Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 13(4), 1351-1360, 2023. DOI: 10.31466/kfbd.1272911

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi

The Black Sea Journal of Sciences

ISSN (Online): 2564-7377 https://dergipark.org.tr/tr/pub/kfbd

Araştırma Makalesi / Research Article

Büyük (Grand) Lorentz Uzaylarının Bazı Temel Özellikleri

İlker ERYILMAZ[1*], Gökhan IŞIK[2]

Öz

Lebesgue uzayı kavramı büyük Lebesgue uzayı kavramına ağırlıklı ve ağırlıksız olarak genelleştirilmiş olup klasik Lorentz uzayı kavramıda benzer mantıkla büyük Lorentz uzaylarına genelleştirilmiştir. Bu çalışmada büyük Lorentz uzaylarını yeniden düzenleme fonksiyonu ile normlandırmak yerine maksimal fonksiyon kullanarak $1\leq p,q\leq\infty$ için yeniden düzenlemeler altında değişmez olan bir Banach fonksiyon uzayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca büyük Lorentz uzaylarındaki kapsama özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Distribution fonksiyonu, Lorentz uzayı, büyük Lorentz uzayı.

Some Basic Properties of Grand Lorentz spaces

Abstract

The concept of Lebesgue space has been generalized to the large Lebesgue space with non-weight and weight, and the classical Lorentz space concept has been generalized to large Lorentz spaces with a similar logic. In this manuscript, it is demonstrated that there is a Banach function space that is invariant under rearrangements using the maximal function instead of normalizing the large Lorentz spaces with the rearrangement function for $1\leq p,q\leq\infty$. In addition, coverage and inclusion properties in large Lorentz spaces are investigated.

Keywords: Distribution function, Lorentz space, grand Lorentz space.

[1]Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun, Türkiye, rylmz@omu.edu.tr
[2]Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun, Türkiye, igokhan1402@gmail.com

[1]https://orcid.org/0000-0002-3590-892X [2]https://orcid.org/0009-0000-3234-3057

[*]Sorumlu Yazar/Corresponding Author

Geliş/Received: 29.03.2023 **Kabul/Accepted:** 11.11.2023

1. Giriş

(Iwaniec ve Sbordone, 1992) çalışmasında Lebesgue uzayı kavramını genelleştirip büyük (grand) Lebesgue uzayları adını verdikleri yeni ölçülebilir, hemen her yerde eşit integrallenebilir fonksiyon sınıflarının uzayını tanıttılar. Buna göre (grand) büyük Lebesgue uzayları $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^{p)}$ ile gösterilen $(0,1)$ üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının uzayıdır. Herhangi bir $g \in L^{p)}$ için

$$\|g\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |g(x)|^{p-\varepsilon} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

şeklinde tanımlı norma göre bir (rearrangement-invariant) yeniden düzenlendiğinde değişmez kalan Banach fonksiyon uzayıdır. Ayrıca $0 < \varepsilon \le p-1$ olduğunda $L^p \subset L^{p)} \subset L^{p-\varepsilon}$ kapsamaları gerçekleşir. Büyük Lebesgue uzayları üzerinde elde edilen yeni sonuçlar (Fiorenza, 2000; Fiorenza ve Karadzhov, 2004; Kokilashvili, 2009; Kokilashvili, 2010; Kokilashvili ve Meskhi, 2009; Meskhi, 2015; Meskhi, 2011, Samko ve Umarkhadzhiev, 2011a; Samko ve Umarkhadzhiev, 2011b) çalışmalarında gözlemlenebilir. $1 < p < \infty$ ve w bir integrallenebilir ağırlık fonksiyonu olsun. $L_w^{p)}$ ile gösterilen ağırlıklı büyük Lebesgue uzayları $(0,1)$ üzerinde tanımlı ve her $u \in L_w^{p)}$ için

$$\|u\|_{p),w} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |u(x)|^{p-\varepsilon} w(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

normunu sonlu kılan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzaylar (Fiorenza ve ark, 2008) çalışmasında tanımlanmış olup yine aynı çalışmada $L_w^{p)}$ uzayı üzerindeki maksimal operatörün sınırlılığını incelemişlerdir. $L_w^{p)}$ uzayları üzerindeki Riesz potansiyelinin sınırlılığı (Kokilashvili ve Meskhi, 2009) çalışmasında karakterize edilmiştir. Burada belirtilmesi gereken bir nokta, büyük Lebesgue uzaylarının (ağırlıklı veya ağırlıksız) sonlu ölçüm kümeleri üzerinde tanımlandığıdır. (Samko ve Umarkhadzhiev, 2011a; Samko ve Umarkhadzhiev, 2011b) gibi bazı makalelerde bu uzaylar genel kümeler üzerinde de tanımlanmıştır. Bunların yanı sıra (Pankaj ve Kumari, 2012) çalışmasında klasik ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı büyük Lorentz uzaylarının kavramları karşılaştırılmıştır ve maksimal operatörün sınırlılığı incelenmiştir. Büyük Lorentz dizi uzaylarının temel özellikleri ve bu uzaylar üzerindeki çarpım operatörleri (Oğur, 2020) çalışmasında incelenmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu çalışmada $X=(X,\Sigma,\mu)$ ile bir $\sigma-$sonlu ölçüm uzayını, $L(\mu)$ ile X üzerinde tanımlı $\Sigma-$ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının lineer uzayını ve χ_A ise A kümesinin karakteristik fonksiyonu gösterilecektir. Herhangi bir v fonksiyonu X ölçüm uzayı üzerinde ölçülebilir (measurable) bir fonksiyon olsun ve $\lambda_v(\cdot)$ fonksiyonunu $y\geq 0$ için

$$\lambda_v(y)=\mu\left\{x\in X:|v(x)|>y\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu $\lambda_v(\cdot)$ fonksiyonuna, v fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir. Ayrıca $t\geq 0$ ve $\inf\varnothing=\infty$, $\sup\varnothing=0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v^*(t)&=\inf\left\{y>0:\lambda_v(y)\leq t\right\}\\ &=\sup\left\{y>0:\lambda_v(y)>t\right\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan v^* fonksiyonuna v fonksiyonunun yeniden düzenlenmiş (rearrangement) fonksiyonu, $x>0$ olmak üzere

$$v^{**}(x)=\frac{1}{x}\int_0^x v^*(s)\,ds$$

biçiminde simgelenen v^{**} fonksiyonuna da v fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir.

Yine $\lambda_v(\cdot), v^*(\cdot)$ ve $v^{**}(\cdot)$ fonksiyonlarının tanım kümeleri üzerinde artmayan ve aynı zamanda sağdan sürekli fonksiyonlar olduğu biliniyor (Blozinski, 1972a; Blozinski, 1972b; Chen ve Lai, 1975; Hewitt ve Ross, 1963).

Tanım 1. f , (X,Σ,μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlı, ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve

$$\|f\|^*_{p,q}=\|f\|^*_{p,q,\mu}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*(t)\right)^q dt\right)^{1/q} & ;0<p<\infty,0<q<\infty\\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & ;0<p\leq\infty, q=\infty\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\|f\|^*_{p,q}<\infty$ koşulunu sağlayan X üzerinde tanımlı ve ölçülebilir f fonksiyonlarının hemen hemen her yerde eşitlik bağıntısına göre oluşan denklik sınıflarının vektör uzayına Lorentz uzayı denir ve $L(p,q)(X)=L(p,q,\mu)(X)$ ile gösterilir (Hewitt ve Ross, 1963; Rieffel, 1967).

Özel olarak $p=r=q$ alınırsa

$$\|f\|_{r,r}^{*}=\left(\int_0^{\infty}\left(f^{*}(t)\right)^{r}dt\right)^{1/r}=\left(\int_G\left|f(x)\right|^{r}d\mu(x)\right)^{1/r}=\|f\|_{r}$$

olduğu literatürden biliniyor. Bunun sonucu $L(r,r,\mu)(X)=L^{r}(X)$ çıkar (Hewitt ve Ross, 1963). Eğer $L(p,q)(X)$ Lorentz uzayı üzerine her $f\in L(p,q)(X)$ için

$$\|f\|_{p,q}=\|f\|_{p,q,\mu}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^{\infty}t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^{**}(t)\right]^{q}dt\right)^{1/q} & ;0<p<\infty,0<q<\infty\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t) & ;0<p\le\infty,q=\infty\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{p,q}=\|\cdot\|_{p,q,\mu}$ fonksiyonu konulursa bu fonksiyonel bir norm olup $\left(L(p,q)(X),\|\cdot\|_{p,q}\right)$ uzayı bu norm altında $1<p<\infty,1<q<\infty$; $p=1=q$ veya $p=\infty=q$ için bir Banach uzayıdır. Son olarak $1<p<\infty$ ve $1\le q<\infty$ iken X üzerinde tanımlı, ölçülebilir bir f fonksiyonu için

$$\|f\|_{p,q}^{*}\le\|f\|_{p,q}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{p,q}^{*}$$

eşitsizliği vardır. Yani $\|\cdot\|_{p,q}^{*}$ fonksiyoneli $\|\cdot\|_{p,q}$ normuna denktir (Chen ve Lai, 1975; Hewitt ve Ross, 1963).

(Pankaj ve Kumari, 2012) çalışmasında tanımlanan Büyük Lorentz uzayının tanımında kullanılan $f^{*}(\cdot)$ yerine $f^{**}(\cdot)$ kullanarak Banach fonksiyon uzayı olan (grand) büyük Lorentz uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2. $X=(0,1)$ üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\|f\|_{p,q)}=\begin{cases}\sup\limits_{0<\varepsilon<q-1}\left(\dfrac{q}{p}\varepsilon\displaystyle\int_0^{1}t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^{**}(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}, & 1<q<\infty\\ \sup\limits_{0<t<1}t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t), & q=\infty\end{cases}$$

fonksiyoneline göre normu sonlu olan kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının oluşturduğu uzaya (Grand) Büyük Lorentz uzayı denir ve $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ sembolüyle gösterilir.

3. Bulgular ve Tartışma

Lemma 1. Herhangi $g \in L(p,q)(X)$ için

$$t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_{p,q} \tag{3.1}$$

eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 1. (X,Σ,μ) bir $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı, $1<p<\infty$ ve $1<r\leq\infty$ olsun. O zaman $L(p,r)(X) \subset L_{p,r)}(X,\Sigma,\mu)$ kapsaması gerçekleşir.

İspat. Herhangi bir $f \in L(p,r)(X)$ için $1<r<\infty$ olmak üzere (3.1) eşitsizliği ile

$\|f\|_{p,r)} = \sup\limits_{0<\varepsilon<r-1} \left(\frac{r}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{r-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}}$ olmak üzere

$$\|f\|_{p,r)} = \sup_{0<\varepsilon<r-1} \left(\frac{r}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{r-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}} \leq \sup_{0<\varepsilon<r-1} \left(\frac{r}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{p,r} \right)^{r-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}}$$

$$= \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{p,r} \sup_{0<\varepsilon<r-1} \left(\frac{r}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}} = r \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{p,r}$$

elde edilir. Sonuç olarak $1<r<\infty$ olduğunda $L(p,r)(X) \subset L_{p,r)}(X)$ kapsaması sağlanır. Yine $r=\infty$ olduğu durum içinde herhangi bir $u \in L(p,\infty)(X)$ için $\|f\|_{p,\infty)} = \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \leq \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|_{p,\infty}$ eşitsizliği sağlandığından $1<p<\infty, 1<r\leq\infty$ için $L(p,r)(X) \subset L_{p,r)}(X)$ kapsaması bulunur.

Örnek 1. $1<r<\infty$ olmak üzere $X=(0,1)$ kümesi üzerinde tanımlı olan $g(x) = \frac{r-1}{r} x^{-\frac{1}{r}}$ fonksiyonunu alalım. g, X üzerinde tanımlı ölçülebilir (sürekli) bir fonksiyon olup bu g fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$\lambda_g(y) = D_g(y) = \mu\{x \in X : |g(x)| > y\} = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < \frac{r-1}{r} \\ \left(\frac{r}{r-1}\lambda\right)^{-r}, & y \geq \frac{r-1}{r} \end{cases}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $t \geq 0$ olmak üzere g fonksiyonunun yeniden düzenlenmiş fonksiyonu

$$g^*(t) = \inf\{y : y > 0, \lambda_g(y) \leq t\} = \begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ \frac{r-1}{r} t^{-\frac{1}{r}}, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

ve g fonksiyonunun ortalama fonksiyonu da

$$g^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)\,ds = \begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ t^{-\frac{1}{r}}, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak $g(x) = \frac{r-1}{r} x^{-\frac{1}{r}}$ fonksiyonu için $1 < q < \infty$ olmak üzere,

$$\|g\|_{r,q} = \left(\frac{q}{r}\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} g^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{q}{r}\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{r}} t^{-\frac{1}{r}}\right)^q \frac{dt}{t}\right) = \infty$$

elde edilir. Yani $g \notin L(r,q)(X)$ bulunur. Öte yandan

$$\|g\|_{r,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{r}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{r}-1}\left(t^{-\frac{1}{r}}\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{r}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{\varepsilon}{r}-1} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \leq q < \infty$$

olur. Bu ise $g \in L_{r,q)}(X)$ demektir. Böylece $L(r,q)(X) \varnothing L_{r,q)}(X)$ olduğu görülür.

Teorem 2. (X,Σ,μ) bir sonlu ölçüm uzayı olmak üzere

i) $1 < r < \infty,\ 1 < q < m < \infty$ için $L_{r,q)}(X) \subset L_{r,m)}(X)$ ve

ii) $1 < r < k < \infty,\ 1 < q \leq \infty$ için $L_{k,q)}(X) \subset L_{r,q)}(X)$ kapsamaları gerçekleşir.

İspat.

(i) Kapsamanın varlığını göstermek için bazı eşitsizliklere ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için $1 < q < m < \infty$ olduğundan

$$\left(\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon} ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}} = \left(\int_0^1 s^{\frac{(m-\varepsilon)}{r}}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon} s^{\frac{(\varepsilon-r)}{r}} ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}$$

integralinde $a = \frac{q-\varepsilon}{m-\varepsilon}$, $b = \frac{q-\varepsilon}{q-m}$ parametreleri ve $s^{\frac{(\varepsilon-r)}{r}} ds$ ölçümüne göre Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left(\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{r-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}}=\left(\int_0^1 s^{\frac{(m-\varepsilon)}{r}}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}s^{\frac{(\varepsilon-r)}{r}}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}$$

$$\le\left(\left(\left(\int_0^1\left(s^{\frac{(m-\varepsilon)}{r}}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}\right)^{a}s^{\frac{(\varepsilon-r)}{r}}ds\right)^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\left(\int_0^1 1^b s^{\frac{(\varepsilon-r)}{r}}ds\right)^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\right)$$

$$=\left(\int_0^1 s^{\frac{q}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{q-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{(q-m)}{(q-\varepsilon)(m-\varepsilon)}}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left(\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\le\left(\int_0^1 s^{\frac{q}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{q-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{(q-m)}{(q-\varepsilon)(m-\varepsilon)}} \tag{3.2}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\|f\|_{r,m)}=\sup_{0<\varepsilon<m-1}\left(\frac{m}{r}\varepsilon\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}=\sup_{0<\varepsilon<m-1}\left(\frac{q}{r}\frac{m}{q}\varepsilon\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}$$

$$=\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left\{\left(\frac{q}{r}\varepsilon\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\frac{m}{q}\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\int_0^1 s^{\frac{m}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\right\}$$

ifadesinde (3.2) eşitsizliği kullanılırsa $C(r,q,m,\varepsilon)$ bir sabit olmak üzere

$$\|f\|_{r,m)}=\sup_{0<\varepsilon<m-1}\left\{\left(\frac{q}{r}\varepsilon\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\frac{m}{q}\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\int_0^1 s^{\frac{r}{p}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{m-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\right\}$$

$$\le\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left\{\left(\frac{q}{r}\varepsilon\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\frac{m}{q}\right)^{\frac{1}{m-\varepsilon}}\left(\int_0^1 s^{\frac{q}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{q-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{(q-m)}{(q-\varepsilon)(m-\varepsilon)}}\right\}$$

$$=C(r,q,m,\varepsilon)\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left\{\left(\frac{q}{r}\varepsilon\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(\int_0^1 s^{\frac{q}{r}-1}\left(f^{**}(s)\right)^{q-\varepsilon}ds\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right\}$$

$$=C(r,q,m,\varepsilon)\|f\|_{r,q)}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|f\|_{r,m)}\le C(r,q,m,\varepsilon)\cdot\|f\|_{r,q)}$ eşitsizliğiyle kapsama görülür.

(ii) $q=\infty$ ise $1<p<k$, $\frac{1}{k}<\frac{1}{p}<1$ ve $t\in(0,1)$ olduğundan $t^{\frac{q}{k}}>t^{\frac{q}{p}}$ yazılır. Herhangi bir $v\in L_{k,\infty)}(X)$ için her iki tarafın supremumu alınırsa $\|v\|_{p,\infty)}=\sup_{0<t<1}t^{\frac{1}{p}}v^{**}(t)\le\sup_{0<t<1}t^{\frac{1}{k}}v^{**}(t)=\|v\|_{k,\infty)}$ elde edilir. Bu ise $L_{k,\infty)}(X) \subseteq L_{p,\infty)}(X)$ demektir. Şimdi kabul edelim ki $1<q<\infty$ olsun. $1<p<k$, $\frac{1}{k}<\frac{1}{p}<1$ ve $t\in(0,1)$ olduğundan $t^{\frac{q}{k}-1} > t^{\frac{q}{p}-1}$ olup herhangi bir $f \in L_{k,q)}(X)$ için

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,q)} &= \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right)^{q-\varepsilon}t^{\frac{\varepsilon}{p}-1}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^{**}(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \\
&\le \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{qk}{pk}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{k}-1}\left(f^{**}(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left\{\left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(\frac{q}{k}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{k}-1}\left(f^{**}(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right\} \\
&= \frac{k}{p}\|f\|_{k,q)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak her iki durumda da $1<p<k<\infty$ ve $1<q\le\infty$ için $L_{k,q)}(X)\subseteq L_{p,q)}(X)$ kapsaması gerçekleşir.

Örnek 2. (X,Σ,μ) bir $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı olmak üzere herhangi bir $E\in\Sigma$ için $\chi_E^*(s)=\chi_{[0,\mu(E))}(s)$ ve $\chi_E^{**}(s)=\min\left\{1,\frac{\mu(E)}{s}\right\}$ bulunur. Yine $1<s<\infty$ ve $1<r<\infty$ için $\|\chi_E\|_{r,s}=\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{r}}$ ve $\|\chi_E\|_{r,\infty}=\left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{r}}$ olduğundan $\chi_E\in L(r,s)(X)$ olur. Teorem 1 ile $\chi_E\in L_{r,s)}(X)$ yazılır. Ayrıca

$$
\|\chi_E\|_{r,s)}=\begin{cases}\sup\limits_{0<\varepsilon<s-1}\left(\frac{s}{r}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{s}{r}-1}\left(\chi_E^{**}(t)\right)^{s-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{s-\varepsilon}}, & 1<s<\infty\\ \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{r}}\chi_E^{**}(t), & s=\infty\end{cases} = \begin{cases}(s-1)\left(\mu(E)\right)^{\frac{s}{r}}, & 1<s<\infty\\ \left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{r}}, & s=\infty\end{cases}
$$

bulunur.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada bazı topolojik özellikleri verilen büyük (grand) Lorentz uzayları, Lorentz uzayları, Lebesgue uzayları ve Hardy uzayları dahil olmak üzere çeşitli diğer fonksiyon uzaylarının genelleştirilmesidir. Bu uzaylar, Lebesgue ve büyük (grand) Lebesgue uzayları tarafından iyi yakalanamayan, sonsuzda bozulma davranışı sergileyen fonksiyonların incelenmesinde özellikle faydalıdırlar.

Büyük Lorentz uzaylarının, kısmi diferansiyel denklemler teorisi, harmonik analiz ve fonksiyonel analiz dahil olmak üzere çok çeşitli matematiksel alanlarda uygulamaları vardır. Büyük Lorentz uzayları ve ilgili kavramların uygulandığı bazı önemli alanlar şunlardır:

Büyük Lorentz uzayları, özellikle Fourier analizi bağlamında fonksiyonların davranışını incelemek için harmonik analizde uygulanabilir. Fonksiyonların bozunum özelliklerini ve Fourier serilerinin yakınsamasını anlamak için daha geniş bir çerçeve sağlayabilirler.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde Lorentz uzaylarının yetersiz kaldığı durumlarda büyük Lorentz uzayları kullanılabilir. Eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler dahil olmak üzere çeşitli kısmi diferansiyel denklem türlerine yönelik çözümlerin düzenlilik ve bozunum özelliklerinin analiz edilmesine yardımcı olurlar.

Büyük Lorentz uzayları, ağırlığın uzaydaki μ ölçüsü ile belirlendiği ağırlıklı fonksiyon uzayları olarak görülebilir. Bu ağırlıklı uzaylar, büyüklüklerine bağlı olarak davranışları değişen fonksiyonların incelenmesinde önemlidir.

Kısmi diferansiyel denklem teorisinde önemli olan Sobolev uzayları büyük Lorentz uzayları ile ilişkilendirilebilir. Büyük Lorentz uzayları, fonksiyonların Sobolev uzayı özelliklerini bozunma ve düzenlilik açısından incelemek için kullanılabilir.

Bunların yanısıra Dağıtım teorisi, Olasılık teorisi ve Dalgacık (wavelet) analizinde yeni sonuçların elde edilmesinde yardımcı olabilir.

Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

Blozinski, A.P., (1972a). On a convolution theorem for $L(p,q)$ spaces, *Trans. Am. Math. Soc*., 164, 225-265.

Blozinski, A.P., (1972b). Convolution of $L(p,q)$ functions, *Proc. Am. Math. Soc*., 32(1), 237-240.

Castillo, R.E., Rafeiro, H., (2016). *An introductory course in Lebesgue spaces,* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, [Cham], 2016. xii+461 pp.

Chen, Y.K., Lai, H.C., (1975). Multipliers of Lorentz spaces, *Hokkaido Math. J*., 4, 267-270.

Fiorenza, A., (2000). Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces, *Collect. Math.*, 51(2), 131–148.

Fiorenza,A, Gupta, B., and Jain,P., (2008). The maximal theorem for weighted grand Lebesgue spaces, *Studia Math.*, 188(2), 123–133.

Fiorenza,A., Karadzhov,G.E., (2004). Grand and small Lebesgue spaces and their analogs, *Z. Anal. Anwendungen*, 23(4), 657–681.

Hewitt, E., Ross, K.A., (1963). *Abstract Harmonic Analysis,Vol.1*, Springer Verlag, Berlin, 650 pp.

Iwaniec, T., Sbordone,C., (1992). On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 119(2), 129–143.

Kokilashvili,V., (2009). Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 151, 129–133.

Kokilashvili,V., (2010). Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces, *Problems in Mathematical Analysis* 49, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 170(1), 20–33.

Kokilashvili,V., Meskhi,A., (2009). A note on the boundedness of the Hilbert transform in weighted grand Lebesgue spaces, *Georgian Math. J.*, 16(3), 547–551.

Meskhi, A., (2011). Weighted criteria for the Hardy transform under the Bp condition in grand Lebesgue spaces and some applications, *J. Math. Sci.*, *Springer*, 178 (6), 622–636.

Meskhi, A., (2015). Criteria for the boundedness of potential operators in grand Lebesgue spaces, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 169, 119–132.

Oğur, O. (2020). Grand Lorentz sequence space and its multiplication operatör, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69 (1), 771-781.

Pankaj,J., Kumari,S., (2012). On grand Lorentz spaces and the maximal operator. *Georgian Math. J.*, 19(2), 235–246.

Rieffel, M., (1967). Induced Banach representations of Banach Algebras and locally compact groups, *J. Funct. Anal.*, 1, 443-491.

Samko,S.G., Umarkhadzhiev,S.M., (2011a). On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure, *Azerb. J. Math.*, 1(1), 67–84.

Samko,S.G., Umarkhadzhiev,S.M., (2011b), On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum, *Azerb. J. Math.*, 1(2), 143–144.