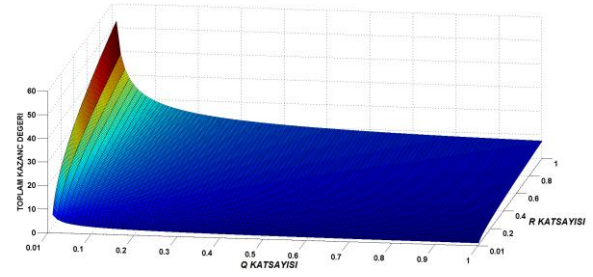
LQR uygulaması sürecinde geçici rejim ile ilintili olan maksimum aşma (maximum overshoot) ve durulma zamanı (settling time) gibi parametreler, Q ve R değişimine bağlı olarak irdelenmiştir.

Şekil 8'de LQR uygulaması ile kontrol uygulaması sürecinde belirlenen, Q ve R parametrelerinin değişiminin hesaplanan K değerlerinin genlik toplamları üzerindeki değişimi gösterilmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi Q ve R değerlerinin artması, K değerinin genlik toplamlarını artırmaktadır.

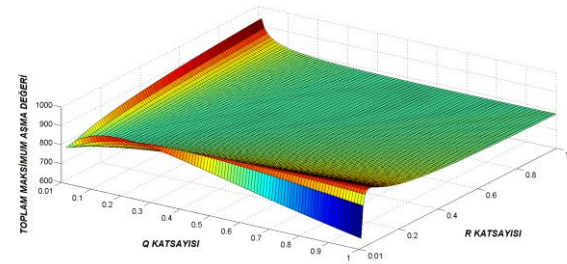
Şekil 9'da ise Q ve R değerlerinin sistemin girişlerine uygulanan birim basamak girişe karşı oluşturduğu maksimum aşma değerlerinin toplamı üzerinden irdelenmesi gerçekleştirilmektedir.

Şekil 10'da ise Q ve R değerlerinin sistemin girişlerine uygulanan birim basamak girişe karşı oluşturduğu durulma zamanı değerlerinin

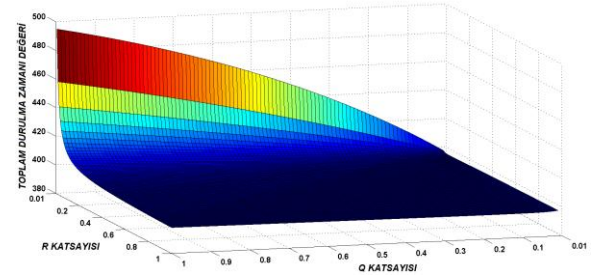
toplamı üzerinden irdelenmesi gerçekleştirilmektedir.



Şekil 8. Toplam kazanç değerinin Q ve R katsayılarına göre değişimi



Şekil 9. Toplam maksimum aşma değerinin Q ve R katsayılarına göre değişimi



Şekil 10. Toplam durulma zamanı değerinin Q ve R katsayılarına göre değişimi

Kontrol tasarımı yapılırken kullanıcı, gerçekleştirdiği sistemin mümkün olan en kısa sürede geçici rejimden çıkıp sürekli rejime geçmesini ister. Geçici rejimdeki sistem davranışına ait parametrelerin önemi kullanıcının beklentileri ile ilintilidir. Hava taşıtlarında geçici rejimin kısa sürede sonlanması ve maksimum aşma gibi sistemin geçici rejim davranışını belirleyen istenmeyen parametrelerin oldukça düşük olması istenmektedir [12,13]. Şekil 10'da görüldüğü gibi R katsayısının artmasına bağlı olarak durulma zamanı azalmaktadır.

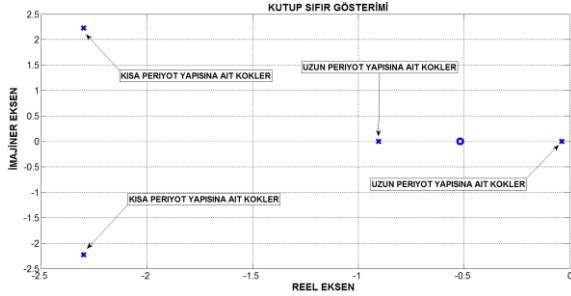
Eşitlik 29'da LQR yöntemi ile elde edilmiş A_{yeni} ve K değerleri gösterilmektedir.

$$R = I_{2 \times 2} \quad Q = I_{4 \times 4}$$

$$A_{yeni} = \begin{bmatrix} -0.934 & -0.223 & -1.012 & 0.517 \\ 0.0337 & -0.423 & 7.296 & -0.138 \\ -0.137 & -1.006 & -4.178 & -1.316 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.3424 & -0.642 & -2.696 & -0.8805 \\ 0.9280 & 0.2684 & 1.0390 & 0.4943 \end{bmatrix}$$

Şekil 11’de LQR uygulanması sonucu elde edilen A_{yeni} matrisinin yeni kökleri gösterilmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi ilk aşamada kararsız sistem olan LQR yöntemi ile kararlı bir hale getirilmiştir.



Şekil 11. A_{yeni} durum uzay matrisine ait kutupların gösterimi

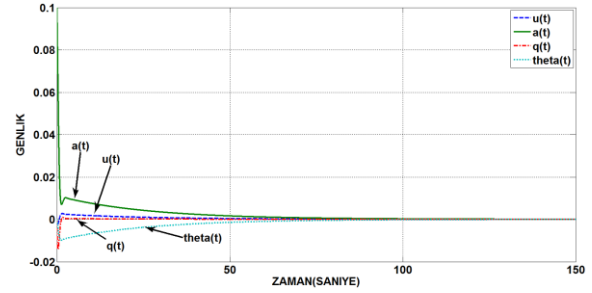
Tablo 2’de LQR sistemi ile kararlı hale getirilen hava taşıtlarının durum dinamikleri matrisine ilişkin özdeğerler, sönümlenme oranları ve osilasyon periyotları gösterilmektedir.

Tablo 2. A_{yeni} durum matrisine ait parametreler

Özdeğerler (Eigenvalue)	Sönümlenme Oranı(Dampin g Ratio)	Osilasyon Periyodu(saniye)
-2.30 + 2.230i (Kısa Periyot)	0.718	2.817
-2.30 - 2.230i (Kısa Periyot)	0.718	2.817
-0.9040 (Uzun Periyot)	1	—
-0.0386 (Uzun Periyot)	1	—

Eşitlik 27’de belirtilen başlangıç şartlarına sahip A_{yeni} durum uzay matrisi Eşitlik 29’da hesaplanmıştır. Hesaplanan A_{yeni} matrisine ait değişkenlerin zamana göre değişimi Şekil 12’de

gösterilmektedir.



Şekil 12. A_{yeni} durum uzay matrisine ait $u(t)$, $a(t)$, $q(t)$ ve $\theta(t)$ değerlerinin zamana göre değişimi

Eşitlik 30’da farklı R ve Q değerleri için LQR yöntemi ile elde edilmiş A_{yeni} ve K değerleri gösterilmektedir.

$$R = I_{2 \times 2} \quad Q = 0.5I_{4 \times 4}$$

$$A_{yeni} = \begin{bmatrix} -0.6630 & -0.1446 & -0.8352 & -0.3590 \\ 0.0026 & -0.3872 & 7.3929 & -0.1004 \\ -0.1071 & -0.7012 & -3.3987 & -0.9324 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.2295 & -0.4206 & -2.1186 & -0.6321 \\ 0.6577 & 0.1878 & 0.8563 & 0.3331 \end{bmatrix}$$

Tablo 3’de farklı Q ve R değerlerine bağlı olarak hesaplanmış özdeğerler, sönümlenme oranları ve osilasyon periyotları gösterilmektedir.

Tablo 3. A_{yeni} Q = 0.5I durum matrisine ait parametreler

Özdeğerler (Eigenvalue)	Sönümlenme Oranı(Dampin Ratio)	Osilasyon Periyodu (saniye)
-1.88 + 1.93i (Kısa Periyot)	0.699	3.25
-1.88 - 1.93i (Kısa Periyot)	0.699	3.25
-0.6410 (Uzun Periyot)	1	—
-0.0384 (Uzun Periyot)	1	—

Tablo 2 ve 3 arasında kıyaslama yapıldığında, farklı Q parametrelerine bağlı olarak kısa periyot sürecine ilişkin sistem davranışının farklılık gösterdiği görülmektedir.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada bir hava taşıtı için LQR tabanlı optimal kontrol tasarım süreci irdelenmiştir. LQR tasarımında belirlenen Q ve R parametrelerinin değişiminin sistemin davranışı üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Q ve R değişime bağlı olarak sistemin karakteristik köklerinin konumları değişmiş ve buna bağlı olarak sistemin davranışları değişmiştir. Düşük Q ve yüksek R değerlerinin sistemin durulma zamanını azalttığı gözlenmiştir. Ayrıca yüksek Q ve düşük R değerlerinin sistemin maksimum aşmasını azalttığı gösterilmiştir. LQR yöntemi ile tasarlanan optimal kontrolör ile sistem kararlı bir hale getirilmiştir. Ayrıca uzun periyot (phugoid mode) sürecine etki eden karakteristik kökler kararlı bir hale getirilmiş ve kısa periyodun osilasyon periyodu kısaltılarak sistemin davranışı iyileştirilmiştir.

6. Kaynaklar

1. Tewari, A. (2011). *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft And Rockets*. Wiley.
2. Bryson, A.E. (1994). *Control of Spacecraft and Aircraft*, Princeton University Press.
3. Kowaleczko, G., Wachlaczzenko, M. (2012). Aircraft Dynamics During Flight in Icing Conditions. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **50 (1)**, 269-284, Warsaw.
4. Franklin, J.A. (2002). *Dynamics, Control, and Flying Qualities of VSTOL Aircraft*. AIAA.
5. Wright, J.R., Cooper, J.E. (2008). *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*, John Wiley & Sons.
6. Craewford, B. (2009). *Longitudinal Dynamic Stability. Flight Emergency & Advanced Maneuvers Training*. Inc. DbA Flightlab.
7. [Http://www.Grc.Nasa.Gov/www/K-12/Airplane/Rotations.Html](http://www.Grc.Nasa.Gov/www/K-12/Airplane/Rotations.Html), Son Erişim Tarihi: 18/11/2014.
8. Russell, N.K., Bordignon, K.A. (2011). *Aircraft Design Simulation Verification And Testing*. AIAA Modeling And Simulation Technologies Conference. 8-11 August 2011, Portland, Oregon.
9. Chauvin, Y., Rumelhart, D.E. (1995). *Backpropagation: Theory, Architectures, and Applications*. Psychology Press.
10. Choi, J. (2010). ME/ECE 851-Linear Systems and Control, Lecture 14 (Linear Quadratic Regulator (LQR), Fall 2010.
11. Nazarathy, Y., Pulemotov, A. (2012). MATH4406 (Control Theory) Unit 6: The Linear Quadratic Regulator (LQR) and Model Predictive Control (MPC), September 12.
12. Chudoba, B. (2002). *Stability and Control of Conventional and Unconventional Aircraft Configurations*. Bod – Books On Demand.
13. Duke, E. L. (1988). *Linear Derivation and Definition of A Linear Aircraft Model*. Nasa Reference Publication.