Araştırma Makalesi *BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 25(2), 650-660, (2023)*

DOI:10.25092/baunfbed. 1280244 *J. BAUN Inst. Sci. Technol., 25(2), 650-660, (2023)*

S_b – Metrik uzaylarda bazı sabit eğriler üzerine

Hülya AYTİMUR[1,*],

[1]*Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat. Fak. Mat. Böl., Çağış kampüsü, Balıkesir.*

Geliş Tarihi (Received Date): 11.04.2023
Kabul Tarihi (Accepted Date): 31.05.2023

Öz

Bu çalışmada, S_b- metrik uzaylarda sabit figür problemleri için yeni çözümlerden bahsedilecektir. Özellikle, Cassini Eğrisi ve Apollonius çemberi üzerinde durulacaktır. Bunun için ilk olarak Moradi tipinde C_{u_1,u_2}-S_b-daralma, Geraghty tipinde C_{u_1,u_2}-S_b-daralma, Skof tipinde C_{u_1,u_2}-S_b-daralma, Moradi tipinde A_{u_1,u_2}-S_b-daralma, Geraghty tipinde A_{u_1,u_2}-S_b-daralma ve Skof tipinde A_{u_1,u_2}-S_b-daralma kavramları verilecektir. Bu kavramlar yardımı ile S_b- metrik uzaylar üzerinde sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi teoremleri elde edilecektir.

Anahtar kelimeler: *S_b-metrik uzay, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi, sabit figür, daralma.*

On some fixed curves in S_b – Metric spaces

Abstract

In this paper, we mention new results to the fixed-figure problem on S_b- metric spaces. Especially, we emphasize Cassini curve and Appolonius circle. To do this, first of all we give the new notions of Moradi-type C_{u_1,u_2}-S_b-contraction, Geraghty-type C_{u_1,u_2}-S_b-contraction, Skof-type C_{u_1,u_2}-S_b-contraction, Moradi-type A_{u_1,u_2}-S_b-contraction, Geraghty-type A_{u_1,u_2}-S_b-contraction and Skof-type A_{u_1,u_2}-S_b-contraction. With the help of these notions, we obtain some fixed-Cassini curve and fixed-Apollonius circle theorems on S_b- metric spaces.

Keywords: *S_b-metric spaces, Cassini curve, Apollonius circle, fixed-figure, contraction.*

[*] Hülya AYTİMUR, hulya.aytimur@balikesir.edu.tr, http://orcid.org/0000-0003-4420-9861

1. Giriş

Klasik anlamda "Sabit Nokta Teorisi" ilk olarak "Banach Sabit Nokta Teoremi" ile ortaya çıkmıştır [1]. Bu teori topoloji, analiz, geometri, uygulamalı matematik, mühendislik gibi birçok alanda uygulaması olan matematiksel çalışmalardan biridir. Metrik sabit nokta teorisi çeşitli yaklaşımlar ile çalışılmıştır. Bu yaklaşımlardan önemli ve kullanışlı olanlarından birisi de daralma koşullarıdır.

Birçok araştırmacı farklı genelleştirilmiş metrik uzaylarda çeşitli sabit-nokta problemleri çalışmışlardır [2-6]. Son zamanlarda sabit nokta teorisinin genellemesi olarak sabit-çember problemleri ele alınmaya başlandı. Bu problem ilk olarak [7]'de başladı ve daha sonra farklı yaklaşımlar kullanılarak bu probleme farklı çözümler elde edildi [8-15]. Çember, elips, hiperbol, Cassini eğrisi ve Apollonius çemberi gibi uzaklık fonksiyonuna dayalı olarak yazılan geometrik şekiller verilen bir dönüşüm altında nokta-nokta sabit kalıyorsa, bu şekillere verilen dönüşümün sabit şekilleridir denir. Bir dönüşüm altında sabit kalan bu şekillerle ilgili literatürdeki [16,17-23] çalışmalar temel referanslardır.

Bu çalışmada S_b-metrik uzaylar üzerinde çeşitli daralma koşulları kullanılarak Cassini eğrisi ve Apollonius çemberini nokta-nokta sabit bırakan dönüşümler ile ilgili bazı sonuçlara yer verilecektir.

1.1. Tanım[24]
U boş olmayan bir küme, $b \geq 1$ herhangi bir reel sayı ve $d : U \to U$, $\forall u, v, w \in U$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

$(b1)$ $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v,$
$(b2)$ $d(u,v) = d(v,u),$
$(b3)$ $d(u,w) \leq b\left[d(u,v) + d(v,w)\right].$

Bu durumda d fonksiyonu U üzerinde bir b-metrik olarak adlandırılır. (U,d) çiftine ise b-metrik uzay denir.

1.2. Tanım[25]
U boş olmayan bir küme ve $S : U \times U \times U \to [0,\infty)$, $\forall u, v, w, a \in U$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

$(S1)$ $S(u,v,w) = 0 \Leftrightarrow u = v = w,$
$(S2)$ $S(u,v,w) \leq S(u,u,a) + S(v,v,a) + S(w,w,a).$

Bu durumda S, U üzerinde bir S-metrik olarak adlandılır ve (U,S) çiftine de S-metrik uzay denir.

1.3. Tanım[26]
U boş olmayan bir küme, $b \geq 1$ herhangi bir reel sayı olsun. Bir $S_b : U \times U \times U \to [0,\infty)$ fonksiyonunun S_b-metrik olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $\forall u,v,w,a \in U$ için aşağıdaki koşulları sağlamasıdır:

$(S1)$ $S_b(u,v,w)=0 \Leftrightarrow u=v=w,$
$(S2)$ $S_b(u,v,w) \leq b\left[S_b(u,u,a)+S_b(v,v,a)+S_b(w,w,a)\right].$

Bu durumda (U,S_b) çiftine de S_b-metrik uzay denir.

$b=1$ için her S_b-metrik bir S-metrik olduğundan S_b-metrik uzay S-metrik uzayın daha genel halidir. Fakat tersi doğru değildir:

1.4. Örnek[27]
$U=\mathbb{R}$ ve S_b fonksiyonu $\forall u,v,w \in U$ için

$$S_b(u,v,w)=S(u,v,w)^2=\frac{1}{16}\left(|u-v|+|v-w|+|u-w|\right)^2,$$

şeklinde olsun. S_b, $b=4$ için bir S_b-metrik olur. Fakat S-metrik değildir. Çünkü Tanım 1.3 deki (S2) şartı $b=4$ olması durumunda sağlanmaktadır. Tanım 1.2 de verilen şartlardan (S2) şartını S_b fonksiyonu sağlamamaktadır.

1.5. Tanım[21]
(U,S_b), $b \geq 1$ için bir S_b-metrik uzay, $u_1,u_2 \in U$, $\rho \in [0,\infty)$ olsun. Bu durumda

- Cassini eğrisi

$$C_\rho^{S_b}(u_1,u_2)=\{u \in U : S_b(u,u,u_1)S_b(u,u,u_2)=\rho\}$$

- Apollonius çemberi

$$A_\rho^{S_b}(u_1,u_2)=\left\{u \in U/\{u_2\} : \frac{S_b(u,u,u_1)}{S_b(u,u,u_2)}=\rho\right\}$$

olarak tanımlanır.

2. Sabit eğriler üzerinde bazı sonuçlar

Bu bölümde S_b-metrik uzaylar üzerinde Cassini eğrisi ile Apollonius çemberini sabit bırakan bazı sonuçlar verilecektir.

İlk olarak literatürde sabit nokta teoremi elde etmek için kullanılan ve Moradi tarafından tanıtılan eşitsizliği dikkate alalım [28]. Bu eşitsizliği modifiye ederek aşağıdaki tanımı verelim.

2.1. Tanım
(U,S_b) bir S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$\begin{aligned}&S_b(u,u,fu)>0\Rightarrow\\&\phi(S_b(u,u,fu))\le\alpha\big(\phi(S_b(u,u,u_1)S_b(u,u,u_2))\big)\end{aligned}\tag{1}$$

şartını sağlayan $\forall u\in U\setminus\{u_1,u_2\}$ için $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0)=0$ ve $0<\phi(t)<t\ \forall t$ olacak şekilde azalmayan bir ϕ fonksiyonu ve $\alpha:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $\alpha(0)=0,\ 0<\alpha(t)<t\quad\forall t>0$, şeklinde bir α fonksiyonu var ise f , Moradi tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.2. Teorem
(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Moradi tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olsun ve ρ yarıçapı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\rho=\inf\{S_b(u,u,fu):u\ne fu,u\in U\}.\tag{2}$$

Eğer $fu_1=u_1$ ve $fu_2=u_2$ ise f , $C_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

İspat
İlk olarak $\rho=0$ olsun. Bu durumda $u_1=u_2$ ve $C_\rho^{S_b}(u_1,u_2)=\{u_1\}=\{u_2\}$ olur. Hipotezden $fu_1=u_1$, $fu_2=u_2$ dir.
Şimdi $\rho>0$ ve $u\in C_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$, $u\ne fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi(S_b(u,u,fu))&\le\alpha\big(\phi(S_b(u,u,u_1)S_b(u,u,u_2))\big)=\alpha\phi(\rho)<\phi(\rho)\\&\le\phi(S_b(u,u,fu))\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da çelişkidir. Buradan f , $C_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Literatürde sabit nokta teoremi elde etmek için kullanılan ve Geraghty tarafından tanıtılan eşitsizliği dikkate alalım [29]. Bu eşitsizliği modifiye ederek aşağıdaki tanımı verelim.

2.3. Tanım
(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$S_b\left(u,u,fu\right)>0\Rightarrow$$
$$\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\le\beta\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right)\phi\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right) \tag{3}$$

şartını sağlayan $\forall u\in U\setminus\{u_1,u_2\}$ için $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ azalmayan bir ϕ fonksiyonu ve $\beta:(0,\infty)\to(0,1)$ şeklinde bir β fonksiyonu var ise f , Geraghty tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.4. Teorem

(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Geraghty tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olsun ve ρ, (2) ile tanımlansın. Eğer $fu_1=u_1$ ve $fu_2=u_2$ ise f, $C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

İspat

İlk olarak $\rho=0$ olsun. Bu durumda $u_1=u_2$ ve $C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)=\{u_1\}=\{u_2\}$ olur. Hipotezden $fu_1=u_1$, $fu_2=u_2$ dir.

Şimdi $\rho>0$ ve $u\in C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$, $u\ne fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)&\le\beta\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right)\phi\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right)\\&=\beta\left(\rho\right)\phi\left(\rho\right)\le\beta\left(\rho\right)\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir ki $\beta\in(0,1)$ olduğu için çelişkidir. Sonuç olarak f, $C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Literatürde sabit nokta teoremi elde etmek için kullanılan ve Skof tarafından tanıtılan eşitsizliği dikkate alalım [30]. Bu eşitsizliği modifiye ederek aşağıdaki tanımı verelim.

2.5. Tanım

(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$\begin{aligned}&S_b\left(u,u,fu\right)>0\Rightarrow\\&\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\le a\left(\phi\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right)\right)+b\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\\&\qquad+c\left(\phi\left(S_b\left(u_1,u_1,fu_1\right)S_b\left(u_2,u_2,fu_2\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

olacak şekilde $\forall u\in U\setminus\{u_1,u_2\}$ için $a,b,c\in[0,1)$ $0\le a+b+c<1$ ve $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $\phi(t)=0\Leftrightarrow t=0$ şeklinde azalmayan bir ϕ fonksiyonu var ise f , Skof tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.6. Teorem

(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Skof tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olsun ve ρ, (2) şeklinde tanımlansın. Eğer $fu_1=u_1$ ve $fu_2=u_2$ ise f, $C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

İspat

$\rho=0$ olma durumu açıktır.

Şimdi $\rho>0$ ve $u\in C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$, $u\neq fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (4) eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right) &\leq a\left(\phi\left(S_b\left(u,u,u_1\right)S_b\left(u,u,u_2\right)\right)\right)+b\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\\
&\quad+c\left(\phi\left(S_b\left(u_1,u_1,fu_1\right)S_b\left(u_2,u_2,fu_2\right)\right)\right)\\
&=a\phi\left(\rho\right)+b\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\\
&\leq a\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)+b\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\\
&=\left(a+b\right)\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $a+b<1$ olduğu için çelişki elde edilir. Buradan f, $C_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

2.7. Tanım

(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$
\begin{aligned}
&S_b\left(u,u,fu\right)>0\Rightarrow\\
&\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\leq\alpha\left(\phi\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

şartını sağlayan $\forall u\in U\setminus\{u_1,u_2\}$ için $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0)=0$ ve $0<\phi(t)<t$ $\forall t$ azalmayan bir ϕ fonksiyonu ve $\alpha:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\alpha(0)=0,\ 0<\alpha(t)<t,\ \forall t>0$ şeklinde bir α fonksiyonu var ise f , Moradi tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.8. Teorem

(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Moradi tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma ve ρ, (2) şeklinde olsun. Eğer $fu_1=u_1$ ve $fu_2=u_2$ ise f, $A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

İspat

$\rho=0$ durumu açıktır.

Şimdi $\rho>0$ ve $u\in A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$, $u\neq fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\leq\alpha\left(\phi\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right)\right)$$
$$=\alpha\phi\left(\rho\right)<\phi\left(\rho\right)$$
$$\leq\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)$$

elde edilir ki bu da çelişkidir. Buradan f, $A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

2.9. Tanım
(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$S_b\left(u,u,fu\right)>0\Rightarrow$$
$$\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\leq\beta\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right)\phi\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right) \tag{6}$$

şartını sağlayan $\forall u\in U\setminus\left\{u_1,u_2\right\}$ için $\phi:\left[0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right)$ azalmayan bir ϕ fonksiyonu ve $\beta:\left(0,\infty\right)\to\left(0,1\right)$ şeklinde bir β fonksiyonu var ise f , Geraghty tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.10. Teorem
(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Geraghty tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olsun ve ρ, (2) ile tanımlansın. Eğer $fu_1=u_1$ ve $fu_2=u_2$ ise f, $A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

İspat
İlk olarak $\rho=0$ olsun. Bu durumda $u_1=u_2$ ve $A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)=\left\{u_1\right\}=\left\{u_2\right\}$ olur. Hipotezden $fu_1=u_1$, $fu_2=u_2$ dir.
Şimdi $\rho>0$ ve $u\in A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$, $u\neq fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (6) eşitsizliği kullanılırsa

$$\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)\leq\beta\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right)\phi\left(\frac{S_b\left(u,u,u_1\right)}{S_b\left(u,u,u_2\right)}\right)$$
$$=\beta\left(\rho\right)\phi\left(\rho\right)\leq\beta\left(\rho\right)\phi\left(S_b\left(u,u,fu\right)\right)$$

elde edilir ki $\beta\in\left(0,1\right)$ olduğu için çelişkidir. Sonuç olarak f, $A_\rho^{S_b}\left(u_1,u_2\right)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

2.11. Tanım
(U,S_b), S_b-metrik uzay, $f:U\to U$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u_1,u_2\in U$ için

$$S_b(u,u,fu)>0 \Rightarrow$$
$$\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)\leq a\left(\phi\left(\frac{S_b(u,u,u_1)}{S_b(u,u,u_2)}\right)\right)+b\phi\left(S_b(u,u,fu)\right) \tag{7}$$
$$+c\left(\phi\left(\frac{S_b(u_1,u_1,fu_1)}{S_b(u_2,u_2,fu_2)}\right)\right)$$

olacak şekilde $\forall u\in U\setminus\{u_1,u_2\}$ $(u_2\neq fu_2)$ için $a,b,c\in[0,1)$ $0\leq a+b+c<1$ ve $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $\phi(t)=0\Leftrightarrow t=0$ şeklinde azalmayan bir ϕ fonksiyonu var ise f , Skof tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olarak adlandırılır.

2.12. Teorem

(U,S_b) , S_b -metrik uzay, $f:U\to U$ $u_1,u_2\in U$ Skof tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olsun ve ρ , (2) şeklinde tanımlansın. Eğer $fu_1=u_1$ ise ($u_2\neq fu_2$) f , $A_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

İspat

$\rho=0$ olma durumu açıktır.

Şimdi $\rho>0$ ve $u\in A_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$, $u\neq fu$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. (7) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)&\leq a\left(\phi\left(\frac{S_b(u,u,u_1)}{S_b(u,u,u_2)}\right)\right)+b\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)\\&\quad+c\left(\phi\left(\frac{S_b(u_1,u_1,fu_1)}{S_b(u_2,u_2,fu_2)}\right)\right)\\&=a\phi(\rho)+b\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)\\&\leq a\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)+b\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)\\&=(a+b)\phi\left(S_b(u,u,fu)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $a+b<1$ olduğu için çelişki elde edilir. Buradan f , $A_\rho^{S_b}(u_1,u_2)$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Uyarı: Teorem 2.12 ye göre Skof tipinde daralma koşulu uygulandığında Apollonius çemberinde merkez noktalardan biri olan u_2 noktası sabit kalmaz.

2.13. Örnek

$U=[-1,1]\cup\left\{-7,-\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{7}{3},7,8,21\right\}$ şeklinde tanımlanan bir küme ve $\forall u,v,w\in\mathbb{R}$ için S -metrik

$$S(u,v,w)=|u-w|+|u+w-2v|$$

şeklinde olsun [29]. Bu S-metrik $b=1$ için bir S_b-metriktir. Bir $f:U\to U$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın [19]:

$$fu=\begin{cases} u, & U\setminus\{8\} \\ 7, & u=8 \end{cases}.$$

$u_1=-1$ ve $u_2=1$ alındığında $\alpha(t)=\phi(t)=\begin{cases} 0, & t=0 \\ \frac{t}{2}, & t>0 \end{cases}$ olarak tanımlanan $\alpha(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonları için f fonksiyonu Moradi tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olur. Bu durumda f, $\rho=2$ ile $C_2^{S_b}(-1,1)=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

$u_1=-1$ ve $u_2=1$ alındığında $\beta(t)=\frac{1}{2}$ ve $\phi(t)=\frac{t}{14}$ fonksiyonları için f fonksiyonu Geraghty tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olur. Bu durumda f, $\rho=2$ ile $C_2^{S_b}(-1,1)=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

$u_1=-1$ ve $u_2=1$ alındığında $\phi(t)=\begin{cases} 0, & t=0 \\ \frac{t}{2}, & t>0 \end{cases}$ fonksiyonu için $a=\frac{1}{27}$, $b=c=\frac{1}{3}$ olarak alınırsa f fonksiyonu Skof tipinde $C_{u_1,u_2}-S_b$ -daralma olur. Bu durumda f, $\rho=2$ ile $C_2^{S_b}(-1,1)=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

$u_1=-7$ ve $u_2=7$ alındığında $\alpha(t)=\phi(t)=\begin{cases} 0, & t=0 \\ \frac{t}{2}, & t>0 \end{cases}$ olarak tanımlanan $\alpha(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonları için f fonksiyonu Moradi tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$-daralma olur. Bu durumda f, $\rho=2$ ile $A_2^{S_b}(-7,7)=\left\{\frac{7}{3},21\right\}$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

$u_1=-7$ ve $u_2=7$ alındığında $\beta(t)=\frac{1}{5}$ ve $\phi(t)=\frac{t}{3}$ fonksiyonları için f fonksiyonu Geraghty tipinde $A_{u_1,u_2}-S_b$-daralma olur. Bu durumda f, $\rho=2$ ile $A_2^{S_b}(-7,7)=\left\{\frac{7}{3},21\right\}$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

3. Sonuçlar ve tartışma

Bu çalışmada S_b metrik uzaylar üzerinde Cassini eğrisi, Apollonius çemberi gibi bazı sabit eğriler kavramından bahsedildi. Moradi tipi, Geraghty tipi ve Skof tipi daralma koşulları bu eğrilere uygulanarak bazı sabit figür teoremleri elde edildi. Gelecek çalışmalarda bu üç tipte elde edilen sonuçların yakınsama hızları ve birbirleri ile ilişkileri ele alınabilir. Bu açık problemler okuyucuya bırakılmıştır. Ayrıca burada şunu da belirtmek gerekir ki, bu şekilleri nokta-nokta sabit bırakmayan ancak şekli sabit bırakan dönüşümler ile ilgili literatürde bir çalışma incelediğimiz kadarıyla yapılmamıştır. Nokta-nokta olmadan geometrik şekli sabit bırakan dönüşümler var mıdır? Varsa hangi koşullarda şekil nokta-nokta olmadan sabit kalır? gibi problemler bu konudaki açık problemlerdir.

Kaynaklar

[1] Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals, **Fundamenta Mathematicae**, 2, 133-181, (1922).

[2] Babu A. S., Dosenovic T., Ali M. M., Radenovic A., Rao K. P. R. Some Presic type results in *b*-dislocated metric spaces, **Contructive Mathematical Analysis**, 2 ,1, 40-48, (2019).

[3] Karapınar E., A short survey on the recent fized point results on *b*-metric spaces, **Contructive Mathematical Analysis**, 1, 1, 15-44, (2018).

[4] Nazam M., Arshad M. Park C., Acar Ö., Yun S., Anastassiou G. A., On solution of a system of differntial equations via fixed point theorem, **Journal of Applied Analysis and Computation**, 27, 3, 417-426, (2019).

[5] Sedghi S., Gholidahneh A., Dosenovic T., Esfahani J., Radenovic S. Common fixed point of four maps in S_b-metric spaces, **Journal of Linear and Topological Algebra**, 5, 2, 93-104, (2016).

[6] Taş N., Özgür N. A new generalization of Rhoades' condition, **International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications**, 12, 2, 169-183, (2022).

[7] Özgür N. Y., Taş N. Some fixed-circle theorems on metric spaces, **Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society**, 42, 4, 1433-1449, (2019).

[8] Mlaiki N., Özgür N., Taş N. New-fixed circle results related to F_c-contractive and F_c-expanding mappings on metric spaces, arXiv:2101.10770.

[9] Özgür N. Y., Taş N., Some fixed circle theorems and discontinuity at fixed circle, AIP Conference Proceeding 1926, 020048, (2018).

[10] Özgür N. Y., Taş N. Generalizations of Metric Spaces: From the Fixed-Point Theory to the fixed-circle Theory, **Applications of Nonlinear Analysis Springer Optimization and Its Applications**, 134, Springer, Cham, 847-895, (2018).

[11] Özgür N. Y. Fixed-disc results via simulation functions, **Turkish Journal Mathematics,** 43, 6, 2794-2805, (2019).

[12] Pant R. P., Özgür N. Y., Taş N. Discontinuity at fixed points with applications, **Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society-Simon Stevin,** 26, 571-589, (2019).

[13] Pant R. P., Özgür N. Y., Taş N. On discontinuity problem at fixed point, **Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society,** 43, 499-517, (2020).
[14] Pant R. P., Özgür N. Y., Taş N., Pant A., Joshi M. C. New results on discontinuity at fixed point, **Journal of Fixed Point Theory Applications**, 22, 39, (2020).
[15] Taş N. Bilateral-type solutions to the fixed-circle problem with rectified linear units application, **Turkish Journal of Mathematics,** 44, 4, 133330-1344, (2020).
[16] Özgür N. Y., Taş N. Geometric properties of fixed points and simulation functions, arXiv:2102.05417.
[17] Erçınar G. Z., *Some Geometric properties of fixed-points*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2020).
[18] Joshi M., Tomar A., Padaliya S. K. Fixed point to fixed ellipse in metric spaces and discontinuous activation function, **Applied Mathematics E-Notes**, 21, 225-237, (2021).
[19] Taş N., *A contribution to the fixed-disc results on S-metric spaces,* 7th Ifs And Contemporary Mathematics Conference, May, 25-29, Turkey, 172-176, (2021).
[20] Özgür N. Y., Taş N. New fixed-figure results on metric spaces, **Fixed point theory and fractional calculus—recent advances and applications**, Forum Interdiscip. Math., *Springer, Singapore,* 33–62, (2022).
[21] Aytimur H., Taş N. A., geometric interpretation to fixed-point theory on S_b-metric spaces, **Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications**., 10, 2, 95–104, (2022).
[22] Aytimur H., Güvenç Ş., Taş N., New Fixed-Figure Results with the Notion of k-Ellipse, **Mathematica Moravica**, 27, 1, 37–52, (2023).
[23] Taş N., Ayoob I., Mlaiki N., Some common fixed-point and fixed-figure results with a function family on S_b-metric spaces, **AIMS Mathematics**, 8, 6, 13050-13065, (2023).
[24] Bakhtin I. A. The contraction mapping principle in quasimetric spaces, **Functional Analysis Uni-anowsk Gos. Ped. Institute**, 30, 26-37, (1989).
[25] Sedghi S., Shobe N., Aliouche A. A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces, **Matematicki Vesnik**, 64, 3, 258-266, (2012).
[26] Taş N., Özgür N. New generalized fixed point results on S_b-metric spaces, **Konuralp Journal of Mathematics**, 9, 1, 24-32, (2021).
[27] Moradi S. Fixed point of single-valued cyclic weak φ_F -contraction mappings, **Filomat,** 28, 1747-1752, (2014).
[28] Geraghty M. A. On contractive mappings, **Proceeding of the American Mathematical Society**, 40, 604-608, (1973).
[29] Skof F. Theoremi di punto fisso per applicazioni negli spazi metrici, **Atti Accademia Scienze Torino Classe Fisiche Matematiche Naturali**, 111, 323-329, (1977).
[30] Özgür N. Y., Taş N. Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25), **Mathematical Sciences**, 11, 1, 7-16, (2017).