Bir Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlı Bulanık Sayı Dizilerinin Δ_λ^m – İstatistiksel Yakınsaklığı Üzerine

Hıfsı ALTINOK
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 23119, Elazığ-TURKEY
hifsialtinok@gmail.com

(Geliş/Received: 17.03.2016; Kabul/Accepted: 11.04.2016)

Özet

Bu çalışmada, $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi kullanılarak bir modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlı bulanık sayı dizilerinin Δ – istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilip bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Sayı Dizisi, İstatistiksel Yakınsaklık, Modülüs Fonksiyonu, Fark Dizisi.

On Δ_λ^m – Statistically Convergence of Sequences of Fuzzy Numbers by a Modulus Function

Abstract

In this paper we generalize the concept of Δ – statistical convergence defined by a modulus function of sequences of fuzzy numbers using the sequence $\lambda = (\lambda_n)$ and give some inclusion relations.

Key words: Sequence of Fuzzy Numbers, Statistical Convergence, Modulus Function, Difference Sequence.

1. Giriş

Doğruluk derecesi çok değerli bir mantık olan bulanık küme teorisi ilk defa 1965 de Zadeh [33] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teorinin bulanık topolojik uzaylar, bulanık ölçümler, bulanık matematiksel programlama ve bulanık mantık gibi çok çeşitli uygulama alanları bulunmaktadır. Bulanık sayı dizisi kavramına ilk defa Matloka'nın [22] çalışmasında rastlanmaktadır. Matloka [22], sınırlı ve yakınsak bulanık sayı dizilerinin tanımını vermiş ve bunların bazı özelliklerini açıklamıştır. O tarihten beri bulanık sayı dizileriyle ilgili pek çok çalışma yapılmış ve hala bu konu üzerine çalışmalar devam etmektedir [3,6,8-12,16,23,32].

İstatistiksel yakınsaklık tanımı 1951 de Fast [17] tarafından kısa bir not olarak verilmiştir. Schoenberg [30] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak incelemiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini belirtmiştir. Bu kavram farklı isimler altında pek çok araştırmacı tarafından ölçüm teorisine, lokal konveks uzaylara, toplanabilirlik teorisine, Banach uzaylarına, Fourier analizde trigonometrik serilere ve bulanık küme teorisine uygulanmıştır [13,18,28].

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [20] tarafından tanımlanmış ve o günden beri pek çok araştırma makalesine konu olmuştur. Gerek reel gerekse bulanık sayı dizilerinin fark dizilerinin fen ve mühendisliğin özellikle akustik alanında ilginç ve pratik çeşitli uygulamalara sahip olduğu görülmektedir. Bu uygulamalardan birisi de Kawamura ve diğ. [19] nin çalışmasıdır. Bu çalışmada Kawamura ve diğ. [19] üyelik derecesi μ olan fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan ΔX_k ve $\Delta^2 X_k$ fark dizilerini kullanarak deprem esnasında yer hareketlerinin basit anlamda bulanık küme kurallarına uygun şekillere sahip olduğunu belirtip bunların deprem dalgalarının tahmininde kullanılabileceğini göstermiştir. Diğer yandan Mursaleen [24] kompleks terimli diziler için λ – istatistiksel yakınsaklığı tanımlamış ve istatistiksel yakınsaklık ile aralarındaki ilişkileri incelemiştir. Daha sonra Altinok ve diğ. [3] bulanık sayı dizilerinin genelleştirilmiş fark dizilerini kullanarak $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmiştir. Başka bir çalışmada, Altinok ve diğ. [5] bulanık sayı dizileri için $\lambda_n \le \mu_n$ durumunda $\lambda-$ ve $\mu-$istatistiksel yakınsaklık arasındaki bazı kapsama bağıntılarını vermiştir. Son zamanlarda, Cakan ve Altin [7], bir modülüs fonksiyonunu kullanarak $\Delta-$istatistiksel yakınsak tüm bulanık sayı dizilerinin kümesi olan $S_F(\Delta, f)$ kümesini tanımlayarak bazı sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmada amacımız $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n \to \infty$ şartlarını sağlayan pozitif terimli azalmayan bir $\lambda = (\lambda_n)$ dizisini ve

$$\Delta^m X_k = \Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1}, \qquad (m = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde tanımlanan Δ^m genelleştirilmiş fark operatörünü kullanarak bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirip literatürde bulanık sayı dizilerinin genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık teorisindeki mevcut boşlukları doldurmaktır.

2. Temel Kavramlar

Bu kısımda, çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlara yer verilmiştir.

$\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir bulanık kümeye bulanık sayı denir:

i) u normaldir, yani, $u(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı vardır

ii) u bulanık konvekstir, yani, $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \le \lambda \le 1$ için

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min[u(x), u(y)]$$

dir,

iii) u üst yarı süreklidir;

iv) $\operatorname{supp} u = cl\{x \in \mathbb{R} \,:\, u(x) > 0\} = [u]^0$

kümesi kompakttır.

Bir u bulanık sayısının $[u]^\alpha$ şeklinde gösterime sahip $\alpha-$seviye kümesi

$$[u]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \,:\, u(x) \ge \alpha\}, & \alpha \in (0,1] \text{ ise} \\ \operatorname{supp} u, & \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Açıktır ki u nun bir bulanık sayı olması için gerek ve yeter şart her bir $\alpha \in [0,1]$ için $[u]^\alpha$ kümesinin kapalı bir aralık ve $[u]^1 \ne \phi$ olmasıdır. Bir r reel sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \ne r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir $\bar{r}$ bulanık sayısı olarak düşünülebilir.

Bütün reel terimli u bulanık sayılarından oluşan $L(\mathbb{R})$ uzayına bulanık sayı uzayı denir.

Bulanık sayılarla ilgili yapılan çalışmalarda u ve v gibi iki bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için genellikle $d(u,v) = \sup\limits_{0\le\alpha\le1} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ şeklinde tanımlı bir metrik kullanılır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve bu metrik

$$d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \max\left\{\left|\underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha\right|, \left|\overline{u}^\alpha - \overline{v}^\alpha\right|\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. d nin $L(\mathbb{R})$ üzerinde bir metrik ve $(L(\mathbb{R}), d)$ nin bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir [14].

Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi $X : \mathbb{N} \to L(\mathbb{R})$ şeklinde bir fonksiyondur. Bu tanıma göre verilen (X_k) dizisinin her bir terimi aslında bir bulanık sayıya karşılık gelmektedir [22].

Bulanık sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık tanımını Nuray ve Savaş [26] vermiştir.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) \,:\, \Delta x \in \ell_\infty\},$$
$$c(\Delta) = \{x = (x_k) \,:\, \Delta x \in c\},$$
$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) \,:\, \Delta x \in c_0\},$$

şeklinde tanımlanır. İlk olarak Et ve Çolak [15] tarafından genelleştirilen fark dizi uzaylarına daha sonradan Et ve diğ. [16], Altınok ve Mursaleen [4], Altinok ve diğ. [3], Tripathy ve Baruah [32] ve daha pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

$w(F)$ bütün bulanık sayı dizilerinin kümesi olsun. $m = 1,2,3,...$ için $\Delta^m : w(F) \to w(F)$ operatörü

$X_k = [\underline{X}_k, \overline{X}^k]$ ve $X_{k+1} = [\underline{X}_{k+1}, \overline{X}^{k+1}]$ olmak üzere $\Delta^m X_k = \Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1}$ şeklinde tanımlanır. Açıktır ki Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü bir lineer operatördür.

Modülüs fonksiyonu tanımı ilk olarak Nakano [25] tarafından verilmiştir. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna bir modülüs fonksiyonu denir.

i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $f(x+y) \le f(x) + f(y), \quad x, y \ge 0,$

iii) f artandır,

iv) f fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

Reel ve bulanık sayı dizilerinde modülüs fonksiyonu konusuna pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır [1,2,7,29,31].

$\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$ şeklinde tanımlı $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $n \to \infty$ iken sonsuza giden pozitif terimli azalmayan bir dizi olsun. Bu durumda $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Vallée-Pousin ortalaması $t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$ şeklinde tanımlıdır. Eğer $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to L$ şart sağlanırsa bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi L sayısına $(V, \lambda)-$ toplanabilirdir denir.

Bu çalışma boyunca $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi yukarıdaki gibi bir dizi, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü olarak alınacaktır.

3. Sonuçlar

Tanım 3.1. f bir modülüs fonksiyonu, $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ ve $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$ olacak şekilde pozitif reel sayıların azalmayan bir dizisi, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve (m = 1,2,3,…) için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n \ : \ f\left[d(\Delta^m X_k, X_0) \right] \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $X_0 \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla $\Delta_\lambda^m -$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$X_k \xrightarrow{S_F^\lambda(\Delta^m, f)} X_0$$

veya

$$S_F^\lambda(\Delta^m, f) - \lim X_k = X_0$$

yazılır. Bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlı tüm $\Delta_\lambda^m -$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesi $S_F^\lambda(\Delta^m, f)$ ile gösterilecektir. Yani $X_0 \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$S_F^\lambda(\Delta^m, f) = \{ X = (X_k) \in w(F) \ : \ X_k \xrightarrow{S_F^\lambda(\Delta^m, f)} X_0 \}$$

dir. $(S_F^\lambda(\Delta^m, f), d_f)$ uzayı

$$d_f(X,Y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f\left[d(X_k, Y_k) \right]$$

metriğiyle bir metrik uzaydır. d_f ’ nin $X, Y, Z \in S_F^\lambda(\Delta^m, f)$ için metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki örnekte $S_F^\lambda(\Delta^m, f)$ kümesinin elemanı olan bir dizi verilmiştir.

Örnek 3.2. Bir $f(x) = x$ sınırsız modülüs fonksiyonunu ve $(\lambda_n) = n$ dizisini göz önüne alalım. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$k = 2^n$, $(n = 1,2,3,...)$ için

$$\begin{cases} \frac{k}{2k+2} x + \frac{2-k}{2k+2}, & x \in \left[\frac{k-2}{k}, 3\right] \text{ise} \\ -\frac{k}{2k+2} x + \frac{5k+2}{2k+2}, & x \in \left[3, \frac{5k+2}{k}\right] \text{ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

ve $k \ne 2^n$ için

$$\begin{cases} x-7, & x\in[7,8] \text{ise} \\ -x+9, & x\in[8,9] \text{ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bazı aritmetik işlemler sonucunda (X_k) ve (ΔX_k) dizilerinin $\alpha-$seviye kümeleri sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{(2k+2)\alpha+k-2}{k}, \frac{5k+2-(2k+2)\alpha}{k}\right], & k=2^n \text{ ise} \\ [\alpha+7, 9-\alpha], & k\neq 2^n \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{(3k+2)\alpha-8k-2}{k}, \frac{2-2k-(3k+2)\alpha}{k}\right], & k=2^n \\ \left[\frac{(3k+5)\alpha+2k}{k+1}, \frac{8k+10-(3k+5)\alpha}{k+1}\right], & k+1=2^n \\ [2\alpha-2, 2-2\alpha], & d.d. \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $k\neq 2^n$ için $d(\Delta X_k, L)=0$ ve $k=2^n$ için

$$\begin{aligned} d(\Delta X_k, L) &= \sup_{0\le\alpha\le 1} d\left([\Delta X_k]^\alpha, [L]^\alpha\right) \\ &= d\left([\Delta X_k]^0, [L]^0\right) \\ &= \max\left\{\left|\underline{[\Delta X_k]^0} - \underline{[L]^0}\right|, \left|\overline{[\Delta X_k]^0} - \overline{[L]^0}\right|\right\} \\ &= \max\left\{\left|\tfrac{-8k-2}{k} - (-2)\right|, \left|\tfrac{2-2k}{k} - 2\right|\right\} \\ &= \tfrac{6k+2}{k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $k+1=2^n$ için $d(\Delta X_k, L)=\frac{6k+8}{k+1}$ bulunur. Bulunan son metriklerin f modülüs fonksiyonu altındaki görüntüsü ise

$$f[d(\Delta X_k, L)] = \begin{cases} \frac{6k+2}{k}, & k=2^n \text{ ise} \\ \frac{6k+8}{k+1}, & k+1=2^n \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

dir. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ ve özel olarak $(\lambda_n)=n$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n \;:\; f\left[d(\Delta X_k, L)\right]\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

elde edilir. Yukarıda yapılan işlemlerin benzeri $(\Delta^2 X_k)$ dizisi için yapılırsa (ΔX_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{(3k+4)\alpha-8k-4}{k}, \frac{2-(5k+2)\alpha}{k}\right], & k=2^n \text{ ise} \\ \left[\frac{(6k+10)\alpha+4k}{k+1}, \frac{16k+20-(6k+10)\alpha}{k+1}\right], & k+1=2^n \text{ ise} \\ \left[\frac{(5k+12)\alpha-10k-22}{k+2}, \frac{2-(5k+12)\alpha}{k+2}\right], & k+2=2^n \text{ ise} \\ [4\alpha-4, 4-4\alpha], & d.d. \end{cases}$$

olarak hesaplanır. Buradan $(\Delta^2 X_k)$ dizisinin f modülüs fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$f[d(\Delta^2 X_k, L)] = \begin{cases} \frac{4k+4}{k}, & k=2^n \text{ ise} \\ \frac{12k+16}{k+1}, & k+1=2^n \text{ ise} \\ \frac{6k+14}{k+2}, & k+2=2^n \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde olup her $\varepsilon>0$ ve $(\lambda_n)=n$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n \;:\; f\left[d\left(\Delta^2 X_k, L\right)\right]\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

elde edilir. Eğer bu sürece devam edilirse genel olarak her $\varepsilon>0$ ve $(\lambda_n)=n$ için

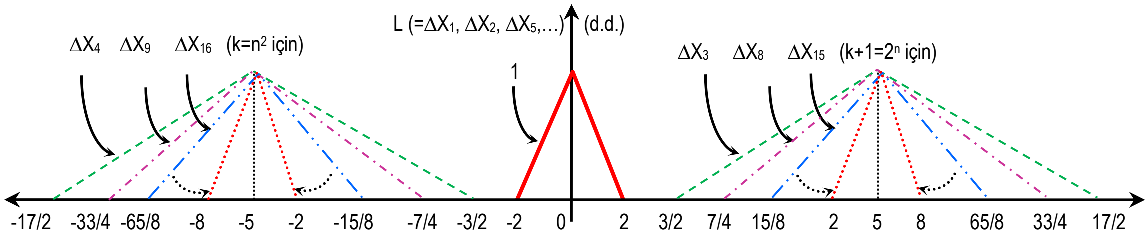
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n \;:\; f\left[d\left(\Delta^m X_k, L\right)\right]\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

bulunur. Böylece $X=(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m, f)$ bulunur. Şekil 1'de $m=1$ için $(\Delta^m X_k)$ bulanık sayı dizisinin terimlerinin dizilişi gösterilmiştir.

Teorem 3.3. f herhangi bir modülüs fonksiyonu, (X_k) bir bulanık sayı dizisi, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $\lambda=(\lambda_n)$ dizisi Tanım 3.1 deki gibi verilsin. Bu takdirde

(i) Eğer $S_F^\lambda(\Delta^m, f)-\lim X_k = X_0$ ve $c\in\mathrm{R}$ ise $S_F^\lambda(\Delta^m, f)-\lim cX_k = cX_0$ dir.

(ii) Eğer $S_F^\lambda(\Delta^m, f)-\lim X_k = X_0$ ve $S_F^\lambda(\Delta^m, f)-\lim Y_k = Y_0$ ise $S_F^\lambda(\Delta^m, f)-\lim(X_k+Y_k)=X_0+Y_0$ dir.



Şekil 1. m=1 hali için $(\Delta^m X_k)$ bulanık fark dizisinin terimleri

Teorem 3.4. $S_F(\Delta^m, f) \subset S_F^{\lambda}(\Delta^m, f)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır.

İspat. $(\Leftarrow)$: Kabul edelim ki $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \le n \ : \ f[d(\Delta^m X_k, X_0)] \ge \varepsilon\} \supset \{k \in I_n \ : \ f[d(\Delta^m X_k, X_0)] \ge \varepsilon\}$$

ve böylece

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n \ : \ f[d(\Delta^m X_k, X_0)] \ge \varepsilon\}\right| \ge \frac{1}{n}\{k \in I_n \ : \ f[d(\Delta^m X_k, X_0)] \ge \varepsilon\} \ge \frac{\lambda_n}{n}.\frac{1}{\lambda_n}\{k \in I_n \ : \ f[d(\Delta^m X_k, X_0)] \ge \varepsilon\}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\Delta^m -$ istatistiksel yakınsaklığın bir f modülüs fonksiyonuna göre $\Delta_\lambda^m -$istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiği görülebilir.

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olsun ve $f(x) = x$ alalım. Bu durum için aşağıdaki örneği verelim:

Örnek 3.5. $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olduğundan $\frac{\lambda_{n_j}}{n_j} < \frac{1}{j}$, $(j = 1, 2, 3, ...)$ olacak şekilde bir (n_j) alt dizisi bulunabilir. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini $k \in I_{n_j}$ için

$$\begin{cases} x-2, & 2 \le x \le 3 \\ -x+4, & 3 \le x \le 4 \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$k \notin I_{n_j}$ için

$$\begin{cases} x-5, & 5 \le x \le 6 \\ -x+7, & 6 \le x \le 7 \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan (X_k), (ΔX_k) ve genel olarak $(\Delta^m X_k)$ bulanık sayı dizilerinin $\alpha -$seviye kümeleri sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [2+\alpha, 4-\alpha], & k \in I_{n_j} \text{ ise} \\ [5+\alpha, 7-\alpha], & k \notin I_{n_j} \text{ ise} \end{cases}.$$

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [-2+2\alpha, -1-2\alpha], & k \in I_{n_j} \text{ ise} \\ [1+2\alpha, 5-2\alpha], & k \notin I_{n_j} \text{ ise} \end{cases}.$$

$$[\Delta^m X_k]^\alpha =$$

$$\begin{cases} [2^{m-2}(4\alpha-7), -2^{m-1}(1+2\alpha)] & k \in I_{n_j} \text{ ise} \\ [2^{m-1}(1+2\alpha), 2^{m-2}(7-4\alpha)] & k \notin I_{n_j} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (X_k) bulanık sayı dizisinin $\Delta^m -$istatistiksel yakınsak olduğu fakat $f(x) = x$ olmak üzere f modülüs fonksiyonuna göre $\Delta_\lambda^m -$istatistiksel yakınsak olmadığı görülür. Bu bir çelişki olduğundan $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ bulunur.

Teorem 3.6. f_1 ve f_2 herhangi iki modülüs fonksiyonu, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $\lambda=(\lambda_n)$ dizisi Tanım 3.1 deki gibi verilsin. Bu takdirde

$$S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)\cap S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)\subseteq S_F^\lambda(\Delta^m,f_1+f_2)$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $X=(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)\cap S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_1\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_2\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

sağlanır.

$$(f_1+f_2)\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]=f_1\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]+f_2\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :(f_1+f_2)\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|=0.$$

Buradan $(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_1+f_2)$ olup böylece

$$S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)\cap S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)\subseteq S_F^\lambda(\Delta^m,f_1+f_2)$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.7. f_1 ve f_2 her $u\in[0,\infty)$ için $f_1(u)\leq f_2(u)$ olacak şekilde herhangi iki modülüs fonksiyonu, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $\lambda=(\lambda_n)$ dizisi Tanım 3.1 deki gibi verilsin. Bu takdirde $S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)\subseteq S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)$ dir.

İspat. $(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_2\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı vardır. Herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_1\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|\leq\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_2\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_1\left[d(\Delta^m X_k,X_0)\right]\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

yazılabilir. Böylece $X=(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)$ olup $S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)\subseteq S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)$ elde edilir.

Teorem 3.8. f_1 ve f_2 herhangi iki modülüs fonksiyonu, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $\lambda=(\lambda_n)$ dizisi Tanım 3.1 deki gibi verilsin. Bu takdirde $S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)\subset S_F^\lambda(\Delta^m,f_2\circ f_1)$ dir.

İspat. $X_k\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_2)$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için f_2 sürekli olduğundan $f_2(\delta)=\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı mevcuttur. Diğer yandan $\delta>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :\ f_1\left[d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right]\geq\delta\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı vardır. Bu durumda $k\in I_n$ için

$$f_2\left(f_1\left[d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right]\right)\geq f_2(\delta)=\varepsilon,$$
$$(f_2\circ f_1)\left[d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right]\geq\varepsilon$$

yazılabilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n\ :(f_2\circ f_1)\left[d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right]\geq\delta\right\}\right|=0$$

olacağından $X=(X_k)\in S_F^\lambda(\Delta^m,f_2\circ f_1)$ elde edilir. Bu da $S_F^\lambda(\Delta^m,f_1)\subset S_F^\lambda(\Delta^m,f_2\circ f_1)$ olmasını gerektirir.

4. Kaynaklar

1. Altin, Y. (2009). Properties of some sets of sequences defined by a modulus function. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.,* **29(2),** 427-434.

2. Altin, Y., Et, M. (2005). Generalized dif-ference sequence spaces by a modulus functions in a locally convex spaces. *Soochow Journal of Mathematics.*, **31(2),** 233-243.

3. Altinok, H., Çolak, R., Et, M. (2009). $\lambda-$ difference sequence spaces of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, **160(21),** 3128-3139.

4. Altinok, H., Mursaleen, M. (2011). $\Delta-$ Statistical boundedness for sequences of fuzzy numbers. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **15(5),** 2081-2093.

5. Altinok, H., Çolak, R. Altin, Y. (2012). On the Class of $\lambda-$Statistically Convergent Difference Sequences of Fuzzy Numbers. *Soft Computing*, **16(6),** 1029-1034.

6. Aytar, S. (2004). Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers. *Inform. Sci.,* **165**, 129-138.

7. Cakan, U., Altin, Y. (2015). Some classes of statistically convergent sequences of fuzzy numbers generated by a modulus function. *Iranian Journal of Fuzzy Systems.* **12(3),** 47-55.

8. Çanak, İ. (2014). On the Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **26(6),** 2685-2688.

9. Çanak, İ. (2014). Tauberian theorems for Cesaro summability of sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **27(2),** 937-942.

10. Çanak, İ. (2014). Some conditions under which slow oscillation of a sequence of fuzzy numbers follows from Cesaro summability of its generator sequence, *Iranian J. Fuzzy Syst.*, **11(4),** 15-22.

11. Çanak, İ. (2014). Hölder summability method of fuzzy numbers and a Tauberian theorem, *Iranian J.* Fuzzy *Syst.*, **11(4),** 87-93.

12. Çanak, İ. (2016). On Tauberian theorems for Cesaro summability of sequences fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **30**, 2657-2661.

13. Connor, J. (1999). A topological and functional analytic approach to statistical convergence. *Analysis of divergence* (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 403-413.

14. Diamond, P., Kloeden, P. (1990). Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **35**, 241-249.

15. Et, M., Çolak, R. (1995). On some gene-ralized difference sequence spaces. *Soochow J. Math*. **21(4),** 377-386.

16. Et, M., Altinok, H., Çolak, R. (2006). On $\lambda-$ statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers. *Inform. Sci*., **176(15),** 2268-2278.

17. Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math*., 241-244.

18. Fridy, J.A. (1985). On statistical conver-gence. *Analysis*, **5**, 301-313.

19. Kawamura, H., Tani, A., Yamada, M., Tsunoda, K. (1990). Real time prediction of earthquake ground motions and structural responses by statistic and fuzzy logic. *First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis, Proceedings*, s. 534-538. *USA.*

20. Kızmaz, H. (1981). On certain sequence spaces. *Canadian Math. Bull*., **24**, 169-176.

21. Leindler, L. (1965). Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*., **16**, 375-387.

22. Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers. *BUSEFAL*, **28**, 28-37.

23. Mohiuddine, S. A. (2009). Stability of Jensen functional equation in intuitionistic fuzzy normed space. *Chaos, Solitons & Fractals*, **42(5),** 2989-2996.

24. Mursaleen, M. (2000). $\lambda-$statistical con-vergence. *Math. Slovaca*, 50(1):111-115.

25. Nakano, H. 1953. Concave modulars. *J. Math. Soc. Japan*, **5**, 29-49.

26. Nuray, F., Savaş, E. (1995). Statistical convergence of fuzzy numbers. *Math. Slovaca*, **45(3),** 269-273.

27. Önder, Z., Sezer, İ., Çanak, İ. (2015). A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers. *J. Intell. Fuzzy Syst*., **28**, 1403-1409.

28. Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, **30**, 139-150.

29. Sarma, B. (2007). On a class of sequences of fuzzy numbers defined by modulus function. *International Journal of Science & Technology*, **2(1),** 25-28.

30. Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, **66,** 361-375.

31. Talo, Ö., Başar, F. (2010). Certain spaces of sequences of fuzzy numbers defined by a modulus function. *Demonstratio Math*. **43(1),** 139-149.

32. Tripathy, B. C., Baruah, A. (2009). New type of difference sequence spaces of fuzzy real numbers. *Math. Modelling and Analysis*, **14(3)**, 391-397.

33. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inform and Control*, **8**, 338-353.