Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 53(1), 2024, 87-130
https://dergipark.org.tr/tr/pub/cuefd

Square Root Expressions and Irrational Numbers in Middle School Mathematics Textbooks Throughout the History of the Republic*

Özge ERDEM UZUN [a] (ORCID ID – 0000-0002-1812-0276)**
Şenol DOST [a] (ORCID ID – 0000-0002-5762-8056)

[a] Hacettepe University, Faculty of Education, Ankara/Turkey

Article Info

DOI: 10.14812/cuefd.1272501

Article history:
Received 28.03.2023
Revised 03.01.2024
Accepted 26.03.2024

Keywords:
Irrational numbers,
Square root expressions,
Mathematics textbooks,
Mathematics curriculum,
Document analysis.

Research Article

Abstract

Irrational numbers, a fundamental set that extends rational numbers to real numbers, have been a subject of limited study in the context of textbook analyses. This study, therefore, examines how square root expressions and irrational numbers have been addressed in middle school mathematics textbooks throughout the history of the Republic of Türkiye. The research was conducted using a comprehensive approach, with qualitative research methods and content analysis was applied to 37 mathematics textbooks (seven 5th grade, twelve 6th grade, nine 7th grade, and nine 8th grade) from 1932 to 2022. Data were collected from mathematics textbooks available at the Ferit Ragıp Tuncor Archive and Documentation Library affiliated with the Ministry of National Education. The results of this study indicate that changes in mathematics curricula are reflected in textbooks, and this reflection is directly influenced by the learning theory adopted in the curriculum. The study also provides insights into how irrational numbers are introduced in textbooks based on the sequence of topics, and recommendations are made based on the findings.

Cumhuriyet Tarihi Boyunca Ortaokul Matematik Ders Kitaplarında Kareköklü İfadeler ve İrrasyonel Sayılar

Makale Bilgisi

DOI: 10.14812/ cuefd.1272501

Makale Geçmişi:
Geliş 28.03.2023
Düzeltme 03.01.2024
Kabul 26.03.2024

Anahtar Kelimeler:
İrrasyonel sayılar,
Kareköklü ifadeler,
Matematik ders kitapları,
Matematik öğretim programları,
Belge analizi.

Araştırma Makalesi

Öz

İrrasyonel sayılar, rasyonel sayıların gerçel sayılara genişletilmesini sağlayan temel bir kümedir ancak bu kavram ile ilgili ders kitabı analizlerine yönelik çok az araştırma yapılmıştır. Bu çalışmada Cumhuriyet tarihi boyunca ortaokul matematik ders kitaplarında kareköklü ifadelerin ve irrasyonel sayıların öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı incelenmiştir. Nitel araştırma türlerinden belge analizi kullanılarak yürütülen çalışmada 1932'den 2022 yılına kadar toplam 37 adet matematik ders kitabı (yedi 5. sınıf, on iki 6. sınıf, dokuz 7. sınıf ve dokuz 8. sınıf) üzerinde içerik analizi yapılmıştır. Veriler Millî Eğitim Bakanlığına bağlı Ferit Ragıp Tuncor Arşiv ve Dokümantasyon Kütüphanesindeki matematik ders kitapları ile sınırlıdır. Bu çalışmanın sonuçları matematik öğretim programlarındaki değişikliklerin ders kitaplarına da yansıtıldığını ve bu yansımanın öğretim programında benimsenen öğrenme kuramından doğrudan etkilendiğini göstermektedir. Diğer yandan irrasyonel sayıların ders kitaplarında hangi konu sıralamasını takip ederek tanıtıldığına ilişkin sonuçlar elde edilmiş ve sonuçlara bağlı olarak öneriler sunulmuştur.

*This study was produced from the doctoral thesis titled "Constructing the concept of irrational number by middle school students: An analysis based on APOS Theory" conducted by the first author under the supervision of the second author.

[**] **Corresponding Author:** ozge.erdem.uzun@gmail.com

Introduction

The understanding of irrational numbers is necessary for the concept of numbers to be extended from rational numbers to real numbers, as each extension requires the acceptance of new rules and the adoption of a new perspective (Merenluoto & Lehtinen, 2002). Specifically, a deep knowledge of irrational numbers and generally real numbers is necessary to understand the foundations of mathematics and many fundamental calculus concepts such as $\varepsilon - \delta$ definitions, limits, continuity, derivatives, and more (Rizos & Adam, 2022). However, when examining the results of studies focusing on students' or teachers' existing knowledge of irrational numbers, some problems come to the forefront. For example, in a study by Sirotic and Zazkis (2007b) focusing on the understanding of irrational numbers among pre-service mathematics teachers, it was found that there was inconsistency between candidates' intuitions and formal/algorithmic knowledge, and they were unaware of irrational numbers beyond limited examples. Çevikbaş and Argün (2017) studied how secondary mathematics teacher candidates define rational and irrational numbers. The study found that candidates were unsuccessful in distinguishing numbers, was unaware of the equivalence of different representations of a number, believed that the representation format determined the nature of the number, and perceived different representations as different numbers. In Kidron's (2018) study focusing on high school students addressing the problem of the existence of irrational numbers, erroneous ideas were identified, such as students believing that every number is always obtained by dividing two numbers and that a number with an infinite number of digits cannot be represented on the number line. Irrational numbers, a product of centuries of work by mathematicians, are not a concept that students can learn in a few classes (Sirotic & Zazkis, 2007a), and they are among the most challenging number sets in the learning process (Arbour, 2012; Patel & Varma, 2018). The reasons for these difficulties stem from the nature of the concept (Sirotic & Zazkis, 2007a, 2007b), understanding of rational numbers (Voskoglou & Kosyvas, 2012), some irrational numbers' rational approximations (Zazkis & Sirotic, 2010), different representations of numbers (Çevikbaş & Argün, 2017; Guven et al., 2011; Voskoglou & Kosyvas, 2012), or may originate from the mathematics curriculum and textbooks (Erdem-Uzun & Dost, 2023). While it is widely accepted that there may be some difficulties in conveying mathematics to students, it is necessary to present mathematics within the rigid hierarchy and consistent framework of the number system in the curriculum (Fischbein et al., 1995). Otherwise, students who cannot internalize irrational numbers as members of real numbers struggle to distinguish between irrational and complex numbers (Guven et al., 2011).

Sets of numbers and operations defined on them are a fundamental in middle school mathematics education programs. However, when the relevant national curriculum is examined, it has been reported that there are some areas for improvement in teaching irrational numbers due to mathematics education programs and reflection of this in textbooks. For example; it is observed that reasons such as the lack of clarity in the relationship between representations (Bakır, 2011), the use of rational approximations of the number π resulting in the perception of $22/7$ and $3{,}14$ as irrational numbers (Tavşan & Pusmaz, 2020), teaching irrational numbers after the topic of square root expressions (Adıgüzel, 2013), focusing more on square root expressions (Leylek, 2020), insufficient time allocated to irrational numbers (Çevikbaş & Argün, 2017), and ignoring students' prior knowledge in transitions between concepts (Leylek, 2020) make the learning and teaching of the concept of irrational numbers difficult. Textbooks are a fundamental teacher resource (González-Martín et al., 2013). Therefore, examining current textbooks and focusing on improvement is one way to address students' learning difficulties (Hong & Runnalls, 2020). The mathematical content in textbooks should be about teachers, students, and curriculum sources, making textbooks one of the most essential tools for ensuring the feasibility of curriculum implementation. Mathematics textbooks are designed to provide mathematical knowledge, support learning and teaching, be officially approved, and be pedagogically designed (Glasnović Gracin, 2014; Rezat et al., 2021).

Due to the widespread use of mathematics textbooks in education worldwide, a necessity has emerged to research the instructional context of the content in mathematics textbooks (Glasnović Gracin, 2014). In recent years, school textbooks have attracted the interest of the international mathematics education research community and have begun to be seen as a research area (Fan, 2013). Despite the emphasis on topics such as numbers and operations in these studies (Chang & Silalahi, 2017), research on irrational numbers, in particular, is quite limited. In their study examining how irrational and real numbers are introduced in textbooks used in Brazilian state secondary schools, González-Martín et al. (2013) found several key findings. They noted that irrational numbers are generally addressed in the context of decimal representation, there are many implicit assumptions, justifications are based only on examples, and the necessity for introducing "new" numbers is not emphasized. The study also found that presenting a series of rules does not contribute to students' learning of real numbers. Despite the limited importance given to real numbers in primary education, there is an assumption that advanced topics such as limits and derivatives will be well understood when taught. In Türkiye, there has not been a systematic study on irrational numbers in mathematics textbooks (Erdem-Uzun & Dost, 2023). Therefore, the current study is vital for seeking new approaches to teaching the concept of irrational numbers by benefiting from past experiences and deriving new pedagogical ideas from historical knowledge and accumulated insights.

In Türkiye's education system, which has a centralized structure, a national mathematics curriculum and mathematics textbooks are approved by the Ministry of National Education (MoNE) Board of Education (BoE) for specific years. However, primary education in Türkiye consists of two levels: primary school and middle school. As of 2012, the primary school includes grades 1, 2, 3, and 4, and middle school includes grades 5, 6, 7, and 8. Since this study aims to examine how the concept of irrational numbers has been handled in middle school mathematics textbooks throughout the history of the Republic of Türkiye, mathematics curricula were considered first. Since the proclamation of the Republic (1923), the mathematics curricula of middle schools (6th, 7th, and 8th grades) were changed in 1926, 1931, 1938, 1949, 1977, 1990, 1998, 2005, 2013, and 2017. The mathematics curricula of the fifth grade, which was included in primary school until 2012, were changed in 1926, 1936, 1948, 1968, 1983, 1990, 1998, 2005, 2013, and 2017 (Özmantar et al., 2020). In 2017, since the current curriculum objectives follow a teaching sequence from square root expressions to the concept of irrational numbers (MoNE, 2018), the research questions are as follows:

1) How have square root expressions been handled in middle school mathematics textbooks throughout the Republic?

2) How has the concept of irrational numbers been handled in middle school mathematics textbooks throughout the of the Republic?

Method

In this study, which aims to conduct a historical analysis of how the concept of irrational numbers is handled in textbooks in an instructional context, the document analysis method (Bowen, 2009), one of the qualitative research types in which the "how" question is at the forefront, was used. The document analysis method (Bowen, 2009), which is a systematic procedure for reviewing or evaluating any document containing text (Patton, 2015), is defined as "a valuable research method (Merriam & Tisdell, 2016; Morgan, 2022)" in the literature.

Data Collection Process

The study data were obtained from the Ferit Ragıp Tuncor Archive and Documentation Library within the MoNE Board of Education and Discipline. The library in question was created by the individual efforts of Ferit Ragıp Tuncor, who served as the compilation officer of MoNE, by compiling and collecting the works scattered in the warehouses (MoNE, 2023). Although the library, which contains the works of National Education Publications, has a significant collection in terms of the history of Turkish education (MoNE, 2023), the works of some years cannot be accessed for various reasons (such as lack of systematic compilation, prohibition of the use of works belonging to certain publishing houses). As a matter of fact, during the data collection process of this study, no textbooks prepared according to the 1926 and 2013 curricula could be accessed. The textbooks of 1936, 1948, 1983, 1998 in the 5th grade, 1931 in the 7th grade, and 1931, 1938, and 1949 in the 8th grade could not be obtained for the reasons mentioned. Information on mathematics textbooks was obtained from the Education Informatics Network (EBA) of the Ministry of National Education. Since the data collected were obtained through publicly available documents, the current study is in a group of studies that do not require ethics committee permission.

1928, the Arabic alphabet was abolished in Türkiye, and the new Turkish alphabet was adopted instead. Therefore, this study focuses on mathematics textbooks written according to the new Turkish alphabet after 1928, which is also a limitation of this study. A total of 37 mathematics textbooks were identified for document analysis, and each book's year and number of editions were checked regarding their compatibility with the mathematics curriculum. Since the textbooks from some years were the same, they were counted as one, and the more recent textbook was included in the data analysis. It was observed that the textbooks from 1972, 1973, and 1974 were prepared according to the 1977 curriculum rather than the curriculum of the period. Books from the 2018, 2019, 2021, and 2022 printing years are still used as textbooks approved by the Ministry of National Education.

Information about the 5th-grade mathematics textbooks included in the study is given in Table 1, and seven books were accepted as data. Information about 6th-grade mathematics textbooks is given in Table 2, and 12 books were accepted as data. Books from 1937 - 1938 - 1945, 1981 - 1984 - 1985, 1987 - 1988, 1991 - 1992 and 2003 - 2005 were counted as one since they were the same. Information on 7th-grade mathematics textbooks is given in Table 3, and nine books were accepted as data. Books from 1936 - 1937 - 1938 - 1938 - 1941 - 1945, 1972 - 1973 - 1985, 1992 - 1993, 2003 - 2005 and 2009 - 2011 were counted as one since they were the same. Information on 8th-grade mathematics textbooks is given in Table 4, and nine books were accepted as data. Books with 1973 - 1974 and 1978 - 1980 - 1984 printing years were counted as one since they were the same.

Table 1

Information on Grade 5 Mathematics Textbooks

Curriculum	Name of the Textbooks	Year of Publication	Printing House	Authors
1968	İlkokul Matematik Sınıf 5	1977	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Karagöz, Nevin Karagöz
	İlkokullar için Matematik 5	1980	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran
1990	İlkokul Matematik 5	1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Selahattin Meydan, Ali Sait Karataş, İsmail Gümüşel
2005	İlköğretim Matematik 5 Ders kitabı	2009	Saray Matbaacılık – Ankara	Şeref Aktaş, Orhan Çimen, Emel Günhan, Arif Oruç
	İlköğretim Matematik 5 Ders ve Öğrenci Çalışma Kitabı (1. Kitap)	2011	Semih Ofset	Zeynep Feryal Öztürk, Erkan Kişi, Ersü Öztaş, Arif Oruç
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 5	2021	Çağlayan Matbaası – İzmir	Hayriye Cırıtcı, İlker Gönen, Dilara Araç, Murat Özarslan, Neşe Pekcan, Meltem Şahin
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 5. Sınıf	2022	Özgün Matbaacılık – Ankara	Gülçin Göksülük

Table 2

Information on Grade 6 Mathematics Textbooks

Curriculum	Name of the Textbooks	Year of Publication	Printing House	Authors
1931	Orta Mektep Riyaziye Dersleri 1. Kitap	1932	Devlet Matbaası – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Riyaziye Dersleri Hesap 1	1937	Türkiye Basımevi – İstanbul	Komisyon
1938	Ortaokul Kitapları Matematik dersleri Aritmetik 1	1938	Devlet Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri 1	1945	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fazıl Say, Lütfi Atalık, Şerif İnan
1949	Ortaokullar için Matematik Cilt 2	1972	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	-
1977	Ortaokullar için Matematik 1	1973	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	School Mathematics Study Group (SMSC) – Stanford Üniversitesi, ABD Çeviren: Mehmet Gürkan
1949	Matematik Ortaokul 1	1977	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Tahsin Pelit, Seyfettin Aydın, Abdullah Demiralp, İbrahim Bağış, Mehmet Gürkan
1977	Matematik Ortaokul 1	1981	Emel Matbaacılık – Ankara	Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran
	Ortaokul Matematik 1	1984 1985	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Matematik 1	1987 1988	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Doğan Özdoğru, Şerafettin Devecioğlu, Ali Ünal, Menduh Ulusoy, Zakir Doğan, Mustafa Yıldırım, Hasan Has, Hasan Köle, Rıza Şahin, Memduh Akkuş
1990	Ortaokul Matematik 1	1991 1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Rüstem Kaya, Remzi Altınordu, Arif Bayrambaş
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 6	2003	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Şehnaz Bilgi, Hilal Ekmen, Nedim Gürsoy
		2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	

2005	İlköğretim Matematik 6 Ders Kitabı	2011	Semih Ofset	Komisyon
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 6	2019	Koza Yayın – Ankara	Ekrem Aydın, Mehmet Ali Erenkuş
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 6 Ders Kitabı	2021	Başak Matbaacılık – Ankara	Neziha Çağlayan, Aybike Dağıstan, Betül Korkmaz

Table 3

Information on Grade 7 Mathematics Textbooks

Curriculum	Name of the Textbooks	Year of Publication	Printing House	Authors
1938	Ortaokul Kitapları Riyaziye Dersleri Hesap ve Cebir 2	1936	Devlet Basımevi – İstanbul	Komisyon
		1937	Türkiye Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri Aritmetik ve Cebir 2	1938	Devlet Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri 2	1941	Maarif Matbaası – Ankara	Lütfi Atalık, Fazıl Say, Şerif İnan
		1945	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fazıl Say, Lütfi Atalık, Şerif İnan
1949	Ortaokul Kitapları Matematik 2	1950	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Remzi Baykal, Halim Erker, Saim Eğilmez, Şerif Egeli
1977	Matematik Ortaokul 2. Sınıf	1972 1973	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Ölçen, Tahsin Çizenel, İsmail Gökmen
	Ortaokul Matematik 2	1985		
1990	Ortaokul Matematik 2	1992 1993	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Mustafa Balcı, Mustafa Karahan, Hulûsi Yıldırım, Mustafa Özkan
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 7	2003	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fatma Tortumlu, Abdullah Kılıç, Halim Şahin
		2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	
2005	İlköğretim Matematik 7 Ders Kitabı	2009	Başak Matbaacılık – Ankara	Serpil Çiçek Aygün, Nurhayat Aynur, Sema Seher Çuha, Uğur Kahraman, Ufuk

		2011	Ada Matbaacılık – Ankara	Özçelik, Mutlu Ulubay, Nevzat Ünsal
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 7. Sınıf Ders Kitabı	2018a	Koza Yayın – Ankara	Mehmet Ali Erenkuş, Didem Eren Savaşkan
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 7. Sınıf	2018b	Berkay Yayıncılık – Ankara	Bülent Akbulut
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 7 Ders Kitabı	2021	Çağlayan Matbaası – İzmir	Arzu Keskin Oğan, Soner Öztürk

Table 4

Information on Grade 8 Mathematics Textbooks

Curriculum	Name of the Textbooks	Year of Publication	Printing House	Authors
1977	Matematik Ortaokul 3 Cilt 1	1973	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Ölçen, Tahsin Çizenel, İsmail Gökmen
	Matematik Ortaokul 3. Sınıf	1974	Devlet Kitapları	
	Matematik Ortaokul 3	1978 1980	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Mehmet Salan
	Ortaokullar için Matematik 3	1984		
	Ortaokul Matematik 3	1989	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Taner Aşan, Halit İsmaildayıoğlu, Azmi Bender, Fevzi Candan
1990	Ortaokul Matematik 3	1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	H. Hilmi Hacısalihoğlu, Meral Aksu, Ülkü Doğancıoğlu
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 8	2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	Mecit Polatoğlu, Abdulsela Çamlı, İskender Çalıkoğlu
2005	İlköğretim Matematik 8 Ders Kitabı	2009	İhlas Gazetecilik – İstanbul	Serpil Çiçek Aygün, Nurhayat Aynur, Nurdan Coşkuntürk, Sema Seher Çuha, Uğur Kahraman, Ufuk Özçelik, Mutlu Ulubay, Nevzat Ünsal
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 8	2019	Koza Yayın – Ankara	Mehmet Ali Erenkuş, Didem Eren Savaşkan
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 8	2021a	Tuna Matbaacılık – Ankara	Dr. Özal Çetin, Umut Aksakal, Ümran Ertürk, Gürkan Şay, İpek Tığlı

	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 8 Ders Kitabı	2021b	Başak Matbaacılık – Ankara	Hadi Böge, Ramazan Akıllı

Data Analysis

Document analysis is an iterative process involving review (surface review), reading (comprehensive review), and interpretation. This process combines elements of content analysis, in the sense of organizing relevant codes and categories in line with the research problems (Bowen, 2009), and thematic analysis, in the sense of searching for themes emerging from these categories and identifying themes by looking for patterns in the data (Fereday & Muir-Cochrane, 2006). Each textbook was entered into a qualitative data analysis program in this study, and the data coding, theme identification, and explanation process were carried out. Since the textbooks were analyzed on a class basis, the coding was differentiated according to the classes, developed in the context of the research problems, and the coding obtained from the textbooks according to the classes was presented as a table of specifications in the findings section. To ensure the validity and reliability of the data, two researchers acted together and coded four times at different times. The inter-coder agreement was calculated using the similarity formula put forward by Miles and Huberman (1994) [Reliability coefficient = the number of codes with the agreement: (the number of codes with agreement + the number of codes with disagreement) x 100], and coder reliability was determined as 0.94. The points of disagreement were discussed individually, and the process was completed when both researchers reached a consensus.

Findings

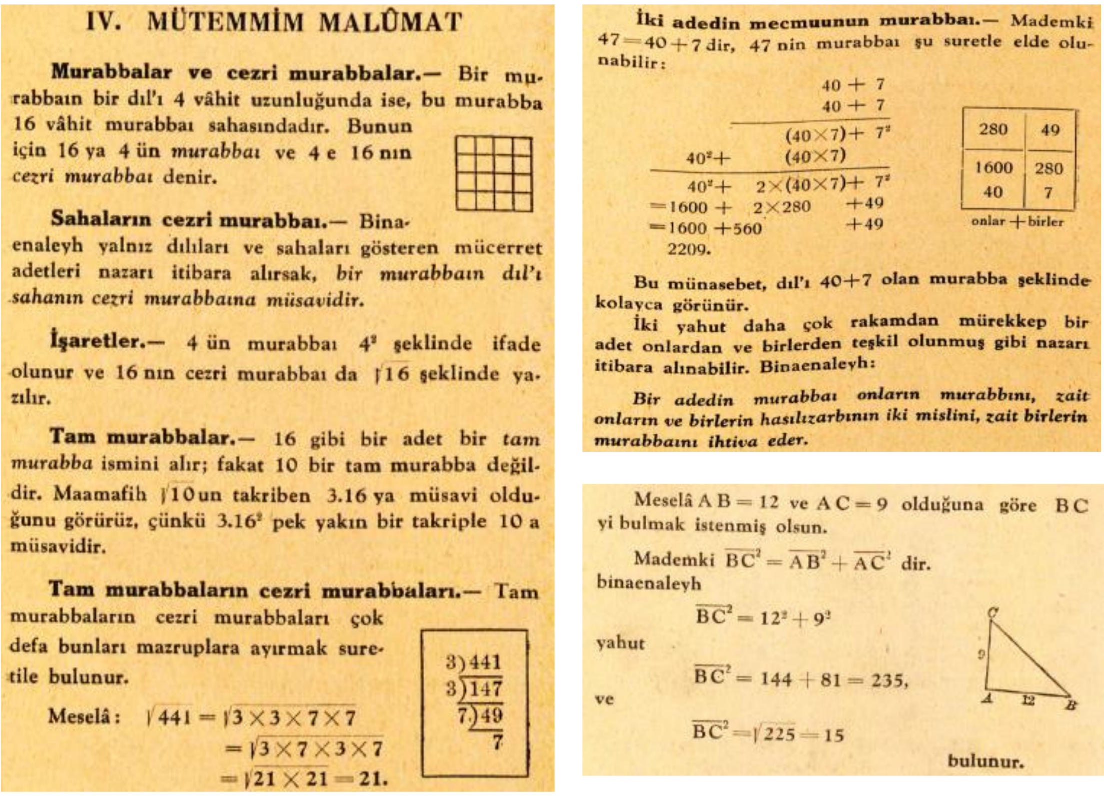
This section presents the findings for the two study sub-problems and class-based comparative analyses.

Findings Regarding the Handling of Square Root Expressions in the Instructional Context

One of the essential components of the structure of the concept of irrational numbers is square root expressions. Since square root expressions are not included in the fifth-grade mathematics curriculum, there needs to be more information in the textbooks. Among the sixth-grade textbooks examined, only the 1932 textbook, which was prepared according to the 1931 curriculum, includes the square and square root operation, numbers that are and are not perfect squares, the relationship between prime factors of perfect square numbers and square roots, the square root calculation method based on the identity of the square of the sum of two terms [$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$], and the relationship between square roots and the Pythagorean relation (Figure 1).

Figure 1

Explanations of Square Roots in the Sixth-Grade Mathematics Textbook of 1932



IV. MÜTEMMİM MALÛMAT

Murabbalar ve cezri murabbalar.— Bir murabbaın bir dıl'ı 4 vâhit uzunluğunda ise, bu murabba 16 vâhit murabbaı sahasındadır. Bunun için 16 ya 4 ün *murabbaı* ve 4 e 16 nın *cezri murabbaı* denir.

Sahaların cezri murabbaı.— Binaenaleyh yalnız dılıları ve sahaları gösteren mücerret adetleri nazarı itibara alırsak, *bir murabbaın dıl'ı sahanın cezri murabbaına müsavidir.*

İşaretler.— 4 ün murabbaı 4^2 şeklinde ifade olunur ve 16 nın cezri murabbaı da $\sqrt{16}$ şeklinde yazılır.

Tam murabbalar.— 16 gibi bir adet bir *tam murabba* ismini alır; fakat 10 bir tam murabba değildir. Maamafih $\sqrt{10}$un takriben 3.16 ya müsavi olduğunu görürüz, çünkü 3.16^2 pek yakın bir takriple 10 a müsavidir.

Tam murabbaların cezri murabbaları.— Tam murabbaların cezri murabbaları çok defa bunları mazruplara ayırmak suretile bulunur.

Meselâ: $\sqrt{441} = \sqrt{3 \times 3 \times 7 \times 7}$
$= \sqrt{3 \times 7 \times 3 \times 7}$
$= \sqrt{21 \times 21} = 21.$

3)441
3)147
7)49
7

İki adedin mecmuunun murabbaı.— Mademki $47 = 40 + 7$ dir, 47 nin murabbaı şu suretle elde olunabilir:

$$\begin{array}{lll} & & 40 + 7 \\ & & 40 + 7 \\ \hline & & (40 \times 7) + 7^2 \\ 40^2 + & (40 \times 7) & \\ \hline 40^2 + & 2 \times (40 \times 7) + & 7^2 \\ = 1600 + & 2 \times 280 & +49 \\ = 1600 + 560 & & +49 \\ 2209. & & \end{array}$$

280	49
1600	280
40	7

onlar + birler

Bu münasebet, dıl'ı 40+7 olan murabba şeklinde kolayca görünür.

İki yahut daha çok rakamdan mürekkep bir adet onlardan ve birlerden teşkil olunmuş gibi nazarı itibara alınabilir. Binaenaleyh:

Bir adedin murabbaı onların murabbını, zait onların ve birlerin hasılızarbının iki mislini, zait birlerin murabbaını ihtiva eder.

Meselâ $AB = 12$ ve $AC = 9$ olduğuna göre BC yi bulmak istenmiş olsun.

Mademki $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ dir.
binaenaleyh

$$\overline{BC}^2 = 12^2 + 9^2$$

yahut

$$\overline{BC}^2 = 144 + 81 = 235,$$

ve

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{225} = 15$$

bulunur.

Table 5 shows how square root expressions are handled in seventh-grade mathematics textbooks in the instructional context.

Table 5

Specification Table for Square Root Expressions in Seventh-Grade Mathematics Textbooks

Konular	**1945**	**1950**	**1985**	**1993**	**2005**	**2011**	**2018a**	**2018b**	**2021**
Square and cube power and root table	✓								
Graphical representation for square and cube	✓								
Algebraic explanation of the square root	✓								
Identity-based square root calculation method	✓	✓							
Relationship between the area of the square region and the side length	✓	✓							
Relationship between square root and Pythagorean relation	✓	✓							
Relationship between square root and geometric mean	✓								

Table 5 summarizes how square root expressions are addressed in the instructional context of seventh grade and how they are prepared according to which curriculum has been briefly described below for each textbook.

The book from 1945, prepared according to the 1938 curriculum, starts with the section "Square and Square Root," which deals with multi-term expressions such as the square of the sum of two terms (binomial square) and the difference of two squares identity. It then continues with a square root calculation method based on the square of the sum of two terms identity (Figure 2). The power and root table (Figure 3) transitions from squaring a number to taking its square root and from cubing a number to taking its cube root, expanding this concept to graphic representation. The same book provides an algebraic explanation for square and cube roots, albeit with incomplete definition sets. There are also exercises related to the area of the square region with side length, the relationship between square root and the Pythagorean theorem, and the relationship between square root and geometric mean under the geometric tasks section.

Figure 2

Method of Square Root Calculation Based on Identity in the Seventh-Grade Mathematics Textbook from 1945 (Indian mathematician Aryabhata's square subtraction method (Agarwal & Agarwal, 2021))

$$\begin{array}{ll} \sqrt{53|29} = 73 & \quad 73^2 \\ 49 & \quad 7^2 \cdots 49 \\ \;\; 429 : 143 & \quad 3.143 \cdots 429 \\ \;\;\;\; 0 & \quad \quad 5329 \end{array}$$

Figure 3

Power and Root Table in the Seventh-Grade Mathematics Textbook from 1945

Cetveller ve grafikle göstermeler

§ 18. KUVVET VE KÖK CETVELİ

Kare

10 dan 110 a kadar kareler

Sayı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	29 6	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4856	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	9231	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881

1. Yukarıki cetvel 0 dan 110 a kadar olan sayıların karelerini vermektedir. Burda karesi aranılan sayının onlar sayısı cetvelin sol kenarında, birler rakamı da üst kenarında aranmalıdır. Cetvelin doğruluğunu meselâ 1^2, 11^2, 80^2 yi arayarak dene.

Kare kök

Kareler cetvelini kullanarak aşağıdaki kare kökleri bul:

7. **a)** $\sqrt{2025}$, **b)** $\sqrt{529}$, **c)** $\sqrt{3929}$.
8. **a)** $\sqrt{20,25}$, **b)** $\sqrt{5,29}$, **c)** $\sqrt{592900}$.
9. **a)** $\sqrt{0,9604}$, **b)** $\sqrt{67600}$, **c)** $\sqrt{43,56}$,

Kare cetvelinin yardımiyle aşağıdaki kare köklerin iki (veya üç) haneli aşağı yukarı değerlerini bul.

10. **a)** $\sqrt{750}$, **b)** $\sqrt{7,5}$, **c)** $\sqrt{7500}$.
11. **a)** $\sqrt{5000}$, **b)** $\sqrt{500}$, **c)** $\sqrt{50}$.
12. **a)** $\sqrt{0,526}$, **b)** $\sqrt{0,0526}$, **c)** $\sqrt{10718}$.

Küp kök

22. Üçüncü kuvveti alındığında a olan sayı $\sqrt[3]{a}$ ile kösterili.. Buna göre aşağıdaki küp kökleri bul:

$\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[3]{1000}$

23. $\sqrt[3]{8000}$, $\sqrt[3]{27000}$, $\sqrt[3]{343000}$.

24. $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{0\,120}$.

25. **a)** s bir kenarı, v de küpün hacmı olduğuna göre; neden $s = \sqrt[3]{v}$ dir? Buna göre hacmı: **b)** s cm^3, **c)** 216 m^3, **d)** 125 lt. olan bir küpün kenarları ne kadar uzunluktadır?

26. Hacmı: **a)** 4 m^3, **b)** 10 m^3, **c)** 300 m^3 olan bir küpün kenarları kaç m. uzunluğundadır.

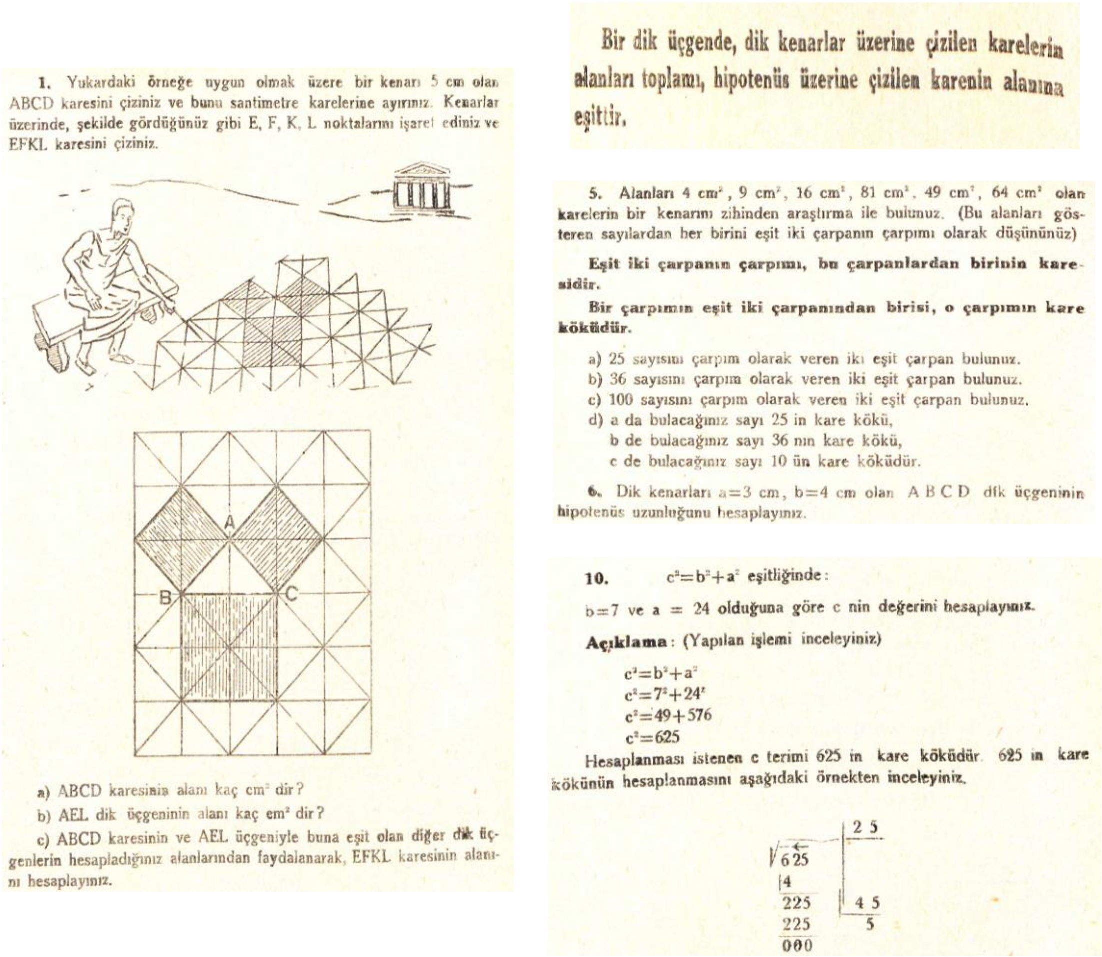
27. Şu sayılar, hangi tam sayıların arasındadır.

a) $\sqrt[3]{2}$, **b)** $\sqrt[3]{15}$, **c)** $\sqrt[3]{80}$, **d)** $\sqrt[3]{555}$.

The 1950 textbook prepared according to the 1949 curriculum establishes the relationship between the areas of square and right-angled triangular regions and their side lengths based on the Pythagorean theorem in the section titled "square and square root" (Figure 4). Like the 1945 textbook, it transitions from squaring a number to taking its square root and presents a square root calculation method based on the identity of squaring the sum of two terms. Unlike in 1945, the power chart is limited to perfect squares. In the 1985 textbook prepared according to the 1977 curriculum, square root expressions are not treated separately but are discussed within the context of non-rational numbers. In the textbook from 1993 prepared according to the 1990 curriculum, a similar sequence of topics to the 1985 book is followed, but instead of "non-rational", the term "irrational" is used. The textbook from 2005, prepared according to the 1998 curriculum, follows a similar sequence of topics as in the books from 1985 and 1993. Starting from the 2005 curriculum, square root expressions are not included in the seventh-grade textbooks.

Figure 4

The Relationship between Pythagorean Theorem and Square Roots in the Seventh-Grade Book from 1950



1. Yukardaki örneğe uygun olmak üzere bir kenarı 5 cm olan ABCD karesini çiziniz ve bunu santimetre karelerine ayırınız. Kenarlar üzerinde, şekilde gördüğünüz gibi E, F, K, L noktalarını işaret ediniz ve EFKL karesini çiziniz.

a) ABCD karesinin alanı kaç cm² dir?
b) AEL dik üçgeninin alanı kaç cm² dir?
c) ABCD karesinin ve AEL üçgeniyle buna eşit olan diğer dik üçgenlerin hesapladığınız alanlarından faydalanarak, EFKL karesinin alanını hesaplayınız.

Bir dik üçgende, dik kenarlar üzerine çizilen karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerine çizilen karenin alanına eşittir.

5. Alanları 4 cm², 9 cm², 16 cm², 81 cm², 49 cm², 64 cm² olan karelerin bir kenarını zihinden araştırma ile bulunuz. (Bu alanları gösteren sayılardan her birini eşit iki çarpanın çarpımı olarak düşününüz)

Eşit iki çarpanın çarpımı, bu çarpanlardan birinin karesidir.

Bir çarpımın eşit iki çarpanından birisi, o çarpımın kare köküdür.

a) 25 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
b) 36 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
c) 100 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
d) a da bulacağınız sayı 25 in kare kökü,
b de bulacağınız sayı 36 nın kare kökü,
c de bulacağınız sayı 10 ün kare köküdür.

6. Dik kenarları $a=3$ cm, $b=4$ cm olan A B C D dik üçgeninin hipotenüs uzunluğunu hesaplayınız.

10. $c^2=b^2+a^2$ eşitliğinde:

$b=7$ ve $a=24$ olduğuna göre c nin değerini hesaplayınız.

Açıklama: (Yapılan işlemi inceleyiniz)

$c^2=b^2+a^2$
$c^2=7^2+24^2$
$c^2=49+576$
$c^2=625$

Hesaplanması istenen c terimi 625 in kare köküdür. 625 in kare kökünün hesaplanmasını aşağıdaki örnekten inceleyiniz.

Table 6 summarizes how square root expressions are treated in the instructional context in the examined eighth-grade mathematics textbooks.

Table 6

Specification Table for Square Root Expressions in Eighth-Grade Mathematics Textbooks

Topics	1974	1984	1989	1992	2005	2009	2019	2021a	2021b
Explaining irrational numbers with examples such as $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\sqrt{\mathbf{3}}$	✓	✓	✓	✓	✓				
Explaining the square root algebraically		✓	✓						
The square root of perfect squares				✓	✓	✓	✓	✓	✓
Square root calculation method based on identity			✓	✓	✓				
Multiplication of prime factors and square rooting					✓	✓	✓	✓	✓
The relationship between the area of a quadratic area and the side length						✓	✓	✓	✓
Approximate value of square roots that are not perfect squares							✓	✓	✓

Table 6 summarizes how square root expressions are addressed regarding their educational context in the eighth grade and how they are prepared according to which curriculum is briefly described for each textbook below.

The 1974 textbook, prepared according to the 1977 curriculum, has no separate section for square root expressions. However, it provides examples of irrational numbers, such as $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, under the title of irrational numbers. Similarly, the 1984 textbook follows a similar sequence and includes the algebraic description of the square root concept (Figure 5) following examples of irrational numbers like $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$. However, the 1989 textbook differs because it presents the square root calculation method based on the sum of the squares of two terms.

Figure 5

Algebraic Explanation of the Square Root Concept in the Eighth-Grade Mathematics Textbook of 1984

Genel olarak, karesi verilen bir b pozitif sayısına eşit bir tek pozitif a sayısı vardır. Yani, $a^2 = b$ $(b > 0)$ şartını gerçekleyen, bir tek $a > 0$ sayısı vardır. Bu sayı, $a = \sqrt{b}$ biçiminde yazılıp; **"a eşit, karekök b"** diye okunur.

The 1992 edition of the textbook, prepared according to the 1990 curriculum, presents examples of irrational numbers such as $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$ under the title "irrational numbers" and separately introduces the square roots of perfect square positive integers under the heading "taking the square root." Similar to 1989, it also presents the square root calculation method based on the square of the sum of two terms.

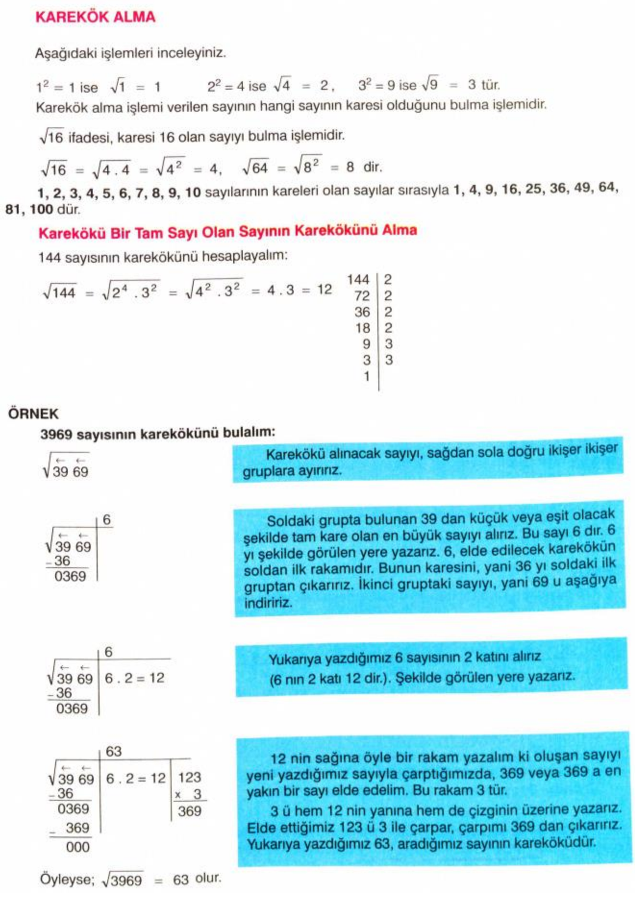
The book prepared in 2005 according to the 1998 curriculum explores the square roots of positive whole numbers under the title of irrational numbers ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.), similar to the approach in the 1992 curriculum. Although the relationship between integer powers and the product of prime factors of a number and the square root operation was first addressed in 2005, the method of calculating square roots based on identities is also included in the book (Figure 6). Furthermore, this book puts more emphasis on operations involving square root expressions.

In the book prepared in 2009, according to the 2005 curriculum, under the title "square root numbers," the transition is made from calculating the side length of a square region using the square root operation to the square root of positive perfect squares. Similar to 2005, a relationship is established between the multiplication of a number's prime factors and the square root operation.

The book, prepared in 2019 according to the 2017 curriculum, lists factors and multiples, exponential expressions, and square root expressions under "Numbers and Operations." In this unit, the calculation of the side length from the area of a square region and an introduction to square root expressions are covered. The square root of perfect square positive integers, the relationship between prime factors and square roots of numbers, approximations of square roots for non-perfect square numbers, and operations involving square root expressions are extensively covered in the book. A similar approach is also followed in the books for the year 2021.

Figure 6

Square Root in Eighth-Grade Mathematics Textbook from 2005



KAREKÖK ALMA

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

$1^2 = 1$ ise $\sqrt{1} = 1$ $2^2 = 4$ ise $\sqrt{4} = 2$, $3^2 = 9$ ise $\sqrt{9} = 3$ tür.

Karekök alma işlemi verilen sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemidir.

$\sqrt{16}$ ifadesi, karesi 16 olan sayıyı bulma işlemidir.

$\sqrt{16} = \sqrt{4 . 4} = \sqrt{4^2} = 4$, $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ dir.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sayılarının kareleri olan sayılar sırasıyla **1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100** dür.

Karekökü Bir Tam Sayı Olan Sayının Karekökünü Alma

144 sayısının karekökünü hesaplayalım:

$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 . 3^2} = \sqrt{4^2 . 3^2} = 4 . 3 = 12$

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

ÖRNEK

3969 sayısının karekökünü bulalım:

$\sqrt{39\ 69}$ — Karekökü alınacak sayıyı, sağdan sola doğru ikişer ikişer gruplara ayırınız.

$\sqrt{39\ 69}$ | 6; -36; 0369 — Soldaki grupta bulunan 39 dan küçük veya eşit olacak şekilde tam kare olan en büyük sayıyı alırız. Bu sayı 6 dır. 6 yı şekilde görülen yere yazarız. 6, elde edilecek karekökün soldan ilk rakamıdır. Bunun karesini, yani 36 yı soldaki ilk gruptan çıkarırız. İkinci gruptaki sayıyı, yani 69 u aşağıya indiririz.

$\sqrt{39\ 69}$ | 6; $6 . 2 = 12$; -36; 0369 — Yukarıya yazdığımız 6 sayısının 2 katını alırız (6 nın 2 katı 12 dir.). Şekilde görülen yere yazarız.

$\sqrt{39\ 69}$ | 63; $6 . 2 = 12$ | $123 \times 3 = 369$; -36; 0369; -369; 000 — 12 nin sağına öyle bir rakam yazalım ki oluşan sayıyı yeni yazdığımız sayıyla çarptığımızda, 369 veya 369 a en yakın bir sayı elde edelim. Bu rakam 3 tür. 3 ü hem 12 nin yanına hem de çizginin üzerine yazarız. Elde ettiğimiz 123 ü 3 ile çarpar, çarpımı 369 dan çıkarırız. Yukarıya yazdığımız 63, aradığımız sayının kareköküdür.

Öyleyse; $\sqrt{3969} = 63$ olur.

Findings Regarding the Handling of Irrational Numbers in Instructional Context

When examining how the topic of purely irrational numbers is addressed in mathematics textbooks, it is observed that there is no relevant information in the fifth-grade textbooks. In sixth-grade textbooks, however, in some books (1932, 2019, 2021), it is mentioned that the approximate value of the ratio of the circumference of a circle to its diameter is $22/7$ or $3{,}14$, which is called the π number (Figures 7 and 8). On the other hand, in a sixth-grade textbook from 1977, it is stated that since $\pi = 3{,}1415...$, this number does not have a repeating decimal expansion. Thus, it is a non-rational number.

Figure 7

The π Number in the Sixth-Grade Mathematics Textbook from 1932

$$\frac{\text{Herhangi bir daire}}{\text{Bu dairenin kutru}} = \frac{\text{Diğer herhangi bir daire}}{\text{Bu dairenin kutru}} = \frac{22}{7} \text{ dir.}$$

Bu $\frac{22}{7}$ nisbetine hususî bir isim de verilmiştir; bu isim (pi) dir ve yunanca π harfile ifade olunur.

Şu halde, daire muhiti c ve kutru d ile gösterilirse $c : d = \pi$ yahut

$$c = \pi d.$$

Ve mademki kutur nısıfkutrun iki mislidir,

$$c = 2 \pi r.$$

(π için 3.1416 adedi hakikate yakın bir takribî kıymet olarak kullanılır; fakat aksi zikredilmediği vakit $3\frac{1}{7}$ adedi kullanılmalıdır.)

Figure 8

The π Number in the Sixth-Grade Mathematics Textbook from 2021

Not

Bir çember ya da dairenin çevre uzunluğu, çap uzunluğuna bölündüğünde daima aynı sayıyı verir. Bu sayı **pi** olarak okunur ve "**π**" sembolü ile gösterilir.

π sayısının kesin değeri bilinmemekle birlikte hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla değeri 3, $\frac{22}{7}$ ya da 3,14 olarak alınabilir. Verilen örnek içerisinde **π** sayısının yaklaşık olarak hangi değerde alınacağı belirtilir.

Çemberin uzunluğu: $\pi \cdot$ çap $= \pi \cdot R = \pi \cdot 2r$

A brief description is provided below for each textbook regarding how irrational numbers are addressed in the educational context of seventh-grade mathematics textbooks, considering the curriculum they were prepared according to.

In the 1945 textbook prepared according to the 1938 curriculum, irrational numbers are not mentioned despite the calculation of approximate values of square roots and cube roots that are not perfect squares or cubes. Similarly, in the textbook from 1950 prepared according to the 1949 curriculum, although the approximate values of non-perfect square roots are calculated, there is no mention of irrational numbers.

According to the curriculum of 1977, the 1985 textbook from addresses the concept of rational numbers unit by starting with the question, "Can a natural number have a square of 2?" From this question, approximate value calculations are made, and the graphical representation of this approximate value on the number line is shown. It is stated that there is no rational number whose square is 2, and this non-representable in fraction form number is denoted as $\sqrt{2}$, along with other numbers like $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, and π is mentioned as irrational numbers (Figure 9).

According to the 1990 curriculum, the 1993 textbook addresses irrational (non-rational) numbers by providing the approximate value of the number whose square is 2, denoting it as $\sqrt{2}$. Although it has a representation on the number line, it is stated that it is irrational because it cannot be written as the ratio of two integers; hence, numbers like $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, and π are mentioned as irrational numbers.

The textbook from the year 2005, prepared according to the curriculum of 1998, introduces the topic of irrational numbers by stating that the square of a natural number whose square is 4 is 2, and the square of a rational number whose square is $1/9$ is $1/3$. It is mentioned that each number corresponds to a point on the number line to begin the discussing the topic. Starting from the fact that the number whose square is 2 is denoted as $\sqrt{2}$, approximate value calculations are made, and it is stated that although this number corresponds to a point on the number line, it is not rational and is named an irrational number. Since irrational numbers are not included in the seventh-grade curriculum of 2005 and 2017, textbooks prepared according to these curricula do not address irrational numbers.

Figure 9

Irrational Numbers in the Seventh-Grade Mathematics Textbook from 1985

Karesi 2 olan bir doğalsayı bulunabilir mi? Bundan başka karesi 2 olan bir rasyonel sayının da bulunmadığı deneme ile anlaşılır. Söz gelişi,

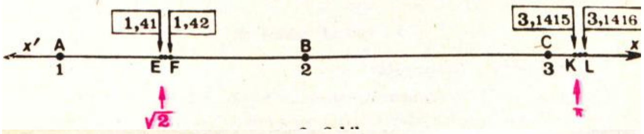
$$1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96 < 2 \quad \text{ve} \quad 1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881 < 2$$

dir. Burada, 1,41 sayısının karesinin 2 ye daha yakın olduğu görülüyor. Öte yandan,

$$1{,}42 \times 1{,}42 = 2{,}0164 > 2$$

dir. Bu kez de 1,42 nin karesinin 2 den daha büyük olduğu görülüyor. Öyleyse, karesi 2 olan sayının, 1,41 ile 1,42 ondalık sayıları arasında, olacağı anlaşılıyor. Virgülden sonraki ondalık basamak sayısı ne kadar çoğaltılırsa çoğaltılsın yine karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur.

Bir kesir şeklinde gösterilemeyen ve karesi 2 olan bu sayıyı $\sqrt{2}$ biçiminde yazacağız ve "**karekök iki**" diye okuyacağız. Bu sayının, sayı doğrusu üzerindeki görüntüsü 1,41 ile 1,42 sayılarının görüntüleri arasında bir yerde bulunur (2. şekil).



Aynı şekilde, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi sayılar için de sayı doğrusu üzerinde birer nokta vardır.

Yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan bir çemberin uzunluğu

$$2 \times \frac{1}{2} \times \pi = \pi$$

ye eşittir. Bir çemberin çevresinin çapına oranı olan π sayısının 3,1415 ile 3,1416 arasında bir sayı olduğunu biliyoruz. Öyleyse, sayı doğrusu üzerinde π sayısının görüntüsü olan bir nokta da vardır. Bu nokta 3,1415 ve 3,1416 sayılarının görüntü noktaları arasındadır (2. şekil).

Bir rasyonel sayı ile gösterilemeyen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . , π sayıları gibi sayılara **rasyonel olmayan** sayılar denir.

Rasyonel sayılar ve rasyonel olmayan sayıların oluşturduğu kümeye **gerçek sayılar** kümesi diyoruz ve bunu G ile gösteriyoruz.

A brief description is provided below for each textbook regarding how irrational numbers are addressed in the educational context of eighth-grade mathematics textbooks, considering the curriculum they were prepared according to.

According to the 1977 curriculum, the 1974 textbook addresses irrational numbers in the unit of real numbers by discussing how, although each rational number corresponds to a point on the number line, the image points of rational numbers do not fill the number line. This leads to a transition to a new set of numbers. In this context, the approximate value of the number whose square is 2 is calculated, and its representation on the number line is provided.

The textbook from 1974, prepared according to the 1977 curriculum, transitions to a new set of numbers in the unit on irrational numbers under the real numbers section. It mentions that although every rational number corresponds to a point on the number line, the points representing rational numbers do not fill the number line, introducing a new set of numbers. The approximate value and representation on the number line of the number whose square is 2 are provided. It is stated that $n = \sqrt{2}$ in the equation $n^2 = 2$ and the fact that $\sqrt{2}$ is irrational, which is proven (Figure 10). In addition to the information that numbers like $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, and π are irrational numbers, it is also mentioned that the set of irrational numbers consists of numbers such as $\sqrt{3}$ and $-\sqrt{3}$, which satisfy the equation $x^2 - 3 = 0$. Similar topic sequences are followed in textbooks from 1984 and 1989 as well.

Figure 10

Proof of the Irrationality of $\sqrt{2}$ in the Eighth Grade Mathematics Textbook from 1984

Bir de şöyle düşünelim : $\sqrt{2}$ sayısı, bir rasyonel sayı olsaydı, bu sayı, aralarında asal olan $m, n \in T+$ sayılarını kullanarak $\frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir ve

$$\frac{m}{n} \quad \frac{m}{n} = 2 \text{ ise, } \frac{m^2}{n^2} = 2 \text{ olurdu.}$$

Buradan, $m^2 = 2n^2$ bulunur. $n \in T+$, ne olursa olsun, $2n^2$ çift bir sayı olduğundan, m^2 de çift bir sayı olur. Biz, çift olan bir sayının karesinin çift bir sayı olacağını biliyoruz. ($4^2 = 16$, $8^2 = 64$ gibi).

Öyleyse, bir $m \in T+$ için, $m = 2k$ yazılabilir. m yerine 2k yazarak, $(2k)^2 = 2n^2$ ise, $4k^2 = 2n^2$ ve $2k^2 = n^2$ bulunur. $2k^2$ çift bir sayı olduğundan, n^2 de çift bir sayı olup, bunun sonucu olarak, n de çift bir sayı olur.

Böylece, 2 nin, m ile n nin bir ortak çarpanı olduğu anlaşılır. Oysa, biz m ile n yi, aralarında asal aldığımızdan bu mümkün değildir. Şu halde, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ hiçbir zaman 2 ye eşit olamaz. Bu nedenle, sayı doğrusunun rasyonel sayılarla da doldurulamayacağı anlaşılır.

İşte, $\sqrt{2}$ gibi, sayı doğrusunda bir görüntü noktası olduğu halde rasyonel olmayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir.

The textbook from 1992, prepared according to the curriculum of 1990, addresses irrational numbers in the unit of real numbers by discussing that every decimal fraction is a rational number when expressed as repeating decimals, and non-repeating decimal expansions are introduced as irrational numbers. Like previous textbooks, it transitions from the approximate value of the number whose square is 2 to the number $\sqrt{2}$ and its representation on the number line. It is mentioned that the number $\sqrt{2}$ is irrational because it cannot be written in the form a/b (where $a, b \in Z, b \neq 0$) as a rational number, but proof of why it is not rational is not provided. The same sequence is followed in the 2005 textbook, prepared according to the 1998 curriculum.

The textbook from the year 2009, prepared according to the curriculum of 2005, transitions to the subheading "Square Roots of Numbers" under the unit "Probability, Statistics, and Numbers," and the concept of square roots is introduced under the subset of real numbers. A note is added indicating that the diagonal length of a square with a side length of 1 unit is irrational, leading into the topic. Without a subheading, irrational numbers are introduced as numbers that cannot be written as the ratio of two integers, and the conversion of repeating decimals to fractions is discussed. Since repeating decimals can be expressed as the ratio of two integers, they are emphasized as rational numbers. From this emphasis, it is stated that non-repeating decimal representations cannot be written as the ratio of two integers, hence, they are irrational (Figure 11), and examples such as $\sqrt{17}$ and π are discussed.

Figure 11

Irrational Numbers in the Eighth-Grade Mathematics Textbook from 2009

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin **irrasyonel sayı** olduğunu belirleyelim.

a) -4,33... devirli ondalık kesrini iki tam sayının oranı olarak yazabiliriz.
Aradığımız oran x olsun,
x= 4,333... olur.

Devreden 3 sayısını yok edebilmek için eşitliğin her iki tarafını 10 ile çarpalım:
10x=43,333...

Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkaralım:

$$\begin{array}{r} 10x = 43,333... \\ -\quad x = 4,333... \\ \hline 9x = 39 \\ x = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \end{array}$$

4,333... devirli ondalık kesri, iki tam sayının oranı olarak $\frac{13}{3}$ şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayıdır.

b) 2,01020301... şeklinde sonsuza kadar düzensiz bir şekilde devam eden sayılar iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz. Dolayısıyla bu sayı irrasyonel sayıdır.

In the textbooks for the years 2019 and 2021 prepared according to the 2017 curriculum, learning areas are used instead of unit names, and in the "Numbers and Operations" learning area, there is a transition from exponential expressions to square root expressions, and under the square root expressions sub-learning area, the topic of real numbers is addressed. Although similar topic sequences are followed in these textbooks, differences are observed regarding introductory examples for the topics.

For example, in the 2019 textbook, the decimal expansions of $\sqrt{2}$ and $\sqrt{5}$ are questioned as to whether they can be written as rational numbers, and the discussion begins with this topic. Examples are given regarding writing finite and repeating decimal representations in rational number form, stating that each decimal representation can be written as a/b $(a, b \in Z, b \neq 0)$ form, representing a rational number. It is also mentioned that numbers like $\sqrt{3}$ and $\sqrt{11}$ do not have repeating decimal expansions, so they cannot be written as rational numbers (a/b). Since the square roots of non-perfect square numbers cannot be written as the ratio of two integers, they are also not rational. As a result, information about real numbers that are not rational numbers, such as irrational numbers, is included. In the 2021 textbook, the introduction to real numbers begins by explaining that π is the ratio of a circle's circumference to its diameter, and approximately the first 100 digits of this ratio's decimal expansion are provided. Emphasis is placed on rational numbers written in the form a/b, and examples of rational numbers in different representation forms such as $7, (2{,}5), \sqrt{36}$, and $(4{,}1\bar{2})$ are given. It is stated that numbers that cannot be written as the ratio of two integers are irrational, and a transition is made to the non-repeating decimal representations of numbers such as $\sqrt{137}$ and $-\sqrt{30}$. In the 2021b textbook under the title "Irrational Numbers and Real Numbers," the discussion begins by questioning whether the diagonal length of a square with integer side lengths will be a rational number. Examples are given on converting repeating decimal representations to rational numbers (a/b), and it is mentioned that rational numbers are numbers written in the form a/b. In contrast, irrational numbers cannot be written in the form a/b. Starting from the emphasis that although the decimal representation or repeating decimal representation of every rational number can be written, not every decimal representation can be written as a rational number, it is stated that numbers like $\pi, \sqrt{3}$, and $\sqrt{5}$ are not rational numbers because their decimal parts do not continue in a specific order. Furthermore, it is explained that square roots with perfect square interiors are rational numbers, while those with non-perfect square interiors are irrational numbers.

Discussion and Conclusion

This research analyzed how irrational numbers and expressions involving square roots have been addressed in middle school mathematics textbooks throughout the history of the Republic of Türkiye. Despite the existence of textbook analysis studies focusing on the concept of irrational numbers (for example, González-Martín et al., 2013), no systematic study has been encountered both at the middle school level and in the national literature. Therefore, this study highlights the mathematical content in school textbooks regarding teaching irrational numbers. It explores how these concepts are presented in terms of topic sequences, how they are defined, which representation forms are used, how they are interconnected, and which numerical examples are discussed. Combining the study results with research findings on why students struggle to learn the concept can guide the design of teaching activities and the selection of teaching methods. It can also contribute to the improvement process of textbooks and curriculum development.

According to the findings of the research, irrational numbers are not mentioned in fifth-grade textbooks. In some sixth-grade textbooks, only the number π is discussed due to its association with circles. There has been no mention of irrational numbers in seventh-grade textbooks for approximately the last ten years. Moreover, in eighth grade, different topic sequences have been followed over the years in introducing the concept of irrational numbers. When examining the mathematics curricula of different countries, the introduction to expressions involving square roots and the concept of irrational numbers occurs in eighth grade in some countries such as the United States (CCSSI, 2010), Australia (ACARA, 2022), and Canada (OME, 2020). However, comparative textbook analyses must clarify which topic sequences are followed when structuring the concept.

Based on the study data, Figure 12 diagrams the change in flow that followed the introduction of the concept of irrational numbers in seventh–and eighth-grade textbooks prepared according to the curriculum of the same years.

Figure 12

The Topic Sequence of the Concept of Irrational Numbers in Textbooks Prepared According to the Curriculum of the Same Years

Considering the research findings and Figure 12, notable points can be summarized in five main points. The first point is that until the 2005 curriculum, irrational numbers were discussed primarily in the context of $\sqrt{2}$. However, starting in 2005, different examples of irrational numbers in the form of square root expressions were introduced. Sirotic and Zazkis (2007b) have mentioned the adverse effects of the predominant use of specific numerical examples in introducing the concept of irrational numbers. From another perspective, the mathematical definition of irrational numbers relies on the concept of real numbers using Dedekind cuts or Cauchy sequences (Argün et al., 2014). However, especially for middle school students, specific representations is distinctive (Zazkis, 2005). Since one of the most fundamental representations of irrational numbers is square roots, it is appropriate and expected that the transition to the concept of irrational numbers is made through square roots. However, how the topic sequence is structured is crucial. Since 2005, the topic sequence followed in teaching square root expressions involves the relationship between the square root of perfect squares, the approximate value of square roots of non-perfect squares, and the process of taking square roots using prime factorization. This approach is recommended for square root expressions (Wiesman, 2015). However, since 1990, the introduction of irrational numbers has shifted emphasis from just square roots to non-repeating decimal representations, numbers that cannot be written as fractions, and numbers that are not the ratio of two integers. Representations that reveal the properties of numbers and the ability to transition between these representations are indicators of conceptual understanding and are also the goal of teaching (Zazkis, 2005). One of the specific aims of middle school mathematics education is *"to express concepts in different representation forms (MoNE, 2018)."* However, it is observed that in textbooks, the transitions between representations are unclear; they are introduced as separate topic fragments, and statements such as square root numbers are perceived as separate numbers. This situation may result in learners not being aware of the equivalence of different representations of a number, the representation form determining the nature of the number (such as if it is a square root, it is irrational, or if it is decimal, it is rational), or perceiving different representations as different numbers (Çevikbaş & Argün, 2017; Guven et al., 2011; Voskoglou & Kosyvas, 2012). On the other hand, Crisan (2014) mentions that the concept of square root is not consistently presented in terms of symbols and presentation format in school mathematics textbooks. This situation is exemplified by the fact that in an eighth-grade textbook from 1974, the roots of the equation $x^2 - 3 = 0$ were discussed, introducing the set of irrational numbers. However, the focus was only on the positive root in subsequent years. Another example is the square root calculation method based on identity in textbooks until 2005 (Figure 2). Examining and conducting comparative analyses of official middle school mathematics textbooks used in different countries would be beneficial to clarify this situation. Finally, irrational numbers are described with negative statements such as "non-rational numbers," "numbers with non-repeating decimal representations," or "numbers that cannot be written as fractions." As can be directly understood from these statements, students need to have an excellent understanding of rational numbers to comprehend irrational numbers. Indeed, one of the reasons learners struggle with irrational numbers is the deficiencies in their understanding of rational numbers (Voskoglou & Kosyvas, 2012). In this context, focusing on improving textbooks by examining them specifically in terms of rational numbers can contribute to mathematics education.

The second noteworthy point highlighted by Figure 12 is that in some textbooks examined, especially those from the years 1945 and 1950, due to the historical context of irrational numbers being a consequence of calculating the diagonal length of a unit square, a transition is made from squaring to square roots through the Pythagorean relationship. Indeed, according to Arcavi et al. (1987), the historical origin of irrational numbers and their unique connection with geometry can help in a more meaningful learning of irrational numbers. Similarly, Sirotic and Zazkis (2007a) and Shiver and Klosterman (2022) also recommend using the Pythagorean relationship to teach irrational numbers with a geometric representation. The mathematics curriculum presents square root expressions and the Pythagorean relationship in separate units. However, due to their close relationship, designing teaching methods that integrate these two topics could be more beneficial.

The third point relates to the approach followed in providing concept definitions. Although the algebraic definition of the square root concept (Figure 5) was included in the eighth-grade textbook from 1984, explanations regarding how to take square roots have been provided in textbooks since the 1990 curriculum. This situation raises the question of how a mathematical concept can be defined by building upon students' existing knowledge and understanding without losing its meaning (Çakıroğlu, 2013). In the constructivist learning theory, individuals construct knowledge based on familiar concepts and establish connections among them. Therefore, the definition of a new concept should be pedagogically appropriate and mainly include concepts that the individual already knows. In other words, the definition of mathematical concepts in teaching should be mathematically accurate and pedagogically appropriate (Winicki-Landman & Leikin, 2000). The algebraic definition of the square root concept presented in eighth grade is mathematically accurate. However, it is not a suitable definition based on students' prior knowledge at that level. Indeed, after 1990, an approach based on operational understanding is used, and an explanation based on taking square roots was provided.

The fourth point is that while some eighth-grade textbooks used to include a proof of why $\sqrt{2}$ is irrational (Figure 10), this approach has been abandoned since 1990. This situation raises the issue of at what level mathematical proof should be included in middle school education. When relevant literature is examined, reasoning and proof concepts are encountered, and a process from reasoning to proof is explained (NCTM, 2000; Stylianides, 2008). *"When mathematical proof is defined as a formal way of expressing certain types of reasoning and validation (NCTM, 2000),"* it can be said that mathematical proof requires reasoning skills (Kuchemann & Hoyles, 2009). Since students do not always have the mathematical knowledge they need, such as reasons or counterexamples, to refute an assumption, how assumptions are expressed varies at each grade level. For example, elementary school students can describe their thoughts in their own words and often use concrete materials. As students progress through grade levels, they are expected to learn to deal with increasing complexity, investigate assumptions, and formulate them using mathematical representations and symbols (NCTM, 2000). Therefore, while proof is a very challenging area even for mathematics undergraduate students (Bieda, 2010), it is not expected for middle school students to fully comprehend the formal proof of why $\sqrt{2}$ is irrational. In other words, for students to comprehend the proof of why $\sqrt{2}$ is irrational, they need to have specific skills, such as manipulating mathematical symbols, solving equations, etc., at a specific level. Therefore, in middle school, reasoning skills are emphasized over proof, as students may not have the skills to understand formal proofs. Furthermore, the shift in approach regarding the proof of why $\sqrt{2}$ is irrational, moving away from it after 1990, indicates a shift towards helping students transition from existing knowledge to new knowledge, reflecting the influence of the adopted learning theory in the curriculum.

The fifth point is the presence of mathematical errors in some textbooks. For example, the 2019 eighth-grade textbook states that every decimal representation can be written in the form a/b (where $a, b \in Z, b \neq 0$). However, non-repeating decimal representations cannot be written in the form a/b. Indeed, the 2021b textbook emphasizes that not every decimal representation is a rational number. Identifying such errors requires experts in the field to review textbooks and make necessary corrections. This highlights the importance of who should be writing mathematics textbooks and the need for expert oversight in textbook creation. Additionally, textbooks should be prepared *"within the framework of any education and training program (MoNE, 2021, October 14),"* yet this study's findings suggest that some textbooks may have influenced subsequent education programs. Furthermore, even textbooks prepared according to the same curriculum may exhibit some differences, as observed in this study.

When these five points are considered together, it can be observed that there have been minor changes in the presentation of the concept of irrational numbers in mathematics education programs throughout the history of the Republic of Türkiye, with significant changes starting around 1990 and especially in 2005. The reason for this may be attributed to the "National Education Development Project," which is considered a turning point in the history of the Turkish education system and was supported by the World Bank in the early 1990s, leading to curriculum development efforts in collaboration between the Ministry of National Education and academics (Argün et al., 2010). Additionally, the adoption of behaviorist learning theory before 2005 and constructivist learning theory after 2005 has influenced the presentation of concepts due to the differing perspectives of these two theories on knowledge. Behaviorism emphasizes that knowledge presented by teachers and textbooks is definitive, accurate, and absolute, while constructivism emphasizes that knowledge is constructed by the individual through a process over time (Oral, 2019). For example, in 1945, there was an emphasis on the algebraic definition of the square root concept; recent years have highlighted how the square root operation is performed. Similarly, in recent years, the introduction of irrational numbers leveraging representation formats based on students' prior learning reflects the traces of constructivist learning theory.

In conclusion, the teaching theory adopted in mathematics education programs directly influences textbooks and thus has the potential to impact classroom teaching significantly. Despite the historical context of presenting irrational numbers in education through different approaches, areas still need to be emphasized. Research should focus on approaches that can better help students understand the concept, and these changes need to be reflected in both the curriculum and textbooks. The historical accumulation created by past practices will pave the way for new approaches or ideas for change to emerge.

Recommendations

Based on the results of the research, the following recommendations can be made:

The study examined the progression from square root expressions to irrational numbers in mathematics textbooks. Studies focusing on the transition from fractions to decimal representation and from rational numbers to irrational numbers, particularly clarifying the concept of "numbers that cannot be written as fractions," can be conducted to illuminate the teaching of irrational numbers.

The dominant educational approach in the Republic's early years was based on nationalism with a cultural foundation. In contrast, in the early 1940s, an educational approach based on humanism and materialism began to be adopted. This situation is a turning point in Türkiye's national education policies (Budak, 2003). In the context of the current research, the 1932 sixth-grade textbook prepared according to the 1931 mathematics curriculum, published in the early years of the Republic, and notably different in content from its counterparts, should be separately analyzed. Examining this textbook compared to its era and in the light of today's educational perspectives will contribute to our national education history.

Fan (2013) emphasized document analysis in research on mathematics textbooks, indicating that new methods in this field will advance textbook research (Fan et al., 2013). Notably, research designed to answer causal questions about how mathematical topics are addressed and which methods are more effective can provide evidence-based answers. In other words, as mentioned in Glasnović Gracin's (2014) study, in order to draw a complete picture of the role of textbooks in mathematics education, research results are needed on how these books are used in the classroom and the methods teachers employ when using these books.

Author Contribution Rates

The first author contributed 60% and the second author contributed 40% to the research.

Ethical Declaration

All rules stated in the 'Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive' have been followed, and none of the actions listed in the second section of the directive, 'Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics,' have been performed.

Conflict Statement

The authors declare that there is no conflict of interest with any institution or individual within the scope of this study.

Türkçe Sürümü

Giriş

Sayı kavramının rasyonel sayılardan gerçel sayılara genişletilebilmesi için irrasyonel sayıların anlaşılmasına ihtiyaç olduğu gibi her genişlemede yeni kuralların kabul edilmesi ve yeni bir bakış açısının benimsenmesi gerekir (Merenluoto & Lehtinen, 2002). Özelde irrasyonel sayılar, genelde gerçel sayılar hakkında derin bir bilgiye sahip olmak hem matematiğin temellerini anlamak hem de $\varepsilon - \delta$ tanımları, limit, süreklilik, türev gibi birçok temel kalkülüs kavramı için gerekli bir koşuldur (Rizos & Adam, 2022). Ancak öğrencilerin veya öğretmenlerin irrasyonel sayılara yönelik mevcut bilgilerine odaklanan çalışmaların sonuçları incelendiğinde bazı sorunların varlığı ön plandadır. Örneğin; Sirotic ve Zazkis (2007b) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayı anlayışlarına odaklandığı çalışmasında, adayların sezgileri ile biçimsel ve algoritmik bilgileri arasında tutarsızlık olduğunu ve sınırlı örneklerin ötesindeki irrasyonel sayıların varlığından haberdar olmadıklarını belirlemiştir. Çevikbaş ve Argün (2017) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıları nasıl tanımladığı üzerine yaptığı çalışmasında adayların sayıları ayırt etmede başarılı olmadığı, bir sayının farklı temsillerinin denkliğinin farkında olmadığı, gösterim biçiminin sayının karakterini belirlediği, farklı gösterimlerin farklı sayılar olarak algılandığı gibi sonuçlar elde etmiştir. Kidron (2018) lise öğrencilerinin irrasyonel sayıların varlığı sorununu ele aldığı çalışmasında, öğrencilerin her sayının her zaman iki sayının bölünmesiyle elde edildiği ve sonsuz sayıda basamağı olan bir sayının sayı doğrusunda temsil edilemeyeceği gibi hatalı fikirler tespit etmiştir. Matematikçilerin yüzyıllarca süren çalışmalarının bir ürünü olan irrasyonel sayılar, öğrencilerin birkaç derste öğrenebileceği bir kavram olmadığı gibi (Sirotic & Zazkis, 2007a) öğrenme sürecinde en çok zorlanılan sayı kümelerindendir (Arbour, 2012; Patel & Varma, 2018). Zorlukların nedenleri kavramın doğasından (Sirotic & Zazkis, 2007a, 2007b), rasyonel sayı kavrayışından (Voskoglou & Kosyvas, 2012), bazı irrasyonel sayıların rasyonel yaklaşımlarından (Zazkis & Sirotic, 2010), sayıların farklı gösterim biçimlerinden (Çevikbaş & Argün, 2017; Guven vd., 2011; Voskoglou & Kosyvas, 2012) veya matematik öğretim programı ve ders kitaplarından (Erdem Uzun & Dost, 2023) kaynaklanabilmektedir. Matematiğin öğrencilere aktarılması sürecinde bazı zorluklar yaşanabileceği kabul görmesine rağmen öğretim programlarında matematiğin katı hiyerarşisi ile sayı sisteminin tutarlı bir çerçeve içerisinde sunulması gerekir (Fischbein vd., 1995). Aksi takdirde irrasyonel sayıları gerçel sayıların bir üyesi olarak içselleştiremeyen öğrenciler, irrasyonel ve karmaşık sayılar arasındaki farkları bile ayırt etmekte güçlük yaşamaktadır (Guven vd., 2011).

Sayı kümeleri ve üzerinde tanımlanan işlemler ortaokul matematik öğretim programlarında temel bir yere sahiptir. Buna rağmen ilgili ulusal alan yazın incelendiğinde irrasyonel sayı öğretiminde matematik öğretim programı ve bunun bir yansıması olan ders kitaplarından kaynaklı bazı aksaklıklar olduğu raporlanmıştır. Örneğin; gösterimler arası ilişkinin net olmaması (Bakır, 2011), π sayısının rasyonel yaklaşımlarının kullanılması sonucu $\frac{22}{7}$ ve $3,14$ sayılarının irrasyonel olarak algılanması (Tavşan & Pusmaz, 2020), irrasyonel sayıların kareköklü ifadeler konusunun ardından öğretilmesi (Adıgüzel, 2013), kareköklü ifadelere daha fazla odaklanılması (Leylek, 2020), irrasyonel sayılara ayrılan sürenin az olması (Çevikbaş & Argün, 2017), kavramlar arası geçişte öğrencilerin ön bilgilerinin göz ardı edilmesi (Leylek, 2020) gibi nedenlerin irrasyonel sayı kavramının öğrenimi ve öğretimini zorlaştırdığı görülmektedir. Öğretmenler için ders kitapları temel bir kaynaktır (González-Martín vd., 2013). Dolayısıyla mevcut ders kitaplarını incelemek ve iyileştirme üzerine odaklanmak, öğrencilerin öğrenme zorluklarını ele almanın yollarından biridir (Hong & Runnalls, 2020). Kitaplarda yer alan matematiksel içerik öğretmen, öğrenci ve müfredat kaynakları ile ilişki içerisinde olması gerektiğinden ders kitapları öğretim programlarının uygulanabilirliğini sağlayan en önemli araçlardandır. Matematik ders kitapları, matematiksel bilgi sağlayan, öğrenmeyi ve öğretimi destekleyen, resmi olarak onaylanan ve pedagojik olarak tasarlanan kitaplardır (Glasnović Gracin, 2014; Rezat vd., 2021).

Tüm dünyada matematik eğitiminde yaygın olarak kullanılmasından dolayı matematik ders kitaplarının öğretimsel bağlamda içeriğini araştırma gerekliliği ortaya çıkmış (Glasnović Gracin, 2014) ve son yıllarda uluslararası matematik eğitimi araştırma topluluğunun ilgisini çeken okul ders kitapları, bir araştırma alanı olarak görülmeye başlanmıştır (Fan, 2013). Bu araştırmalarda en çok sayılar ve işlemler konusuna değinilmesine (Chang & Silalahi, 2017) rağmen özellikle irrasyonel sayılar konusuna yönelik çalışmalar oldukça azdır. González-Martín ve diğerleri (2013) Brezilya devlet ortaöğretim okullarında kullanılan ders kitaplarında irrasyonel ve gerçel sayıların nasıl tanıtıldığını incelediği çalışmasında irrasyonel sayı kavramının genellikle ondalık gösterim özelinde ele alındığı, birçok örtük varsayım olduğu, gerekçelendirmelerin sadece örneklere dayandığı, "yeni" sayıların tanıtılması için gerekliliğin vurgulanmadığı gibi bulgular elde etmiştir. Çalışmada bir dizi kural sunumunun öğrencilerin gerçel sayı öğrenmesine katkı sunmadığı ve ilköğretimde gerçel sayılara verilen önem az olmasına rağmen limit, türev gibi ileri konular öğretildiğinde iyi anlaşılacaklarına dair bir varsayımın olduğu sonucuna varmıştır. Türkiye'de ise matematik ders kitaplarında irrasyonel sayılar kavramına yönelik sistematik bir araştırma yapılmadığından (Erdem-Uzun & Dost, 2023) mevcut çalışma, irrasyonel sayı kavramının öğretimine yönelik yeni yaklaşımlar arayışı için geçmiş tecrübelerden faydalanmak ve tarihsel birikimden elde edilen çıkarımlarla yeni öğretimsel fikirler elde etmek bakımından önemlidir.

Türkiye'de merkezi bir yapıya sahip olan eğitim sisteminde, ulusal bir matematik öğretim programı ve belirli yıllar için Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (TTKB) tarafından onaylanan matematik ders kitapları bulunmaktadır. Bununla birlikte Türkiye'de ilköğretim, ilkokul ile ortaokul olmak üzere iki kademeden oluşmakta olup 2012 yılı itibariyle ilkokul 1, 2, 3 ve 4. sınıfları ve ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıfları kapsamaktadır. Bu çalışmada, Türkiye'de Cumhuriyet tarihi boyunca ortaokul matematik ders kitaplarında irrasyonel sayı kavramının öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığını incelemek amaçlandığından öncelikle matematik öğretim programları göz önüne alınmıştır. Cumhuriyet'in ilanından (1923) bu yana 1926, 1931, 1938, 1949, 1977, 1990, 1998, 2005, 2013 ve 2017 yıllarında ortaokul (6., 7. ve 8. sınıf) matematik öğretimi programlarında ve 2012 yılına kadar ilkokul bünyesinde yer alan beşinci sınıf matematik öğretim programları 1926, 1936, 1948, 1968, 1983, 1990, 1998, 2005, 2013 ve 2017 yıllarında değişmiştir (Özmantar vd., 2020). 2017 yılında uygulamaya konulan mevcut öğretim programı kazanımlarında kareköklü ifadelerden irrasyonel sayı kavramına doğru bir öğretim sırası takip edildiğinden (MEB, 2018) araştırma soruları şu şekildedir:

1) Cumhuriyet tarihi boyunca ortaokul matematik ders kitaplarında kareköklü ifadeler öğretimsel bağlamda nasıl ele alınmıştır?
2) Cumhuriyet tarihi boyunca ortaokul matematik ders kitaplarında irrasyonel sayı kavramı öğretimsel bağlamda nasıl ele alınmıştır?

Yöntem

İrrasyonel sayı kavramının ders kitaplarında öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığının tarihsel bir incelemesini yapmayı amaçlayan bu çalışmada, "nasıl" sorusunun ön planda olduğu nitel araştırma türlerinden belge (doküman) analizi yöntemi (Bowen, 2009) kullanılmıştır. Metin içeren herhangi bir belgeyi (Patton, 2015), gözden geçirmek veya değerlendirmek için sistematik bir prosedür olan belge analizi yöntemi (Bowen, 2009), alanyazında "değerli bir araştırma yöntemi (Merriam & Tisdell, 2016; Morgan, 2022)" olarak tanımlanmaktadır.

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı bünyesindeki Ferit Ragıp Tuncor Arşiv ve Dokümantasyon Kütüphanesinden elde edilmiştir. Söz konusu kütüphane, MEB derleme memuru olarak görev yapan Ferit Ragıp Tuncor'un bireysel çabaları doğrultusunda depolarda dağınık şekilde bulunan eserlerin derlenip toplanması ile oluşturulmuştur (MEB, 2023). Millî Eğitim Yayınlarına ait eserlerin yer aldığı kütüphane, Türk eğitim tarihi açısından önemli bir koleksiyona sahip (MEB, 2023) olmasına rağmen bazı yıllara ait eserlere çeşitli nedenlerle (sistematik derleme yapılmaması, belirli yayınevlerine ait eserlerin kullanımının yasaklanması gibi) erişilememektedir. Nitekim bu çalışmanın veri toplama sürecinde 1926 ve 2013 yılları öğretim programına göre hazırlanan hiçbir ders kitabına ulaşılamamış olup 5. sınıflarda

1936, 1948, 1983, 1998, 7. sınıflarda 1931 ve 8. sınıflarda 1931, 1938, 1949 yıllarına ait ders kitapları da bahsedilen sebeplerden dolayı elde edilememiştir. Kullanımda olan matematik ders kitaplarına ilişkin bilgiler ise MEB'e bağlı Eğitim Bilişim Ağı'ndan (EBA) temin edilmiştir. Toplanan veriler kamuya açık belgeler üzerinden elde edildiğinden mevcut çalışma, etik kurul izni gerektirmeyen çalışmalar grubundadır.

Türkiye'de 1928 yılında Arap alfabesi kaldırılarak yerine yeni Türk alfabesi kabul edilmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada yeni Türk alfabesine göre yazılan 1928 yılı sonrası matematik ders kitaplarına odaklanılmış olup bu durum aynı zamanda çalışmanın bir sınırlılığıdır. Belge analizi yapılmak üzere toplam 37 adet matematik ders kitabı belirlenmiş ve her bir kitabın hangi yılın matematik öğretim programına ait olduğu hem basım yılı ve baskı sayısı hem de öğretim programları ile uyumları doğrultusunda kontrol edilmiştir. Bazı yıllara ait ders kitapları aynı olduğundan bir sayılmış ve veri analizinde daha güncel tarihli olan çalışmaya dâhil edilmiştir. 1972, 1973 ve 1974 yıllarına ait kitapların döneminin öğretim programından ziyade 1977 yılı öğretim programına göre hazırlandığı görülmüştür. 2018, 2019, 2021 ve 2022 basım yılına sahip kitaplar hâlen MEB tarafından onaylanmış ders kitabı olarak kullanılmaktadır.

Çalışmaya dâhil edilen 5. sınıf matematik ders kitaplarına ilişkin bilgiler Tablo 1'de verilmiş ve toplam yedi adet kitap veri olarak kabul edilmiştir. 6. sınıf matematik ders kitaplarına ilişkin bilgiler Tablo 2'de verilmiş ve toplam on iki adet kitap veri olarak kabul edilmiştir. 1937 – 1938 – 1945, 1981 – 1984 – 1985, 1987 – 1988, 1991 – 1992 ve 2003 – 2005 yıllarına ait kitaplar aynı olduğundan bir sayılmıştır. 7. sınıf matematik ders kitaplarına ilişkin bilgiler Tablo 3'te verilmiş ve toplam dokuz adet kitap veri olarak kabul edilmiştir. 1936 – 1937 – 1938 – 1941 – 1945, 1972 – 1973 – 1985, 1992 – 1993, 2003 – 2005 ve 2009 – 2011 basım yıllarına sahip kitaplar aynı olduğundan bir sayılmıştır. 8. sınıf matematik ders kitaplarına ilişkin bilgiler ise Tablo 4'te verilmiş olup toplam dokuz adet kitap veri olarak kabul edilmiştir. 1973 – 1974 ve 1978 – 1980 – 1984 basım yılına sahip kitaplar aynı olduğundan bir sayılmıştır.

Tablo 7

5. Sınıf Matematik Ders Kitaplarına İlişkin Bilgiler

Öğretim Programı	Ders Kitabının Adı	Basım Yılı	Basım Evi	Yazarlar
1968	İlkokul Matematik Sınıf 5	1977	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Karagöz, Nevin Karagöz
	İlkokullar için Matematik 5	1980	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran
1990	İlkokul Matematik 5	1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Selahattin Meydan, Ali Sait Karataş, İsmail Gümüşel
2005	İlköğretim Matematik 5 Ders kitabı	2009	Saray Matbaacılık – Ankara	Şeref Aktaş, Orhan Çimen, Emel Günhan, Arif Oruç
	İlköğretim Matematik 5 Ders ve Öğrenci Çalışma Kitabı (1. Kitap)	2011	Semih Ofset	Zeynep Feryal Öztürk, Erkan Kişi, Ersü Öztaş, Arif Oruç
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 5	2021	Çağlayan Matbaası – İzmir	Hayriye Cırıtcı, İlker Gönen, Dilara Araç, Murat Özarslan, Neşe Pekcan, Meltem Şahin
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 5. Sınıf	2022	Özgün Matbaacılık – Ankara	Gülçin Göksülük

Tablo 8

6. Sınıf Matematik Ders Kitaplarına İlişkin Bilgiler

Öğretim Programı	Ders Kitabının Adı	Basım Yılı	Basım Evi	Yazarlar
1931	Orta Mektep Riyaziye Dersleri 1. Kitap	1932	Devlet Matbaası – İstanbul	Komisyon
	Ortaokul Kitapları Riyaziye Dersleri Hesap 1	1937	Türkiye Basımevi – İstanbul	
1938	Ortaokul Kitapları Matematik dersleri Aritmetik 1	1938	Devlet Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri 1	1945	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fazıl Say, Lütfi Atalık, Şerif İnan
1949	Ortaokullar için Matematik Cilt 2	1972	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	-
1977	Ortaokullar için Matematik 1	1973	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	School Mathematics Study Group (SMSC) – Stanford Üniversitesi, ABD Çeviren: Mehmet Gürkan
1949	Matematik Ortaokul 1	1977	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Tahsin Pelit, Seyfettin Aydın, Abdullah Demiralp, İbrahim Bağış, Mehmet Gürkan
1977	Matematik Ortaokul 1	1981	Emel Matbaacılık – Ankara	Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran
	Ortaokul Matematik 1	1984 1985	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Matematik 1	1987 1988	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Doğan Özdoğru, Şerafettin Devecioğlu, Ali Ünal, Menduh Ulusoy, Zakir Doğan, Mustafa Yıldırım, Hasan Has, Hasan Köle, Rıza Şahin, Memduh Akkuş
1990	Ortaokul Matematik 1	1991 1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Rüstem Kaya, Remzi Altınordu, Arif Bayrambaş
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 6	2003	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Şehnaz Bilgi, Hilal Ekmen, Nedim Gürsoy
		2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	
2005	İlköğretim Matematik 6 Ders Kitabı	2011	Semih Ofset	Komisyon
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu	2019	Koza Yayın – Ankara	Ekrem Aydın, Mehmet Ali Erenkuş

	Matematik Ders Kitabı 6			
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 6 Ders Kitabı	2021	Başak Matbaacılık – Ankara	Neziha Çağlayan, Aybike Dağıstan, Betül Korkmaz

Tablo 9

7. Sınıf Matematik Ders Kitaplarına İlişkin Bilgiler

Öğretim Programı	Ders Kitabının Adı	Yayın Yılı	Basım Evi	Yazarlar
1938	Ortaokul Kitapları Riyaziye Dersleri Hesap ve Cebir 2	1936	Devlet Basımevi – İstanbul	Komisyon
		1937	Türkiye Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri Aritmetik ve Cebir 2	1938	Devlet Basımevi – İstanbul	
	Ortaokul Kitapları Matematik Dersleri 2	1941	Maarif Matbaası – Ankara	Lütfi Atalık, Fazıl Say, Şerif İnan
		1945	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fazıl Say, Lütfi Atalık, Şerif İnan
1949	Ortaokul Kitapları Matematik 2	1950	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Remzi Baykal, Halim Erker, Saim Eğilmez, Şerif Egeli
1977	Matematik Ortaokul 2. Sınıf Ortaokul Matematik 2	1972 1973 1985	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Ölçen, Tahsin Çizenel, İsmail Gökmen
1990	Ortaokul Matematik 2	1992 1993	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Mustafa Balcı, Mustafa Karahan, Hulûsi Yıldırım, Mustafa Özkan
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 7	2003	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Fatma Tortumlu, Abdullah Kılıç, Halim Şahin
		2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	
2005	İlköğretim Matematik 7 Ders Kitabı	2009	Başak Matbaacılık – Ankara	Serpil Çiçek Aygün, Nurhayat Aynur, Sema Seher Çuha, Uğur Kahraman, Ufuk Özçelik, Mutlu Ulubay, Nevzat Ünsal
		2011	Ada Matbaacılık – Ankara	
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 7. Sınıf Ders Kitabı	2018a	Koza Yayın – Ankara	Mehmet Ali Erenkuş, Didem Eren Savaşkan
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu	2018b	Berkay Yayıncılık – Ankara	Bülent Akbulut

	Matematik Ders Kitabı 7. Sınıf Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 7 Ders Kitabı	2021	Çağlayan Matbaası – İzmir	Arzu Keskin Oğan, Soner Öztürk

Tablo 10

8. Sınıf Matematik Ders Kitaplarına İlişkin Bilgiler

Öğretim Programı	Ders Kitabının Adı	Yayın Yılı	Basım Evi	Yazarlar
1977	Matematik Ortaokul 3 Cilt 1	1973	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Süleyman Ölçen, Tahsin Çizenel, İsmail Gökmen
	Matematik Ortaokul 3. Sınıf	1974	Devlet Kitapları	
	Matematik Ortaokul 3	1978 1980	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Mehmet Salan
	Ortaokullar için Matematik 3	1984		
	Ortaokul Matematik 3	1989	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	Taner Aşan, Halit İsmaildayıoğlu, Azmi Bender, Fevzi Candan
1990	Ortaokul Matematik 3	1992	Millî Eğitim Basımevi – İstanbul	H. Hilmi Hacısalihoğlu, Meral Aksu, Ülkü Doğancıoğlu
1998	İlköğretim Matematik Ders Kitabı 8	2005	Devlet Kitapları Müdürlüğü – İstanbul	Mecit Polatoğlu, Abdulsela Çamlı, İskender Çalıkoğlu
2005	İlköğretim Matematik 8 Ders Kitabı	2009	İhlas Gazetecilik – İstanbul	Serpil Çiçek Aygün, Nurhayat Aynur, Nurdan Coşkuntürk, Sema Seher Çuha, Uğur Kahraman, Ufuk Özçelik, Mutlu Ulubay, Nevzat Ünsal
2017	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 8	2019	Koza Yayın – Ankara	Mehmet Ali Erenkuş, Didem Eren Savaşkan
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Ders Kitabı 8	2021a	Tuna Matbaacılık – Ankara	Dr. Özal Çetin, Umut Aksakal, Ümran Ertürk, Gürkan Şay, İpek Tığlı
	Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 8 Ders Kitabı	2021b	Başak Matbaacılık – Ankara	Hadi Böge, Ramazan Akıllı

Verilerin Analizi

Belge analizi gözden geçirme (yüzeysel inceleme), okuma (kapsamlı inceleme) ve yorumlamayı içeren yinelemeli bir süreçtir. Bu süreç, araştırmanın problemleri doğrultusunda ilgili kod ve kategorilerin düzenlenmesi anlamında içerik analizi (Bowen, 2009) ile bu kategorilerden ortaya çıkan temaların araştırılması ve veriler içinde bir örüntü arayarak temaların tanımlanması anlamında tematik analiz unsurlarını birleştirir (Fereday & Muir-Cochrane, 2006). Bu çalışmada her bir ders kitabı nitel bir veri analiz programına girilmiş; veri kodlama, tema belirleme ve açıklama süreci gerçekleştirilmiştir. Kitaplar sınıf bazlı incelendiğinden kodlamalar sınıflara göre farklılaşmış, araştırma problemleri bağlamında geliştirilmiş ve sınıflara göre ders kitaplarından elde edilen kodlamalar bulgular kısmında belirtke tablosu olarak sunulmuştur. Verilerin geçerlik ve güvenirliğini sağlamak için iki araştırmacı birlikte hareket etmiş ve farklı zamanlarda olmak üzere toplam dört kez kodlama yapmıştır. Kodlayıcılar arası görüş birliği Miles ve Huberman (1994) tarafından ortaya konan benzerlik formülü [Güvenirlik katsayısı = görüş birliği sağlanan kod sayısı: (görüş birliği + görüş ayrılığı sağlanan kod sayısı) x 100] ile hesaplanmış ve kodlayıcı güvenirliği 0.94 olarak belirlenmiştir. Görüş ayrılığı yaşanan noktalar tek tek tartışılmış, her iki araştırmacı da fikir birliğine varınca süreç tamamlanmıştır.

Bulgular

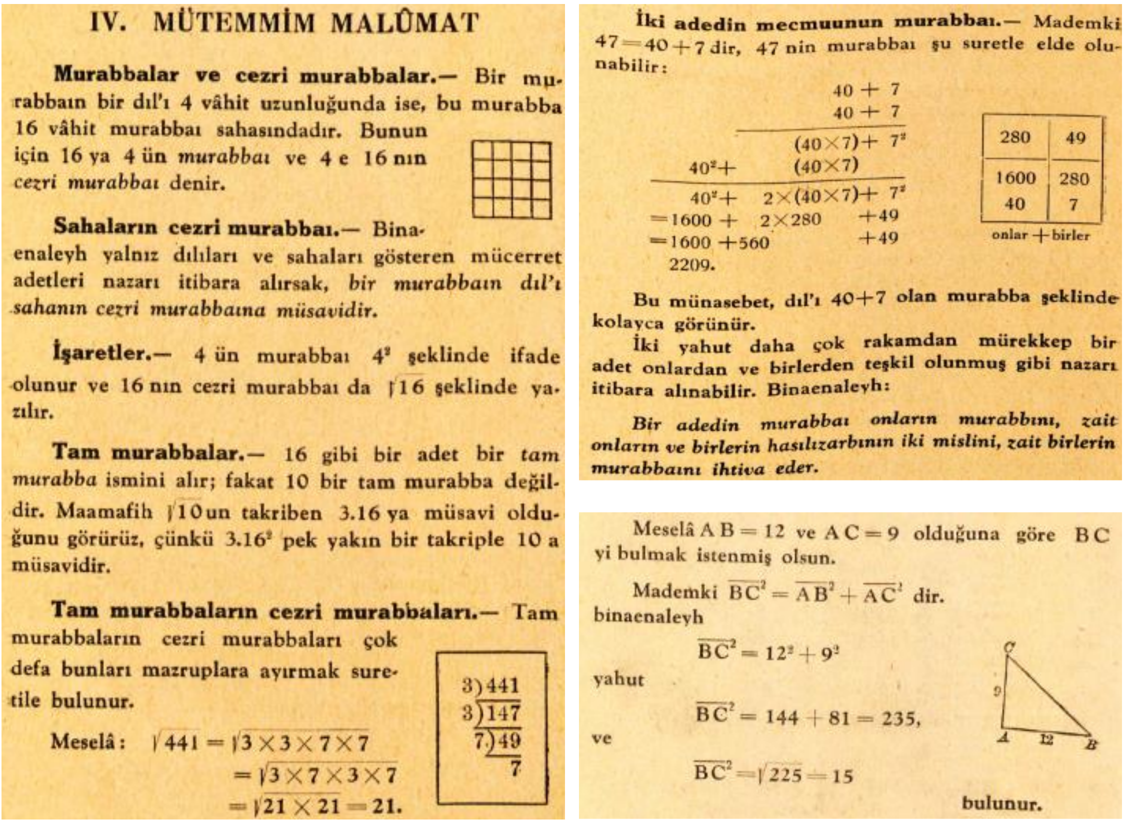
Bu bölümde araştırmanın iki alt problemine yönelik elde edilen bulgulara ve sınıf bazlı karşılaştırmalı analizlere yer verilmiştir.

Kareköklü İfadelerin Öğretimsel Bağlamda Ele Alınmasına İlişkin Bulgular

İrrasyonel sayı kavramının yapısını oluşturan temel bileşenlerden biri, kareköklü ifadelerdir. Kareköklü ifadeler beşinci sınıf matematik öğretim programlarında yer almadığından ders kitaplarında da herhangi bir bilgi bulunmamaktadır. İncelenen altıncı sınıf kitaplarından sadece 1931 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1932 yılına ait ders kitabının ek bilgiler başlığında kare ve karekök alma işlemine, tam kare olan ve olmayan sayılara, tam kare sayıların asal çarpanları ile karekök ilişkisine, iki teriminin toplamının karesi özdeşliğine $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2]$ dayanan karekök hesaplama yöntemine ve karekök ile Pisagor bağıntısı ilişkisine yer verilmektedir (Şekil 1).

Şekil 1

1932 Yılına Ait Altıncı Sınıf Matematik Ders Kitabında Yer Alan Karekök Açıklamaları



IV. MÜTEMMİM MALÛMAT

Murabbalar ve cezri murabbalar.— Bir murabbaın bir dıl'ı 4 vâhit uzunluğunda ise, bu murabba 16 vâhit murabbaı sahasındadır. Bunun için 16 ya 4 ün *murabbaı* ve 4 e 16 nın *cezri murabbaı* denir.

Sahaların cezri murabbaı.— Binaenaleyh yalnız dılıları ve sahaları gösteren mücerret adetleri nazarı itibara alırsak, *bir murabbaın dıl'ı sahanın cezri murabbaına müsavidir.*

İşaretler.— 4 ün murabbaı 4^2 şeklinde ifade olunur ve 16 nın cezri murabbaı da $\sqrt{16}$ şeklinde yazılır.

Tam murabbalar.— 16 gibi bir adet bir *tam murabba* ismini alır; fakat 10 bir tam murabba değildir. Maamafih $\sqrt{10}$un takriben 3.16 ya müsavi olduğunu görürüz, çünkü 3.16^2 pek yakın bir takriple 10 a müsavidir.

Tam murabbaların cezri murabbaları.— Tam murabbaların cezri murabbaları çok defa bunları mazruplara ayırmak suretile bulunur.

Meselâ: $\sqrt{441}=\sqrt{3\times3\times7\times7}$
$=\sqrt{3\times7\times3\times7}$
$=\sqrt{21\times21}=21.$

3) 441
3) 147
7) 49
7

İki adedin mecmuunun murabbaı.— Mademki $47=40+7$ dir, 47 nin murabbaı şu suretle elde olunabilir:

$$\begin{array}{rrr} & 40\ + & 7 \\ & 40\ + & 7 \\ \hline & (40\times7)+ & 7^2 \\ 40^2+ & (40\times7) & \\ \hline 40^2+ & 2\times(40\times7)+ & 7^2 \\ =1600\ + & 2\times280 & +49 \\ =1600\ + 560 & & +49 \\ 2209. & & \end{array}$$

280	49
1600	280
40	7

onlar + birler

Bu münasebet, dıl'ı 40+7 olan murabba şeklinde kolayca görünür.

İki yahut daha çok rakamdan mürekkep bir adet onlardan ve birlerden teşkil olunmuş gibi nazarı itibara alınabilir. Binaenaleyh:

Bir adedin murabbaı onların murabbını, zait onların ve birlerin hasılızarbının iki mislini, zait birlerin murabbaını ihtiva eder.

Meselâ $AB=12$ ve $AC=9$ olduğuna göre BC yi bulmak istenmiş olsun.

Mademki $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ dir.
binaenaleyh
$\overline{BC}^2=12^2+9^2$
yahut
$\overline{BC}^2=144+81=235,$
ve
$\overline{BC}^2=\sqrt{225}=15$
bulunur.

İncelenen yedinci sınıf matematik ders kitaplarında kareköklü ifadelerin öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığına ilişkin belirtke tablosu Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 11

Yedinci Sınıf Matematik Ders Kitaplarında Kareköklü İfadeler Konusuna Yönelik Belirtke Tablosu

Konular	1945	1950	1985	1993	2005	2011	2018a	2018b	2021
Kare ve küp için kuvvet ve kök cetveli	✓								
Kare ve küp için grafik temsili	✓								
Karekökün cebirsel açıklaması	✓								
Özdeşliğe dayanan karekök hesaplama yöntemi	✓	✓							
Karesel bölgenin alanı ile kenar uzunluğu arasındaki ilişki	✓	✓							
Karekök ve Pisagor bağıntısı ilişkisi	✓	✓							
Karekök ve geometrik ortalama ilişkisi	✓								

Tablo 5’te özetlendiği üzere yedinci sınıfta kareköklü ifadelerin öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı, hangi öğretim programına göre hazırlandıkları göz önüne alınarak her bir kitap bakımından aşağıda kısaca tarif edilmiştir.

1938 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1945 yılına ait kitapta çok terimli ifadelerin karesi (iki terimin toplamının ve farkının karesi özdeşliği ile iki kare farkı özdeşliği) ile başlayan “kare ve karekök” adlı bölüm iki terimin toplamının karesi özdeşliğine dayanan bir karekök hesaplama yöntemi (Şekil 2) ile devam etmektedir. Kuvvet ve kök cetveli (Şekil 3) vasıtasıyla bir sayının karesini alma işleminden kareköke, küpünü alma işleminden küpköke geçiş yapılmakta ve bu durum grafik temsiline kadar genişletilmektedir. Aynı kitapta karekök ve küpkök için tanım kümeleri eksik olmak üzere cebirsel bir açıklama yapılmakta ve geometrik ödevler başlığında karesel bölgenin alanı ile kenar uzunluğu, karekök ile Pisagor bağıntısı ve karekök ile geometrik ortalama arasındaki ilişkiye yönelik alıştırmalar da bulunmaktadır.

Şekil 2

1945 Yılına Ait Yedinci Sınıf Matematik Ders Kitabında Özdeşliğe Dayanan Karekök Hesaplama Yöntemi (Hintli matematikçi Aryabhata’nın kare çıkarma yöntemi (Agarwal & Agarwal, 2021))

Şekil 3

1945 Yılına Ait Yedinci Sınıf Matematik Ders Kitabında Kuvvet ve Kök Cetveli

Cetveller ve grafikle göstermeler

§ 18. KUVVET VE KÖK CETVELİ

Kare

10 dan 110 a kadar kareler

Sayı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4856	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	9231	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881

1. Yukarıki cetvel 0 dan 110 a kadar olan sayıların karelerini vermektedir. Burda karesi aranılan sayının onlar sayısı cetvelin sol kenarında, birler rakamı da üst kenarında aranmalıdır. Cetvelin doğruluğunu meselâ 1^2, 11^2, 80^2 yi arayarak dene.

Kare kök

Kareler cetvelini kullanarak aşağıdaki kare kökleri bul:

7. a) $\sqrt{2025}$, b) $\sqrt{529}$, c) $\sqrt{3929}$.
8. a) $\sqrt{20,25}$, b) $\sqrt{5,29}$, c) $\sqrt{592900}$.
9. a) $\sqrt{0,9604}$, b) $\sqrt{67600}$, c) $\sqrt{43,56}$,

Kare cetvelinin yardımiyle aşağıdaki kare köklerin iki (veya üç) haneli aşağı yukarı değerlerini bul.

10. a) $\sqrt{750}$, b) $\sqrt{7,5}$, c) $\sqrt{7500}$.
11. a) $\sqrt{5000}$, b) $\sqrt{500}$, c) $\sqrt{50}$.
12. a) $\sqrt{0,526}$, b) $\sqrt{0,0526}$, c) $\sqrt{10718}$.

Küp kök

22. Üçüncü kuvveti alındığında a olan sayı $\sqrt[3]{a}$ ile kösterili.. Buna göre aşağıdaki küp kökleri bul:

23. $\sqrt[3]{8000}$, $\sqrt[3]{27000}$, $\sqrt[3]{343000}$.

24 $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{0\,120}$.

25. a) s bir kenarı, v de küpün hacmı olduğuna göre; neden $s = \sqrt[3]{v}$ dir? Buna göre hacmı: b) 8 cm^3, c) 216 m^3, d) 125 lt. olan bir küpün kenarları ne kadar uzunluktadır?

26. Hacmı: a) 4 m^3, b) 10 m^3, c) 300 m^3 olan bir küpün kenarları kaç m. uzunluğundadır.

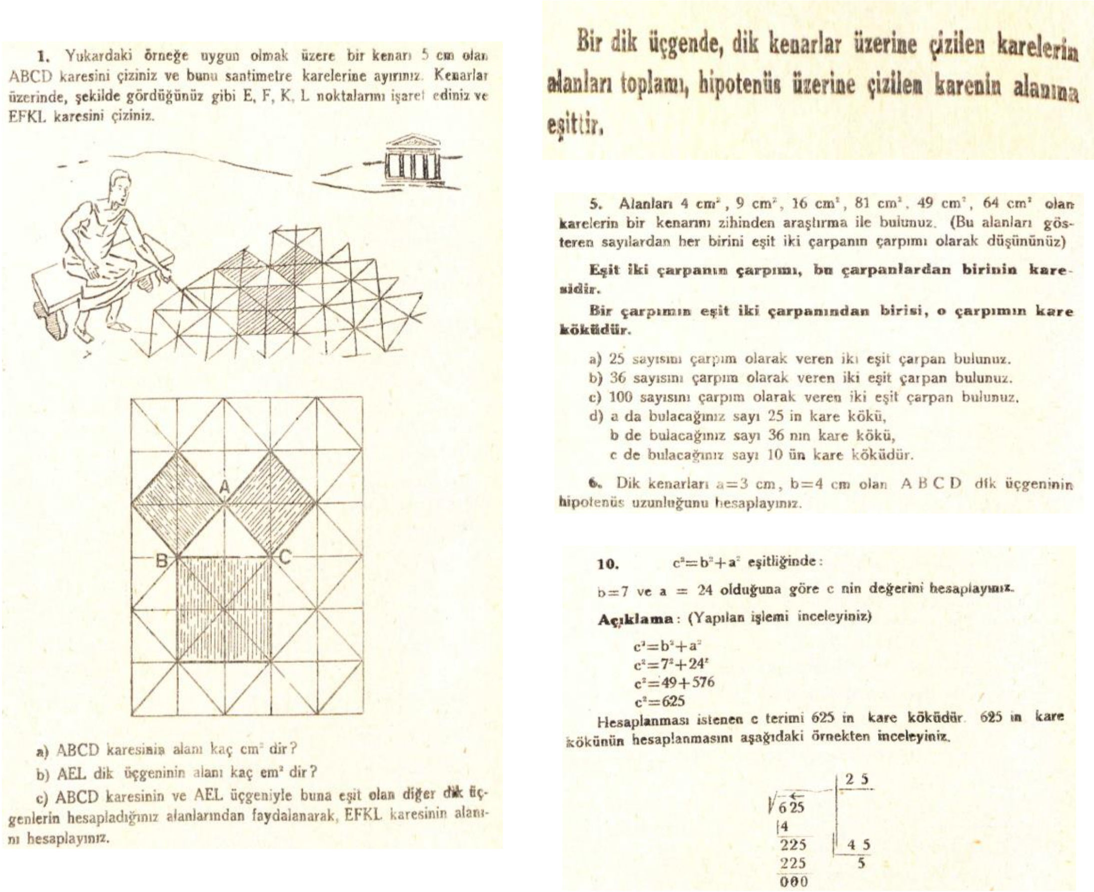
27. Şu sayılar, hangi tam sayıların arasındadır.

a) $\sqrt[3]{2}$, b) $\sqrt[3]{15}$, c) $\sqrt[3]{80}$, d) $\sqrt[3]{555}$.

1949 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1950 yılına ait kitabın "kare ve karekök" adlı bölümünde karesel ve dik üçgensel bölgelerin alanları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişki Pisagor bağıntısı ile kurulmaktadır (Şekil 4). 1945 yılı kitabına benzer şekilde bir sayının karesini alma işleminden kareköke geçiş yapılmakta ve iki terimin toplamının karesi özdeşliğine dayanan karekök hesaplama yöntemi sunulmaktadır. 1945 yılından farklı olarak kuvvet cetveli tam kareler ile sınırlandırılmaktadır. 1977 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1985 yılına ait kitapta kareköklü ifadeler, rasyonel olmayan sayılar özelinde ele alınarak ayrı bir bölüm yer almamaktadır. 1990 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1993 yılına ait kitapta 1985 yılı kitabına benzer konu sıralaması takip edilmekle birlikte rasyonel olmayan yerine irrasyonel sayı ifadesine yer verilmektedir. 1998 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2005 yılına ait kitap da 1985 ve 1993 yıllarına benzer konu sıralamasını takip etmektedir. 2005 yılı öğretim programından itibaren hazırlanan ders kitaplarında kareköklü ifadeler konusu yedinci sınıfta yer almamaktadır.

Şekil 4

1950 Yılına Ait Yedinci Sınıf Kitabında Pisagor Bağıntısı ve Karekök


1. Yukardaki örneğe uygun olmak üzere bir kenarı 5 cm olan ABCD karesini çiziniz ve bunu santimetre karelerine ayırınız. Kenarlar üzerinde, şekilde gördüğünüz gibi E, F, K, L noktalarını işaret ediniz ve EFKL karesini çiziniz.

a) ABCD karesinin alanı kaç cm² dir?
b) AEL dik üçgeninin alanı kaç cm² dir?
c) ABCD karesinin ve AEL üçgeniyle buna eşit olan diğer dik üçgenlerin hesapladığınız alanlarından faydalanarak, EFKL karesinin alanını hesaplayınız.

Bir dik üçgende, dik kenarlar üzerine çizilen karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerine çizilen karenin alanına eşittir.

5. Alanları 4 cm², 9 cm², 16 cm², 81 cm², 49 cm², 64 cm² olan karelerin bir kenarını zihinden araştırma ile bulunuz. (Bu alanları gösteren sayılardan her birini eşit iki çarpanın çarpımı olarak düşününüz)

Eşit iki çarpanın çarpımı, bu çarpanlardan birinin karesidir.

Bir çarpımın eşit iki çarpanından birisi, o çarpımın kare köküdür.

a) 25 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
b) 36 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
c) 100 sayısını çarpım olarak veren iki eşit çarpan bulunuz.
d) a da bulacağınız sayı 25 in kare kökü,
b de bulacağınız sayı 36 nın kare kökü,
c de bulacağınız sayı 10 ün kare köküdür.

6. Dik kenarları a=3 cm, b=4 cm olan ABCD dik üçgeninin hipotenüs uzunluğunu hesaplayınız.

10. $c^2=b^2+a^2$ eşitliğinde:
b=7 ve a = 24 olduğuna göre c nin değerini hesaplayınız.

Açıklama: (Yapılan işlemi inceleyiniz)

$c^2=b^2+a^2$
$c^2=7^2+24^2$
$c^2=49+576$
$c^2=625$

Hesaplanması istenen c terimi 625 in kare köküdür. 625 in kare kökünün hesaplanmasını aşağıdaki örnekten inceleyiniz.

$\sqrt{6\,25}$ | 25
4
225 | 45
225 | 5
000

İncelenen sekizinci sınıf matematik ders kitaplarında kareköklü ifadelerin öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığına ilişkin belirtke tablosu Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 12

Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitaplarında Kareköklü İfadeler Konusuna Yönelik Belirtke Tablosu

Konular	1974	1984	1989	1992	2005	2009	2019	2021a	2021b
İrrasyonel sayıları $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi örnekler ile açıklama	✓	✓	✓	✓	✓				
Karekökü cebirsel olarak açıklama		✓	✓						
Tam karelerin karekökü				✓	✓	✓	✓	✓	✓
Özdeşliğe dayanan karekök hesaplama yöntemi			✓	✓	✓				
Asal çarpanların çarpımı ve karekök alma işlemi					✓	✓	✓	✓	✓
Karesel bölgenin alanı ile kenar uzunluğu arasındaki ilişki						✓	✓	✓	✓
Tam kare olmayan kareköklerin yaklaşık değeri							✓	✓	✓

Tablo 6'da özetlendiği üzere sekizinci sınıfta kareköklü ifadelerin öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı, hangi öğretim programına göre hazırlandıkları göz önüne alınarak her bir kitap bakımından aşağıda kısaca tarif edilmiştir.

1977 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1974 yılına ait kitapta kareköklü ifadeler için ayrı bir bölüm olmayıp irrasyonel sayılar başlığında $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi örnekler sunulmaktadır. 1984 yılına ait kitapta da benzer sıra takip edilmesinin yanı sıra $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi irrasyonel sayı örneklerinin devamında karekök kavramının cebirsel açıklamasına (Şekil 5) yer verilmektedir. 1989 yılına ait kitap ise iki terimin toplamının karesi özdeşliğine dayanan karekök hesaplama yöntemini sunması bakımından farklılık göstermektedir.

Şekil 5

1984 Yılına Ait Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitabında Karekök Kavramının Cebirsel Açıklaması

Genel olarak, karesi verilen bir b pozitif sayısına eşit bir tek pozitif a sayısı vardır. Yani, $a^2 = b$ $(b > 0)$ şartını gerçekleyen, bir tek $a > 0$ sayısı vardır. Bu sayı, $a = \sqrt{b}$ biçiminde yazılıp; **"a eşit, karekök b"** diye okunur.

1990 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1992 yılına ait kitapta irrasyonel sayılar başlığında $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi örnekler sunulmakta ve "karekök alma" başlığında tam kare pozitif tam sayıların kareköküne ayrı bir yer verilmektedir. 1989 yılına benzer şekilde iki terimin toplamının karesi özdeşliğine dayanan karekök hesaplama yöntemi sunulmaktadır.

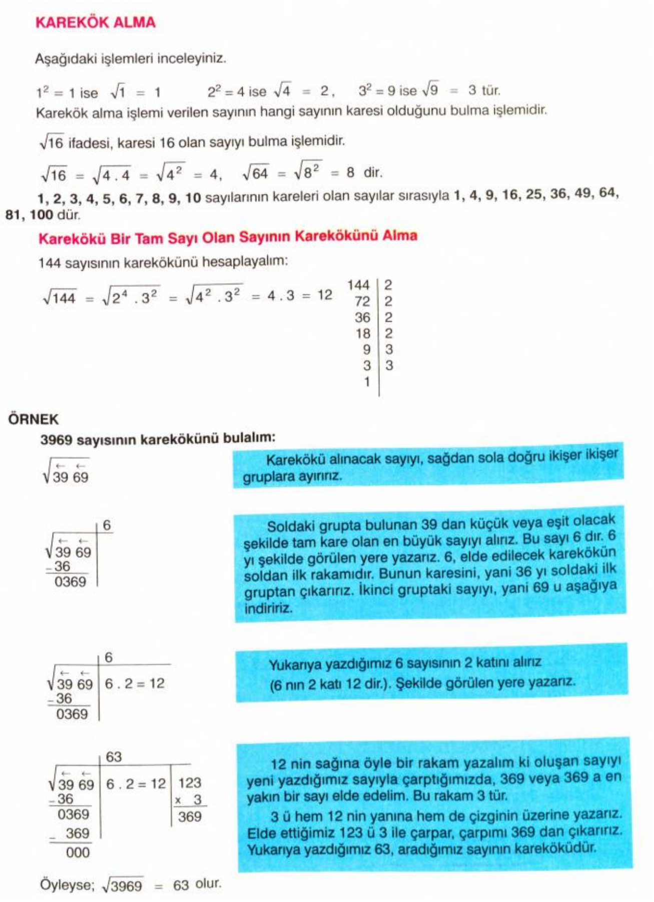
1998 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2005 yılı kitabının gerçek sayılar ünitesinde 1992 yılına benzer şekilde irrasyonel sayılar başlığında $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi örnekler sunularak tam kare pozitif tam sayıların karekökü incelenmektedir. Tam sayı kuvvetler ve bir sayının asal çarpanlarının çarpımı ile karekök alma işlemi arasındaki ilişki ilk defa 2005 yılında ele alınmasına rağmen özdeşliğe dayanan karekök hesaplama yöntemi de kitapta yer almaktadır (Şekil 6). Ek olarak kareköklü ifadelerle işlemlere bu kitapta daha fazla yer verilmektedir.

2005 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2009 yılı kitabında "kareköklü sayılar" başlığında karesel bölgenin alanından bir kenar uzunluğunu hesaplamak için karekök alma işlemine ve tam kare pozitif tam sayıların kareköküne geçiş yapılmaktadır. 2005 yılına benzer biçimde bir sayının asal çarpanlarının çarpımı ile karekök alma işlemi arasında ilişki kurulmaktadır.

2017 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2019 yılı kitabının "sayılar ve işlemler" başlığında çarpanlar ve katlar, üslü ifadeler ile kareköklü ifadeler konuları sıralanmaktadır. Bu ünitede karesel bölgenin alanından bir kenar uzunluğunu hesaplama ile kareköklü ifadelere giriş yapılmaktadır. Tam kare pozitif tam sayıların karekökü, bir sayının asal çarpanları ve karekök ilişkisi, tam kare olmayan kareköklerin yaklaşık değeri, kareköklü ifadelerle işlemler de kitapta geniş bir yer bulmaktadır. Benzer yaklaşım 2021 yılına ait kitaplarda da takip edilmektedir.

Şekil 6

2005 Yılına Ait Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitabında Karekök



KAREKÖK ALMA

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

$1^2 = 1$ ise $\sqrt{1} = 1$ $\quad 2^2 = 4$ ise $\sqrt{4} = 2$, $\quad 3^2 = 9$ ise $\sqrt{9} = 3$ tür.

Karekök alma işlemi verilen sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemidir.

$\sqrt{16}$ ifadesi, karesi 16 olan sayıyı bulma işlemidir.

$\sqrt{16} = \sqrt{4 . 4} = \sqrt{4^2} = 4$, $\quad \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ dir.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sayılarının kareleri olan sayılar sırasıyla **1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100** dür.

Karekökü Bir Tam Sayı Olan Sayının Karekökünü Alma

144 sayısının karekökünü hesaplayalım:

$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 . 3^2} = \sqrt{4^2 . 3^2} = 4 . 3 = 12$

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

ÖRNEK

3969 sayısının karekökünü bulalım:

$\sqrt{39\ 69}$ — Karekökü alınacak sayıyı, sağdan sola doğru ikişer ikişer gruplara ayırırız.

$\sqrt{39\ 69}$ | 6; -36; 0369 — Soldaki grupta bulunan 39 dan küçük veya eşit olacak şekilde tam kare olan en büyük sayıyı alırız. Bu sayı 6 dır. 6 yı şekilde görülen yere yazarız. 6, elde edilecek karekökün soldan ilk rakamıdır. Bunun karesini, yani 36 yı soldaki ilk gruptan çıkarırız. İkinci gruptaki sayıyı, yani 69 u aşağıya indiririz.

$\sqrt{39\ 69}$ | 6; $6 . 2 = 12$; -36; 0369 — Yukarıya yazdığımız 6 sayısının 2 katını alırız (6 nın 2 katı 12 dir.). Şekilde görülen yere yazarız.

$\sqrt{39\ 69}$ | 63; $6 . 2 = 12$ | 123 $\times$ 3 = 369; -36; 0369; -369; 000 — 12 nin sağına öyle bir rakam yazalım ki oluşan sayıyı yeni yazdığımız sayıyla çarptığımızda, 369 veya 369 a en yakın bir sayı elde edelim. Bu rakam 3 tür. 3 ü hem 12 nin yanına hem de çizginin üzerine yazarız. Elde ettiğimiz 123 ü 3 ile çarpar, çarpımı 369 dan çıkarırız. Yukarıya yazdığımız 63, aradığımız sayının kareköküdür.

Öyleyse; $\sqrt{3969} = 63$ olur.

İrrasyonel Sayıların Öğretimsel Bağlamda Ele Alınmasına İlişkin Bulgular

Matematik ders kitaplarında salt irrasyonel sayı konusunun nasıl ele aldığı incelendiğinde beşinci sınıfta ilgili herhangi bir bilgi bulunmadığı, altıncı sınıfta ise bazı kitaplarda (1932, 2019, 2021) çemberin çevre uzunluğunun çapına oranının yaklaşık değerinin $\frac{22}{7}$ veya $\mathbf{3,14}$ olduğu ve bu değere $\boldsymbol{\pi}$ (pi) sayısı adı verildiği görülmektedir (Şekil 7 ve 8). Öte yandan 1977 yılına ait altıncı sınıf ders kitabında $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3,141592}\ldots$ sayısının devirli ondalık açılım olmadığından rasyonel olmayan sayı olduğu ifade edilmektedir.

Şekil 7

1932 Yılına Ait Altıncı Sınıf Matematik Ders Kitabında Pi Sayısı

$$\frac{\text{Herhangi bir daire}}{\text{Bu dairenin kutru}} = \frac{\text{Diğer herhangi bir daire}}{\text{Bu dairenin kutru}}$$

$= \frac{22}{7}$ **dir.**

Bu $\frac{22}{7}$ nisbetine hususî bir isim de verilmiştir; bu isim (pi) dir ve yunanca π harfile ifade olunur.

Şu halde, daire muhiti c ve kutru d ile gösterilirse $c : d = \pi$ yahut

$$c = \pi d.$$

Ve mademki kutur nısıfkutrun iki mislidir,

$$c = 2 \pi r.$$

(π için 3.1416 adedi hakikate yakın bir takribî kıymet olarak kullanılır; fakat aksi zikredilmediği vakit $3\frac{1}{7}$ adedi kullanılmalıdır.)

Şekil 8

2021 Yılına Ait Altıncı Sınıf Matematik Ders Kitabında Pi Sayısı

Not

Bir çember ya da dairenin çevre uzunluğu, çap uzunluğuna bölündüğünde daima aynı sayıyı verir. Bu sayı **pi** olarak okunur ve "π" sembolü ile gösterilir.

π sayısının kesin değeri bilinmemekle birlikte hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla değeri 3, $\frac{22}{7}$ ya da 3,14 olarak alınabilir. Verilen örnek içerisinde π sayısının yaklaşık olarak hangi değerde alınacağı belirtilir.

Çemberin uzunluğu: $\pi \cdot$ çap $= \pi \cdot R = \pi \cdot 2r$

Yedinci sınıf matematik ders kitaplarında irrasyonel sayıların öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı, hangi öğretim programına göre hazırlandıkları göz önüne alınarak her bir kitap bakımından aşağıda kısaca tarif edilmiştir.

1938 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1945 yılı kitabında tam kare ve küp olmayan kareköklerin ve küp köklerin yaklaşık değerinin hesaplanmasına rağmen irrasyonel sayılardan bahsedilmemektedir. Benzer şekilde 1949 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1950 yılı kitabında da tam kare olmayan kareköklerin yaklaşık değeri hesaplanmakta ancak irrasyonel sayılara değinilmemektedir.

1977 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1985 yılı kitabının rasyonel sayılar ünitesinde "karesi 2 olan bir doğal sayı bulunabilir mi?" sorusundan hareketle yaklaşık değer hesabı yapılmakta, bu yaklaşık değerin sayı doğrusu üzerindeki görüntüsüne yer verilmekte, karesi 2 olan bir rasyonel sayı olmadığı, kesir şeklinde yazılamayan bu sayının $\sqrt{2}$ olduğu ve $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π gibi sayıların rasyonel olmayan sayılar olduğu ifade edilmektedir (Şekil 9).

Şekil 9

1985 Yılına Ait Yedinci Sınıf Matematik Ders Kitabında İrrasyonel Sayılar

Karesi 2 olan bir doğalsayı bulunabilir mi? Bundan başka karesi 2 olan bir rasyonel sayının da bulunmadığı deneme ile anlaşılır. Söz gelişi,

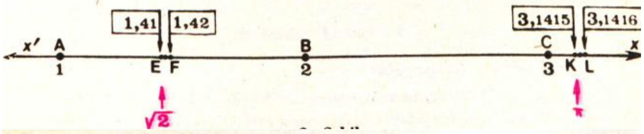
$$1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96 < 2 \quad \text{ve} \quad 1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881 < 2$$

dir. Burada, 1,41 sayısının karesinin 2 ye daha yakın olduğu görülüyor. Öte yandan,

$$1{,}42 \times 1{,}42 = 2{,}0164 > 2$$

dir. Bu kez de 1,42 nin karesinin 2 den daha büyük olduğu görülüyor. Öyleyse, karesi 2 olan sayının, 1,41 ile 1,42 ondalık sayıları arasında, olacağı anlaşılıyor. Virgülden sonraki ondalık basamak sayısı ne kadar çoğaltılırsa çoğaltılsın yine karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur.

Bir kesir şeklinde gösterilemeyen ve karesi 2 olan bu sayıyı $\sqrt{2}$ biçiminde yazacağız ve "**karekök iki**" diye okuyacağız. Bu sayının, sayı soğrusu üzerindeki görüntüsü 1,41 ile 1,42 sayılarının görüntüleri arasında bir yerde bulunur (2. şekil).



Aynı şekilde, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi sayılar için de sayı doğrusu üzerinde birer nokta vardır.

Yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan bir çemberin uzunluğu

$$2 \times \frac{1}{2} \times \pi = \pi$$

ye eşittir. Bir çemberin çevresinin çapına oranı olan π sayısının 3,1415 ile 3,1416 arasında bir sayı olduğunu biliyoruz. Öyleyse, sayı doğrusu üzerinde π sayısının görüntüsü olan bir nokta da vardır. Bu nokta 3,1415 ve 3,1416 sayılarının görüntü noktaları arasındadır (2. şekil).

Bir rasyonel sayı ile gösterilemeyen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . , π sayıları gibi sayılara **rasyonel olmayan** sayılar denir.

Rasyonel sayılar ve rasyonel olmayan sayıların oluşturduğu kümeye **gerçek sayılar** kümesi diyoruz ve bunu G ile gösteriyoruz.

1990 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1993 yılı kitabının irrasyonel (rasyonel olmayan) sayılar başlığında karesi 2 olan sayının yaklaşık değeri verilerek bu sayının $\sqrt{2}$ olarak gösterildiği ve sayı doğrusu üzerinde bir görüntüsü olmasına rağmen rasyonel olmadığı, iki tam sayının oranı olarak yazılamadığı dolayısıyla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve π gibi sayıların irrasyonel sayılar olduğu belirtilmektedir.

1998 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2005 yılı kitabının irrasyonel sayılar başlığında karesi 4 olan doğal sayının 2, karesi $\frac{1}{9}$ olan rasyonel sayının $\frac{1}{3}$ olduğu ve bu gibi sayıların her birinin sayı doğrusu üzerinde birer noktaya karşılık geldiği ifade edilerek konuya giriş yapılmaktadır. Karesi 2 olan sayının $\sqrt{2}$ olduğundan hareketle yaklaşık değer hesabı yapılarak bu sayının sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık gelmesine rağmen rasyonel olmadığı ve irrasyonel sayı olarak isimlendirildiği belirtilmektedir. 2005 ve 2017 yılı öğretim programlarında yedinci sınıfta irrasyonel sayılar konusu yer almadığından bu programlara göre hazırlanan kitaplarda irrasyonel sayılara değinilmemektedir.

Sekizinci sınıf matematik ders kitaplarında irrasyonel sayıların öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı, hangi öğretim programına göre hazırlandıkları göz önüne alınarak her bir kitap bakımından aşağıda kısaca tarif edilmiştir.

1977 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1974 yılı kitabının gerçek sayılar ünitesi irrasyonel sayılar başlığında sayı doğrusu üzerinde her rasyonel sayıya birer nokta karşılık gelmesine rağmen rasyonel sayıların görüntü noktalarının sayı doğrusunu tamamen doldurmadığına değinilerek yeni bir sayı kümesine geçiş yapılmaktadır. Bu anlamda, karesi 2 olan sayının yaklaşık değerinin hesaplanmasına ve sayı doğrusu üzerindeki görüntüsüne yer verilmektedir. $n^2 = 2$ denkleminde $n = \sqrt{2}$ olduğu belirtilmekte ve $\sqrt{2}$ sayısının neden rasyonel olmadığı kanıtlanmaktadır (Şekil 10). $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π gibi sayıların irrasyonel sayı olduğu bilgisinin yanı sıra irrasyonel sayı kümesinin $\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ eşitliğini sağlayan $\sqrt{\mathbf{3}}$ ve $-\sqrt{\mathbf{3}}$ biçimindeki gibi sayılardan oluştuğu ifade edilmektedir. 1984 ve 1989 yıllarına ait kitaplarda da benzer konu sıralaması takip edilmektir.

Şekil 10

1984 Yılına Ait Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitabında $\sqrt{2}$ Sayısının Rasyonel Olmadığının Kanıtı

Bir de şöyle düşünelim : $\sqrt{2}$ sayısı, bir rasyonel sayı olsaydı, bu sayı, aralarında asal olan $m, n \in T^+$ sayılarını kullanarak $\frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir ve

$$\frac{m}{n} \quad \frac{m}{n} = 2 \text{ ise, } \frac{m^2}{n^2} = 2 \text{ olurdu.}$$

Buradan, $m^2 = 2n^2$ bulunur. $n \in T^+$, ne olursa olsun, $2n^2$ çift bir sayı olduğundan, m^2 de çift bir sayı olur. Biz, çift olan bir sayının karesinin çift bir sayı olacağını biliyoruz. ($4^2 = 16$, $8^2 = 64$ gibi).

Öyleyse, bir $m \in T^+$ için, $m = 2k$ yazılabilir. m yerine 2k yazarak, $(2k)^2 = 2n^2$ ise, $4k^2 = 2n^2$ ve $2k^2 = n^2$ bulunur. $2k^2$ çift bir sayı olduğundan, n^2 de çift bir sayı olup, bunun sonucu olarak, n de çift bir sayı olur.

Böylece, 2 nin, m ile n nin bir ortak çarpanı olduğu anlaşılır. Oysa, biz m ile n yi, aralarında asal aldığımızdan bu mümkün değildir. Şu halde, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ hiçbir zaman 2 ye eşit olamaz. Bu nedenle, sayı doğrusunun rasyonel sayılarla da doldurulamayacağı anlaşılır.

İşte, $\sqrt{2}$ gibi, sayı doğrusunda bir görüntü noktası olduğu halde rasyonel olmayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir.

1990 yılı öğretim programına göre hazırlanan 1992 yılı kitabının gerçek sayılar ünitesi irrasyonel sayılar başlığında her ondalık kesrin rasyonel bir sayı olduğu devirli ondalık gösterimler ile ele alınmakta ve ondalık açılımı devirli olmayan sayılar irrasyonel sayı olarak tanıtılmaktadır. Önceki ders kitaplarında olduğu gibi karesi 2 olan sayının yaklaşık değerinden $\sqrt{\mathbf{2}}$ sayısına ve sayı doğrusundaki görüntüsüne geçiş yapılmaktadır. $\sqrt{\mathbf{2}}$ sayısının $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0})$ şeklinde bir rasyonel sayı olmadığından irrasyonel sayı olduğu belirtilmekte ancak neden rasyonel olmadığının kanıtlanmamaktadır. Aynı sıralama 1998 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2005 yılı kitabında da takip edilmektedir.

2005 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2009 yılı ders kitabının "olasılık, istatistik ve sayılar" ünitesinde kareköklü sayılardan gerçek sayılar alt başlığına geçilmekte ve kenar uzunluğu 1 birim olan karenin köşegen uzunluğunun rasyonel olmadığına ilişkin bir not düşülerek konuya giriş yapılmaktadır. Ara başlık olmaksızın irrasyonel sayılar iki tam sayının oranı şeklinde yazılamayan sayılar olarak tanıtılmakta ve devirli ondalıkların kesre dönüştürülmesi işlemlerine yer verilmektedir. Devirli ondalıkların iki tam sayının oranı olarak yazılabildiği için rasyonel sayı oldukları vurgusundan hareketle devirli olmayan ondalık gösterimlerin iki tam sayının oranı olamayacağı için irrasyonel olduğu belirtilmekte (Şekil 11) ve $\sqrt{\mathbf{17}}$, $\boldsymbol{\pi}$ gibi örnekler ele alınmaktadır.

Şekil 11

2009 Yılına Ait Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitabında İrrasyonel Sayılar

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin **irrasyonel sayı** olduğunu belirleyelim.
a) -4,33... devirli ondalık kesrini iki tam sayının oranı olarak yazabiliriz.
Aradığımız oran x olsun,
x= 4,333... olur.

Devreden 3 sayısını yok edebilmek için eşitliğin her iki tarafını 10 ile çarpalım:
10x=43,333...

Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkaralım:

$$\begin{array}{rl} & 10x = 43,333... \\ - & x = 4,333... \\ \hline & 9x = 39 \\ & x = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \end{array}$$

4,333... devirli ondalık kesri, iki tam sayının oranı olarak $\frac{13}{3}$ şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayıdır.

b) 2,01020301... şeklinde sonsuza kadar düzensiz bir şekilde devam eden sayılar iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz. Dolayısıyla bu sayı irrasyonel sayıdır.

2017 yılı öğretim programına göre hazırlanan 2019 ve 2021 yıllarına ait kitaplarda öğrenme alanları ünite adı yerine kullanılmakta olup "sayılar ve işlemler" öğrenme alanında üslü ifadelerden kareköklü ifadelere geçilmekte ve kareköklü ifadeler alt öğrenme alanında gerçek sayılar konusuna değinilmektedir.

Bu kitaplarda benzer konu sıralamaları takip edilmekle birlikte konuya giriş örnekleri bakımından farklılıklar görülmektedir. Örneğin, 2019 yılı kitabında $\sqrt{\mathbf{2}}$ ve $\sqrt{\mathbf{5}}$ sayılarının ondalık açılımlarının rasyonel bir sayı olarak yazılıp yazılamayacağı sorgulanarak başlangıç yapılmakta, sonlu ve devirli ondalık gösterimleri rasyonel sayı biçiminde yazma örnekleri ele alınarak her ondalık gösterimin $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0})$ biçiminde yazılabildiği belirtilerek her devirli ondalık gösterime bir rasyonel sayının karşılık geldiği ifade edilmektedir. $\sqrt{\mathbf{3}}$ ve $\sqrt{\mathbf{11}}$ gibi sayıların devirli ondalık açılıma sahip olmadığından rasyonel sayı $(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}})$ olarak yazılamayacağı ve tam kare olmayan sayıların kareköklerinin iki tam sayı oranı şeklinde yazılamadığından rasyonel olmadığı belirtilmektedir. Sonuçta rasyonel sayı olmayan gerçek sayıların irrasyonel sayı olduğu bilgisine yer verilmektedir. 2021a yılı kitabında gerçek sayılar konusuna giriş, $\boldsymbol{\pi}$ sayısının çemberin çevre uzunluğunun çapına oranı olduğu ve bu oranın ondalık açılımında virgülden sonra yaklaşık ilk 100 basamağı verilerek yapılmaktadır. Rasyonel sayıların $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ şeklinde yazılan sayılar olduğuna vurgu yapılarak $\mathbf{7}, (\mathbf{2}, \mathbf{5}), \sqrt{\mathbf{36}}, (\mathbf{4}, \mathbf{1}\overline{\mathbf{2}})$ gibi farklı gösterim biçimlerindeki rasyonel sayı örnekleri verilmektedir. İki tam sayının oranı olarak yazılamayan sayıların ise irrasyonel sayı olduğu belirtilerek $\sqrt{\mathbf{137}}, -\sqrt{\mathbf{30}}$ gibi sayıların devirli olmayan ondalık gösterimlerine geçiş yapılmaktadır. 2021b yılı kitabının "irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar" başlığında kenar uzunlukları tam sayı olan karenin köşegen uzunluğunun rasyonel sayı olup olmayacağı sorgulanarak konuya giriş yapılmakta ve devirli ondalık gösterimleri rasyonel sayıya $(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}})$ dönüştürme örneklerinden rasyonel sayıların $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ biçiminde yazılan, irrasyonel sayıların ise $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ biçiminde yazılamayan sayılar olduğu belirtilmektedir. Her rasyonel sayının ondalık gösteriminin veya devirli ondalık gösteriminin yazılabilmesine rağmen her ondalık gösterimin rasyonel sayı olarak yazılamayacağı vurgusundan hareketle $\boldsymbol{\pi}, \sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{5}}$ gibi sayıların ondalık kısmının belirli bir düzende devam etmediği için rasyonel sayı olmadığı ifade edilmektedir. Bununla birlikte karekökün içi tam kare olan kareköklerin rasyonel, tam kare olmayanların irrasyonel sayı olduğu açıklanmaktadır.

Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmada Cumhuriyet tarihi boyunca ortaokul matematik ders kitaplarında irrasyonel sayıların ve kareköklü ifadelerin öğretimsel bağlamda nasıl ele alındığı incelenmiştir. Alan yazında irrasyonel sayı kavramına yönelik ders kitabı analizi çalışmaları (örneğin, González-Martín vd., 2013) olmasına rağmen hem ortaokul seviyesinde hem de ulusal alan yazında sistematik bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Dolayısıyla bu çalışma ile irrasyonel sayı öğretiminde okul ders kitaplarında yer alan matematiksel içeriğe vurgu yaparak hangi konu sıralamalarında sunulduğu, nasıl tanımlandığı, hangi gösterim biçimlerinin kullanıldığı ve bunların birbiriyle nasıl ilişkilendirildiği ile hangi sayı örneklerinin ele alındığı gibi çıkarımlar ortaya konmuştur. Çalışmanın sonuçları, öğrencilerin kavramı öğrenirken neden zorlandıklarına ilişkin araştırma sonuçları ile birleştirildiğinde öğretim etkinlikleri tasarımına ve öğretim yöntemleri seçimine rehberlik edebilir, ders kitaplarının ve öğretim programlarının iyileştirilmesi sürecine kaynaklık edebilir.

Araştırmanın bulgularına göre, beşinci sınıfta irrasyonel sayılardan bahsedilmediği, altıncı sınıf kitaplarının bazılarında çember ile ilişkili olduğundan sadece π sayısına değinildiği, yedinci sınıfta yaklaşık son on yıldır irrasyonel sayılara ilişkin herhangi bir konu olmadığı ve sekizinci sınıfta yıllar içerisinde irrasyonel sayı kavramının tanıtılmasında farklı konu sıralamalarının takip edildiği görülmüştür. Farklı ülkelerin matematik öğretim programları incelendiğinde kareköklü ifadeler ve irrasyonel sayı kavramına giriş Amerika Birleşik Devletleri (CCSSI, 2010), Avustralya (ACARA, 2022), Kanada (OME, 2020) gibi bazı ülkelerde sekizinci sınıfta yer almaktadır. Buna rağmen kavram yapılandırılırken hangi konu sıralamalarının takip edildiğinin aydınlatılması için karşılaştırmalı ders kitabı analizlerinin yapılması gerekir.

Çalışma verileri kapsamında aynı yıllara ait öğretim programına göre hazırlanan yedinci ve sekizinci sınıf ders kitaplarında irrasyonel sayı kavramının tanıtılmasında takip edilen akıştaki değişim Şekil 12'de şemalaştırılmıştır.

Şekil 12

Aynı Yıllara Ait Öğretim Programına Göre Hazırlanan Ders Kitaplarında İrrasyonel Sayı Kavramının Konu Sıralaması

Araştırmanın bulguları ve Şekil 12 göz önüne alınarak beş maddede dikkat çeken hususlar özetlenebilir. Bunlardan ilki, 2005 yılı öğretim programına kadar irrasyonel sayıların $\sqrt{2}$ özelinde ele alınıp 2005 itibariyle kareköklü ifade tipinde farklı irrasyonel sayı örneklerine yer verilmesidir. İrrasyonel sayı kavramının tanıtılmasında belirli sayı örneklerinin ağırlıklı kullanımının olumsuz etkilerinden Sirotic and Zazkis (2007b) bahsetmiştir. Başka bir açıdan irrasyonel sayının matematiksel tanımı, Dedekind kesimleri veya Cauchy dizileri kullanılarak gerçel sayı kavramına dayanır (Argün vd., 2014) ancak özellikle ortaokul öğrencileri için belirli gösterimlerin varlığı ayırt edicidir (Zazkis, 2005). İrrasyonel sayıların en temel gösterim biçimlerinden biri karekök olduğundan irrasyonel sayılar konusuna geçişin karekök ile yapılması yerinde ve beklenen bir durum olmakla beraber konu sıralamasının nasıl yapıldığı önemlidir. 2005 yılından itibaren tam karelerin karekökü, tam kare olmayan kareköklerin yaklaşık değeri ve asal çarpanların çarpımı ile karekök alma işlemi arasındaki ilişki biçiminde takip edilen konu sıralaması kareköklü ifade öğretiminde önerilen bir fikirdir (Wiesman, 2015). Bununla birlikte 1990 yılından itibaren irrasyonel sayıların tanıtılması sadece karekökten ziyade devirli olmayan ondalık gösterim, kesir olarak yazılamayan sayılar ve iki tam sayının oranı olmayan sayılar vurgusuna dönüşmüştür. Sayıların özelliklerini ortaya çıkaran gösterimler ve bunlar arasında geçiş yapabilme becerisi kavramsal anlayışın göstergesi ve aynı zamanda öğretimin amacıdır (Zazkis, 2005). Ortaokul matematik dersinin özel amaçlarından biri de *"kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade etmek (MEB, 2018)"* olmasına rağmen kitaplarda gösterimler arası geçişin net olmadığı, ayrı konu parçaları olarak tanıtıldığı ve kareköklü sayı gibi söylemlerin ayrı bir sayı kümesi biçiminde algılanmasına yol açtığı görülmektedir. Bu durum, öğrenenlerin bir sayının farklı temsillerinin denkliğinin farkında olmaması, gösterim biçiminin sayı karakterini belirlemesi (kareköklü ise irrasyoneldir veya ondalık ise rasyoneldir gibi) veya farklı gösterimlerin farklı sayılar olarak algılanması gibi sonuçların (Çevikbaş & Argün, 2017; Guven vd., 2011; Voskoglou & Kosyvas, 2012) sebebi olabilir. Diğer yandan Crisan (2014) karekök kavramının okul matematik kitaplarında hem sembol hem de sunulma biçimi olarak tutarlı olmadığını belirtir. Bu durumu, 1974 yılına ait sekizinci sınıf ders kitabında $x^2 - 3 = 0$ denkleminin kökleri ele alınarak irrasyonel sayı kümesi tanıtılmasına rağmen sonraki yıllarda sadece pozitif köke odaklanılması örneklendirir. Diğer bir örnek, 2005 yılına kadar kitaplarda özdeşliğe dayanan karekök hesaplama yönteminin (Şekil 2) yer almasıdır. Bu duruma netlik kazandırmak için farklı ülkelerde kullanılan resmi ortaokul matematik ders kitaplarının incelenmesi ve karşılaştırmalı analizlerinin yapılması faydalı olacaktır. Son olarak irrasyonel sayılar "rasyonel olmayan sayılar", "devirli olmayan ondalık gösterime sahip sayılar" veya "kesir olarak yazılamayan sayılar" gibi olumsuz cümleler ile açıklanmaya çalışılmaktadır. Bu söylemlerden doğrudan anlaşılabileceği üzere öğrencilerin irrasyonel sayıları kavrayabilmeleri için rasyonel sayılara ilişkin zihinsel yapılarının çok sağlam olması gerekir. Nitekim öğrenenlerin irrasyonel sayı kavramında zorlanma nedenlerinden biri, rasyonel sayı kavrayışındaki eksikliklerdir (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Bu kapsamda ders kitaplarının rasyonel sayı kavramı özelinde incelenerek iyileştirmeler üzerine odaklanmak matematik öğretimine katkı sağlayabilir.

Şekil 12'ye göre dikkat çeken ikinci husus, tarihsel bağlamda irrasyonel sayıların birim karenin köşegen uzunluğunu hesaplama probleminin bir çıktısı olmasından dolayı incelenen bazı ders kitaplarında (1945 ve 1950 yılları yedinci sınıf kitaplarında) bu durum göz önüne alınarak kare alma işleminden kareköke Pisagor bağıntısı ile geçiş yapılmasıdır. Nitekim Arcavi ve diğerlerine (1987) göre irrasyonel sayıların tarihsel kökeni ve geometriyle olan özel bağı irrasyonel sayı kavramının daha anlamlı şekilde öğrenilmesine yardımcı olabilir. Benzer biçimde Sirotic ve Zazkis (2007a) ve Shiver ve Klosterman (2022) de irrasyonel sayı öğretiminde Pisagor bağıntısının aktif kullanıldığı geometrik temsili önermektedir. Mevcut matematik öğretim programında kareköklü ifadeler ile Pisagor bağıntısı ayrık ünitelerde yer almakta olup birbiriyle yakın ilişkileri sebebiyle iki konunun iç içe ele alınabileceği öğretim tasarımları yapmak daha faydalı olabilir.

Üçüncü husus, kavram tanımlarının verilişinde izlenen yol ile ilgilidir. 1984 yılı sekizinci sınıf kitabında karekök kavramının cebirsel tanımı (Şekil 5) yer almasına rağmen 1990 yılı öğretim programından itibaren karekök alma işleminin nasıl yapılacağını ilişkin açıklamalara yer verilmiştir. Bu durum matematiksel bir kavramın öğrencilerin mevcut bilgileri üzerine inşa ederek ve anlamını kaybetmeden nasıl tanımlanabileceği (Çakıroğlu, 2013) sorusunu akla getirmektedir. Yapılandırmacı öğrenme kuramında birey, bilgiyi bilindik kavramlar temelinde ve bunlar arasında bağlantılar kurarak oluşturduğundan yeni bir kavramın tanımı didaktik açıdan uygun ve özellikle bireyin zaten bildiği kavramları içerecek şekilde oluşturulmalıdır. Diğer bir deyişle, öğretimde matematiksel kavramların tanımı hem matematiksel olarak doğru hem de didaktik olarak uygun olmalıdır (Winicki-Landman & Leikin, 2000). Bu hususta sekizinci sınıfta sunulan karekök kavramının cebirsel tanımı matematiksel olarak doğru bir tanım olmasına rağmen hitap ettiği öğrenci seviyesinin ön bilgilerine uygun bir tanım değildir. Nitekim 1990 sonrasında işlemsel anlayışa dayalı bir yaklaşım ile karekök alma işlemine dayalı bir açıklama sunulmaktadır.

Dördüncü husus, bazı sekizinci sınıf kitaplarında $\sqrt{2}$ sayısının neden rasyonel olmadığının kanıtı (Şekil 10) yer almakta iken 1990 yılından itibaren bu yaklaşımdan vazgeçilmesidir. Bu durum ortaokulda matematiksel kanıtın hangi düzeyde yer alması gerektiği konusunu gündeme getirmektedir. İlgili alan yazın incelendiğinde akıl yürütme – kanıt kavramlarına rastlanmakta ve akıl yürütmeden kanıta uzanan bir süreç (NCTM, 2000; Stylianides, 2008) açıklanmaktadır. *"Matematiksel kanıt, belirli akıl yürütme ve doğrulama türlerini ifade etmenin resmi bir yolu (NCTM, 2000)"* olarak tanımlandığında matematiksel kanıtın akıl yürütme becerisi gerektirdiği (Kuchemann & Hoyles, 2009) söylenebilir. Öğrenciler bir varsayımı çürütmek için gerekçe veya karşı örnek gibi ihtiyaç duydukları matematiksel bilgiye her zaman sahip olmadığından her sınıf seviyesinin varsayımları ifade etme biçimleri farklılık gösterir. Örneğin, ilkokul öğrencileri düşüncelerini kendi sözleri ile tanımlayabilir ve çoğunlukla somut materyal kullanabilir. Sınıf seviyesi ilerledikçe öğrencilerin artan karmaşıklık ile yeterlik kazanmaları, matematiksel temsiller ile sembolleri kullanarak varsayımları araştırmayı ve formüle etmeyi öğrenmeleri beklenir (NCTM, 2000). Dolayısıyla kanıt, matematik lisans öğrencileri için bile çok zor bir alan (Bieda, 2010) iken ortaokul öğrencilerinin $\sqrt{2}$ sayısının neden irrasyonel olduğunun formal kanıtını anlamlandırması beklenemez. Diğer bir deyişle, $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığının kanıtını öğrencilerin anlamlandırabilmesi için matematiksel sembolleri manipüle etme, denklem çözme gibi becerilerin belirli bir seviyede olması gerektiğinden ortaokulda kanıt yerine akıl yürütme becerisi öne çıkmaktadır. Öte yandan 1990 yılına kadar $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunun kanıtına verilirken 1990 sonrasında bu yaklaşımından vazgeçilmesi öğrencilerin mevcut bilgilerinden yeni bilgilere geçişe doğru bir yönelime işaret ettiğinden öğretim programlarında benimsenen öğrenme kuramının etkisini de göstermektedir.

Beşinci husus ise bazı kitaplarda matematiksel bilgi hatalarının varlığıdır. Örneğin, 2019 yılı sekizinci sınıf kitabında her ondalık gösterimin $\frac{a}{b}$ $(\boldsymbol{a\ ve\ b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ biçiminde yazılabileceği ifade edilmesine rağmen devirli olmayan ondalık gösterimler $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamaz. Nitekim 2021b yılına ait kitapta her ondalık gösterimin rasyonel sayı olmadığı vurgulanmaktadır. Bu tür hataların tespit edilebilmesi için alanında uzman kişiler tarafından ders kitaplarının kontrol edilerek gerekli düzeltmelerin yapılması ve matematik ders kitaplarını kimlerin yazması gerektiği konuları ön plana çıkmaktadır. Öte yandan ders kitaplarının *"herhangi bir eğitim ve öğretim programı çerçevesinde (MEB, 2021, 14 Ekim)"* hazırlanması gerekirken bu çalışmada elde edilen bulgulara göre bazı ders kitaplarının sonraki öğretim programını etkilemiş olma ihtimali açığa çıkmış ve aynı öğretim programına göre hazırlanan kitaplarda bile bazı farklılıkların olduğu gözlenmiştir.

Bu beş husus birlikte değerlendirildiğinde Cumhuriyet tarihi boyunca matematik öğretim programlarında irrasyonel sayı kavramının anlatımında küçük sayılabilecek değişimlerin 1990 yılı ile başlasa da büyük değişikliklerin 2005 yılında yapıldığı görülmüştür. Bunun nedeni Türk eğitim sistemi tarihinin dönem noktalarından biri sayılan ve 1990'lı yılların başında Dünya Bankası tarafından desteklenen "Millî Eğitimi Geliştirme Projesi" kapsamında öğretim programı geliştirme çalışmaları ile MEB ve akademisyenlerin iş birliğinin artması olabilir (Argün vd., 2010). Öte yandan 2005 öncesinde davranışçı öğrenme kuramı ve 2005 sonrasında yapılandırmacı öğrenme kuramı benimsendiğinden iki kuramın da bilgiye bakış açılarının farklı olması kavramların sunuş biçimini de etkilemiştir. Bu durum davranışçılıkta öğretmen ve ders kitaplarının sunduğu bilginin kesin, gerçek ve mutlak olması ile yapılandırmacılıkta bilginin birey tarafından süreç içerisinde oluşturulduğu ana fikirleriyle açıklanabilir (Oral, 2019). Örneğin, 1945 yılında karekök kavramının cebirsel tanımına yer verilirken son yıllarda karekök alma işleminin nasıl yapıldığına vurgu yapılmaktadır. Benzer şekilde son yıllarda irrasyonel sayıların öğrencilerin önceki öğrenmeleri zemininde gösterim biçimlerinden faydalanarak tanıtılması yapılandırmacı öğrenme kuramının izlerini taşımaktadır.

Sonuç olarak, matematik öğretim programlarında benimsenen öğretim kuramının doğrudan ders kitaplarını etkilediği ve dolayısıyla sınıftaki öğretimi etkileme potansiyelinin yüksek olduğu, tarihsel bağlamda irrasyonel sayıların öğretimsel olarak farklı akışlarda sunulmasına rağmen hala üzerinde durulması gereken noktalar olduğu, öğrencilerin kavramı daha iyi anlamlandırmasına destek olabilecek yaklaşımların araştırılmasına ve bu değişimlerin hem öğretim programlarına hem de ders kitaplarına yansıtılmasına ihtiyaç olduğu söylenebilir. Geçmiş uygulamaların oluşturduğu tarihsel birikim, yeni yaklaşım veya değişim fikirlerinin doğmasını sağlayacaktır.

Öneriler

Araştırmanın sonuçları doğrultusunda aşağıdaki öneriler yapılabilir:

Bu çalışmada matematik ders kitaplarında kareköklü ifadelerden irrasyonel sayılara uzanan yol incelenmiştir. Kesirden ondalık gösterime ve rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara geçişi ele alan ve özellikle "kesir olarak yazılamayan sayılar" anlamında irrasyonel sayılar öğretimini aydınlatacak türde çalışmalar yürütülebilir.

Cumhuriyetin ilk yıllarında temeli kültür olan Millîyetçilik esasına dayalı bir eğitim anlayışı hâkimken 1940'ların başında hümanizm ve materyalcilik esaslı bir eğitim anlayışı benimsenmeye başlamıştır. Bu durum Türkiye'nin Millî eğitim politikalarında bir kırılma noktası olarak görülmektedir (Budak, 2003). Mevcut araştırma özelinde değerlendirildiğinde 1931 yılı matematik öğretim programına göre hazırlanan 1932 yılı altıncı sınıf kitabının Cumhuriyetin ilk dönemlerinde yayınlanması ve kitabın içerik bakımından türlerinden oldukça farklı bir tasarımda olması sebebiyle bu kitabın ayrıca ele alınması, döneminin ve günümüz eğitim anlayışının ışığında karşılaştırmalı olarak incelenmesinin Millî eğitim tarih birikimimize katkı sağlayacaktır.

Fan (2013) tarafından yapılan çalışmada matematik ders kitapları araştırmalarında genellikle belge analizi kullanıldığı ve bu alanda yeni yöntemlerle yapılan çalışmaların ders kitabı araştırmalarının ilerlemesini sağlayacağı belirtilmektedir (Fan vd., 2013). Özellikle matematik konularının hangi şekilde ele alınmasına ve hangi yolun daha iyi olduğuna yönelik nedensel soruları yanıtlamak için tasarlanan araştırmalarla kanıta dayalı cevaplar elde edilebilir. Diğer bir deyişle, Glasnović Gracin (2014) çalışmasında da belirttiği gibi matematik eğitiminde ders kitaplarının rolüne ilişkin tam bir resim çizebilmek için bu kitapların sınıfta nasıl kullanıldığı ve öğretmenlerin kitapları kullanırken hangi yöntemleri uyguladıkları üzerine araştırma sonuçlarına da ihtiyaç vardır.

Yazar Katkı Oranı

Araştırmaya birinci yazar %60, ikinci yazar %40 oranında katkı sunmuştur.

Etik Beyan

“Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesinde’ yer alan tüm kurallara uyulmuş ve yönergenin ikinci bölümünde yer alan “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemlerden” hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Çatışma Beyanı

Yazarlar çalışma kapsamında herhangi bir kurum veya kişi ile çıkar çatışması bulunmadığını beyan etmektedirler.

References

Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılarla ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Necmettin Erbakan Üniversitesi.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2022). *Australian Curriculum*. https://v9.australiancurriculum.edu.au/

Agarwal, R. P., & Agarwal, H. (2021). Origin of irrational numbers and their approximations. *Computation, 9*(3), 1–49. https://doi.org/10.3390/computation9030029

Arbour, D. (2012). *Students' understanding of real, rational, and irrational numbers* [Unpublished master's thesis]. Concordia University.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, *7*(2), 18–23. https://www.jstor.org/stable/40247891

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi*. Gazi Kitabevi.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Sriraman, B. (2010). A brief history of mathematics education in Turkey: K-12 mathematics curricula. *ZDM Mathematics Education, 42*, 429–441. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0250-0

Bakır, N. Ş. (2011). *10. sınıf öğrencilerinin matematik dersi sayılar alt öğrenme alanındaki başarı düzeyleri ve düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Gazi Üniversitesi.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.4.0351

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27–40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Budak, Ş. (2003). Atatürk’ün eğitim felsefesi ve geliştirdiği eğitim sisteminin değiştirilmesi. *Millî Eğitim Dergisi*, *160*, 16–17.

Chang, C. C., & Silalahi, S. M. (2017). A review and content analysis of mathematics textbooks in educational research. *Problems of Education in the 21st Century, 75*(3), 235.

https://www.proquest.com/scholarly-journals/review-content-analysis-mathematics-textbooks/docview/2343792753/se-2?accountid=11248

Crisan, C. (2014, April). *The case of the square root: Ambiguous treatment and pedagogical implications for prospective mathematics teachers*. Proceedings of the 8the British Congress of Mathematics Education Nottingham, UK.

Common Core State Standarts Initiative [CCSSI]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf

Çakıroğlu, E. (2013). Matematiksel kavramların tanımlanması. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* kitabı içinde (ss. 1–14). Pegem Akademi.

Çevikbaş, M., & Argün, Z. (2017). Geleceğin matematik öğretmenlerinin rasyonel ve irrasyonel sayi kavramlari konusundaki bilgileri. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(2), 551–581. https://doi.org/10.19171/uefad.368968

Erdem Uzun, Ö., & Dost, Ş. (2023). Content analysis of qualitative studies on irrational numbers in Turkey: A meta-synthesis study. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* (65), 1-11. https://doi.org/10.21764/maeuefd.1078863

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*, 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating rigor using thematic analysis: A hybrid approach of inductive and deductive coding and theme development. *International Journal Of Qualitative Methods, 5*(1), 80–92. https://doi.org/10.1177/160940690600500107

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29–44. https://doi.org/10.1007/BF01273899

Glasnović Gracin, D. (2014). Mathematics textbook as an object of research. *Croatian Journal of Education: Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje, 16* (Sp. Ed. 3), 211–237.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230–248. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

Guven, B., Cekmez, E., & Karatas, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS, 21*(5), 401–416. https://doi.org/10.1080/10511970903256928

Hong, D. S., & Runnalls, C. (2020). Understanding length× width× height with modified tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 614–625. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1583383

Kidron, I. (2018). Students’ conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 94–118. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0071-z

Kuchemann, D., & Hoyles, C. (2009). From empirical to structural reasoning in mathematics: Tracking changes over time. In Despina A. Stylianou, Maria L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades (171-190)*. Routledge.

Leylek, R. (2020). *Türkiye, Finlandiya ve Kanada’da matematik ders kitaplarındaki bazı ortak konuların göstergebilimsel analizi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2021, 14 Ekim). *Millî Eğitim Bakanlığı Ders Kitapları ve Eğitim Araçları Yönetmeliği*. Resmi Gazete (Sayı: 31628). https://www.resmigazete.gov.tr/eskiler/2021/10/20211014-1.htm

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2023). *Ferit Ragıp Tuncor arşiv ve dokümantasyon kütüphanesi*. https://arsivkutuphanesi.meb.gov.tr/Home/Hakkimizda

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 232–257). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47637-1

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Sage Publications.

Morgan, H. (2022). Conducting a qualitative document analysis. *Qualitative Report, 27*(1), 64–77. https://doi.org/10.46743/2160-3715/2022.5044

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Oral, B. (Ed.) (2019). *Öğrenme öğretme kuram ve yaklaşımları* (5. Bs.). Pegem Akademi.

Ontario Ministry of Education [OME]. (2020). *The Ontario curriculum, grades 1-8: Mathematics*. https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/elementary-mathematics/grades/g8-math/home

Özmantar, M., Akkoç, H., Kuşdemir Kayıran, B., & Özyurt, M. (Ed.) (2020). *Ortaokul matematik öğretim programları tarihsel bir inceleme* (3. Baskı). Pegem Akademi.

Patel, P., & Varma, S. (2018). How the abstract becomes concrete: Irrational numbers are understood relative to natural numbers and perfect squares. *Cognitive Science, 42*(5), 1642–1676. https://doi.org/10.1111/cogs.12619

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research and methods: Integrating theory and practice*. SAGE Publications.

Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rizos, I., & Adam, M. (2022). Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(3), 1–15. https://doi.org/10.29333/iejme/11977

Shiver, J., & Klosterman, P. (2022). Making irrational numbers real. *Middle School Journal, 53*(1), 36–42. https://doi.org/10.1080/00940771.2021.1997534

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers on the number line–where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477–488. https://doi.org/10.1080/00207390601151828

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 49–76. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16. https://www.jstor.org/stable/40248592

Tavşan, S., & Pusmaz, A. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının pi sayısı bağlamındaki kavram tanımlarının incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 39*(3 100. Yıl Eğitim Sempozyumu Özel Sayı), 260–274. https://doi.org/10.7822/omuefd.681540

Wiesman, J. L. (2015). Enhancing students' understanding of square roots. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(9), 556–558. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.9.0556

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21. https://www.jstor.org/stable/40248314

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Redimat-Revista De Investigacion En Didactica De Las Matematicas, 1*(3), 301–226. https://doi.org/10.4471/redimat.2012.16

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 207–217. https://doi.org/10.1080/00207390412331316951

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *Research in Collegiate Mathematics Education, 7*, 1–27.