Original Article

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi / Institute of Natural and Applied Science Journal

Cilt 16, Sayı 1, 24-29, 2023 / Volume 16 Issue, 1, 24-29, 2023

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Institute of Natural and Applied Science Journal

Dergi ana sayfası/ Journal home page: https://dergipark.org.tr/tr/pub/kujs

E-ISSN: 2587-2389

İntegrallenebilir Yörüngeleri ve Kontrol Kaynakları Kısıtlı olan Kontrol Sistemin Yörüngeler Kümesinin Özellikleri Üzerine

Anar HÜSEYİN[1*]

[1] Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Sivas, Türkiye

(İlk Gönderim / Received: 03. 02. 2023, Kabul / Accepted: 25. 06. 2023, Online Yayın / Published Online: 12. 10. 2023)

Anahtar Kelimeler:
Hausdorff uzaklığı,
integral kısıt,
kontrol sistem,
Urysohn integral denklemi,
yörüngeler kümesi.

Özet: Bu çalışmada, davranışı Urysohn tür integral denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları üzerinde integral kısıt olan kontrol sistem incelenmektedir. Mümkün kontrol fonksiyonlar $L_p(E;R^m)$ $(p>1)$ uzayının merkezi orijinde olan r yarıçaplı kapalı yuvarından seçilmektedir. Sistemin yörüngesi verilen denklemi hemen hemen her yerde sağlayan çok değişkenli integrallenebilir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Yörüngeler kümesinin çapı için bir üst sınır elde edilmiş, yörüngeler kümesinin r 'ye göre Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır.

On the Properties of the Set of Trajectories of the Control System with Integrable Trajectories and Limited Control Resources

Keywords:
Hausdorff distance,
integral constraint,
control system,
Urysohn integral equation,
set of trajectories.

Abstract: In this paper the control system given by Urysohn type integral equation with integral constraint on the control functions is studied. The admissible control functions are chosen from the closed ball of the space $L_p(E;R^m)$ $(p>1)$ centered at the origin with radius r. The trajectory of the system is defined as a multivariable integrable function which satisfies the system's equation almost everywhere. An upper evaluation for diameter of the set of trajectories is obtained and it is proved that the set of trajectories is Lipschitz continuous with respect to r.

**İlgiliyazar: ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr*
DOI: 10.58688/kujs.1289473

1. GİRİŞ

Kontrol sistemler fiziğin, mekaniğin, uzay navigasyonunun, ekonominin, sosyolojinin farklı alanlarında ortaya çıkmaktadır ve kontrol etkinin karakterine göre kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı kontrol sistemler, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı kontrol sistemler ve kontrol fonksiyonları karma kısıtlı kontrol sistemler olarak sınıflandırılmaktadırlar. Kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı kontrol sistemler, kontrol sistemler teorisinin geniş biçimde incelenmiş dallarından birdir (Deimling, 1992; Kalman, 1963; Krasovskii & Subbotin, 1988; Pontryagin ve ark., 1962). Kontrol fonksiyonları üzerinde integral kısıtlamalar, genelde kullanırken tükenen kontrol etkilerde, örneğin enerji, yakıt, finans gibi kontrol etkilerde ortaya çıkmaktadır (Conti, 1974; Guseinov & Nazlipinar, 2007; Gusev & Zykov, 2017; Ibragimov ve ark., 2021; Krasovskii, 1968; Kostousova, 2020; Subbotin & Ushakov, 1975; Subbotin & Subbotina, 1975; Ukhobotov & Izmestyev, 2018). Kontrol fonksiyonu integral kısıtlı iken, bu fonksiyon geometrik kısıtlı olmayabilir. Bu durumdan dolayı, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin araştırılması ek zorluklar çıkarmakta ve bu araştırmalarda spesifik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

İntegral denklemler, teori ve uygulamalarda karşılaşılan süreçlerin davranışlarının matematiksel modellerinin oluşturulmasında kullanılan uygun araçlardan biridir (Brauer, 1975; Krasnoselskii & Krein, 1955; Polyanin & Manzhirov, 1998; Urysohn, 1923). Verilen sürecin matematiksel modelinin integral denklem ile tasvir edilmesi, diferansiyel denklemlerle verilen modellere göre daha fazla avantaj sağlamaktadır. Örneğin, diferansiyel denklem ile verilen modellerde sistemin yörüngesinin diferansiyellenebilir fonksiyon olması gerekirken, integral denklemlerle verilen modellerde yörüngeler sadece sürekli veya integrallenebilir fonksiyonlar olabilir. Bu çalışmada davranışı Urysohn integral denklemi ile tasvir edilen kontrol sistem ele alınmıştır. Kontrol fonksiyonlar $L_p(E;R^m)$ $(p>1)$ uzayının merkezi orijinde r yarıçaplı kapalı yuvarından seçilmektedir. Mümkün kontrol fonksiyonun ürettiği yörünge, sistemin denklemini hemen hemen her yerde sağlayan çok değişkenli ve integrallenebilir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Davranışı farklı tür integral denklemlerle verilen ve kontrol fonksiyonları üzerinde integral kısıtlama olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin çeşitli topolojik özellikleri ve yaklaşık inşası N. Huseyin (2015), N. Huseyin ve ark. (2018), N. Huseyin ve ark. (2020), A. Huseyin (2022) çalışmalarında incelenmektedir.

Makalenin yapısı aşağıdaki biçimdedir: 2. Bölümde daha sonraki araştırmalarda kullanılacak olan temel koşullar ve önermeler verilmiştir. 3. Bölümde sistemin yörüngeler kümesinin çapı için bir üst sınır elde edilmiştir (Teorem 3.1). 4. Bölümde yörüngeler kümesinin r 'ye göre Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır (Teorem 4.1).

2. SİSTEMİN TASVİRİ

Davranışı

$$y(\omega)=g(\omega,y(\omega))+\int_E F(\omega,s,y(s),w(s))ds \qquad (1)$$

Urysohn tür integral denklem ile verilen kontrol sistem ele alınmaktadır. Burada $\omega\in E$, $y(\omega)\in R^n$ faz vektörü, $w(s)\in R^m$ kontrol vektörüdür, $E\subset R^k$ kompakt kümedir.

Verilen $p>1$ ve $r\geq 0$ için

$$W_{p,r}=\{w(\cdot)\in L_p(E;R^m): \|w(\cdot)\|_p\leq r\}$$

olarak tanımlı $W_{p,r}$ kümesine mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, her $w(\cdot)\in W_{p,r}$ fonksiyonuna ise mümkün kontrol fonksiyonu denir. Burada $L_p(E;R^m)$ Lebesgue ölçülebilir ve $\|w(\cdot)\|_p<\infty$ olacak biçimdeki $w(\cdot):E\to R^m$ fonksiyonlar uzayı, $\|w(\cdot)\|_p=\left(\int_E\|w(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|\cdot\|$ Euclid normu göstermektedir.

Açıktır ki, $W_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi $L_p(E;R^m)$ uzayının merkezi orijinde r yarıçaplı kapalı yuvarıdır.

(1) denkleminde verilen fonksiyonların aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılmaktadır:

2.A. Her sabitlenmiş $y\in R^n$ için $g(\cdot,y):E\to R^n$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir fonksiyon, $g(\cdot,0)\in L_p(E;R^n)$, her $y_1\in R^n$ ve $y_2\in R^n$ için ve hemen hemen (h.h.) her $\omega\in E$ için

$$\|g(\omega,y_1)-g(\omega,y_2)\|\leq k_0(\omega)\|y_1-y_2\|$$

olacak biçimde $k_0(\cdot)\in L_\infty(E;R^1)$ fonksiyonu vardır. Burada $L_\infty(E;R^1)$ Lebesgue ölçülebilir ve $\|w(\cdot)\|_\infty<+\infty$ olacak biçimdeki $w(\cdot):E\to R^1$ fonksiyonlar uzayı, $\|w(\cdot)\|_\infty=inf\{c>0: h.h.\ s\in E\ için\ \|w(s)\|\leq c\}$ olarak tanımlıdır;

2.B. Her $(y,w)\in R^n\times R^m$ için $F(\cdot,\cdot,y,w):E\times E\to R^n$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon, $F(\cdot,\cdot,0,0)\in L_p(E\times E;R^n)$,

$$\int_E\left(\int_E k_i(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}d\omega<+\infty\ ,\quad i=1,2$$

olmak üzere keyfi $(\omega,s,y_1,w_1)\in E\times E\times R^n\times R^m$, $(\omega,s,y_2,w_2)\in E\times E\times R^n\times R^m$ ve h.h. $(\omega,s)\in E\times E$ için

$$\|F(\omega,s,y_1,w_1)-F(\omega,s,y_2,w_2)\|$$
$$\leq k_1(\omega,s)\|y_1-y_2\|+k_2(\omega,s)\|w_1-w_2\|$$

olacak biçimde $k_i(\cdot,\cdot):E\times E\to[0,+\infty)$, $(i=1,2)$, fonksiyonları vardır. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

2.C.

$$\alpha_0=\|k_0\cdot)\|_\infty, \qquad (2)$$

$$\alpha_i=\left(\int_E\left(\int_E k_i(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}d\omega\right)^{\frac{1}{p}},\quad i=1,2 \qquad (3)$$

olmak üzere $5^{p-1}[\alpha_0^p+\alpha_1^p]<1$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Şimdi (1) sisteminin $w(\cdot)\in W_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini tanımlayalım.

H.h. her $\omega\in E$ için (1) denklemini sağlayan $y(\cdot)\in L_p(E;R^n)$ fonksiyonuna, (1) sisteminin $w(\cdot)\in W_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilmiş yörüngesi denir. (1) sisteminin tüm $w(\cdot)\in W_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümes $Y_{p,r}$ olarak gösterilir ve bu kümeye (1) sisteminin yörüngeler kümesi denir.

Aşağıdaki önermeler 2.A-2.C koşulları kullanılarak kanıtlanır ve bu önermelerin kanıtları A. Huseyin (2022) 'de bulunmaktadır.

Önerme 2.1. (A. Huseyin, 2022). Her $w(\cdot) \in W_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonu (1) sisteminin tek $y(\cdot) \in L_p(E; R^n)$ yörüngesini üretir.

$$c_1 = \|f(\cdot, 0)\|_p = \left(\int_E \|f(\omega, 0)\|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$c_2 = \|F(\cdot, \cdot, 0, 0)\|_p = \left(\int_E \int_E \|F(\omega, s, 0,0)\|^p ds\, d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere

$$\beta_* = \left(\frac{5^{p-1}\left[c_1^p + r^p\alpha_2^p + c_2^p\mu(E)^{p-1}\right]}{1 - 5^{p-1}\left[\alpha_0^p + \alpha_1^p\right]}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olsun. Burada $\mu(E)$ gösterimi E kümesinin Lebesgue ölçümünü ifade etmektedir. Bu durumda yörüngeler kümesinin sınırlılığını gösteren aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.2. (A. Huseyin, 2022). Her $y(\cdot) \in Y_{p,r}$ için

$$\| y(\cdot) \|_p \leq \beta_*$$

eşitsizliği doğrudur.

$\left(Z, d_Z(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ metrik uzay olsun. Bu durumda $Q \subset Z$ ve $P \subset Z$ kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı $h_Z(Q, P)$ olarak gösterilir ve

$$h_Z(Q, P) = \max\left\{sup_{x\in Q}\, d_Z(x, P)\,, sup_{y\in P}\, d_Z(y, Q)\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $d_Z(x, P) = \inf\{d_Z(x, y): y \in P\}$.

Ayrıca $Q \subset Z$ kümesinin çapı $diam(Q)$ olarak gösterilir ve

$$diam(Q) = sup\{d_Z(x, y): x \in Z,\ y \in Z\}$$

olarak tanımlanır.

$b(Z)$ ile $\left(Z, d_Z(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ metrik uzayının tüm boştan farklı sınırlı alt kümeleri ailesi gösterilmektedir. Bu durumda $\left(b(Z), h_Z(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ pseudometrik uzay olur. Burada $h_Z(\cdot\,,\,\cdot)$, $\left(Z, d_Z(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ metrik uzayının alt kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı göstermektedir (Hu & Papageorgiou, 1997; Kelly, 1975).

$\left(X, d_X(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ ve $\left(Z, d_Z(\cdot\,,\,\cdot)\right)$ metrik uzaylar, $\Phi(\cdot): X \to b(Z)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer keyfi $x_1 \in X$ ve $x_2 \in X$ için

$$h_Z\left(\Phi(x_1), \Phi(x_2)\right) \leq M_0 \cdot d_X(x_1\,, x_2)$$

olacak biçimde $M_0 > 0$ varsa, o halde $\Phi(\cdot)$ küme değerli dönüşümü M_0 sabiti ile Lipschitz süreklidir denir.

$G \subset L_p(E; R^n)$ ve $D \subset L_p(E; R^n)$ arasındaki Hausdorff uzaklığı ise $h_p(G, D)$ olarak gösterilir.

3. YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÇAPI

α_0, α_1 ve α_2 sırasıyla (2) ve (3) ile tanımlanmak üzere

$$\gamma_*(p, r) = \frac{2 \cdot 3^{\frac{p-1}{p}}\alpha_2 r}{\left[1 - 3^{p-1}\left(\alpha_0^p + \alpha_1^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \tag{4}$$

olsun.

Aşağıdaki teorem, (1) sisteminin $Y_{p,r}$ yörüngeler kümesinin çapı için bir üst değerlendirme vermektedir.

Teorem 3.1.

$$diam\left(Y_{p,r}\right) \leq \gamma_*(p, r)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\gamma_*(p, r)$ sayısı (4) eşitliği ile tanımlıdır.

Kanıt. $y_1(\cdot) \in Y_{p,r}$ ve $y_2(\cdot) \in Y_{p,r}$ (1) sisteminin uygun olarak $w_1(\cdot) \in W_{p,r}$ ve $w_2(\cdot) \in W_{p,r}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeleri olsun. O zaman 2.A, 2.B koşulları, $w_1(\cdot) \in W_{p,r}$, $w_2(\cdot) \in W_{p,r}$ içermeleri, Hölder eşitsizliği ve (2) gereği, h.h. $\omega \in E$ için

$$\|y_1(\omega) - y_2(\omega)\| \leq \|f(\omega, y_1(\omega)) - f(\omega, y_2(\omega))\|$$

$$+ \int_E \left\|F\left(\omega, s, y_1(s), w_1(s)\right) - F\left(\omega, s, y_2(s), w_2(s)\right)\right\| ds$$

$$\leq k_0(\omega)\|y_1(\omega) - y_2(\omega)\| + \int_E k_1(\omega, s)\|y_1(s) - y_2(s)\| ds$$

$$+ \int_E k_2(\omega, s)\|w_1(s) - w_2(s)\| ds$$

$$\leq \alpha_0\|y_1(\omega)-y_2(\omega)\| + \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_E \|y_1(s)-y_2(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_E \|w_1(s)-w_2(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \alpha_0\|y_1(\omega)-y_2(\omega)\| + \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\cdot \|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p + 2r\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu elde edilir. Son eşitsizlikten h.h. $\omega \in E$ için

$$\|y_1(\omega)-y_2(\omega)\|^p$$

$$\leq 3^{p-1}\left\{\alpha_0^p\|y_1(\omega)-y_2(\omega)\|^p + \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}\right.$$

$$\left.\cdot \|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p + 2^p r^p \cdot \left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}\right\}$$

olur. Son eşitsizliğin E kümesi üzerinde integralini alırsak, (3) gereği

$$\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p \leq 3^{p-1}\left\{\alpha_0^p \cdot \|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p\right.$$

$$+\int_E \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} d\omega \cdot \|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p$$

$$\left.+2^p r^p \cdot \int_E \left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} d\omega\right\}$$

$$= 3^{p-1}\left\{\alpha_0^p\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p + \alpha_1^p\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p^p + 2^p r^p \alpha_2^p\right\}$$

olarak bulunur. Buradan, 2.C koşulundan ve (4) ‘ten ise

$$\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p \leq \frac{2\cdot 3^{\frac{p-1}{p}}\alpha_2 r}{\left[1-3^{p-1}\left(\alpha_0^p+\alpha_1^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}} = \gamma_*(p,r)$$

olduğu bulunur. $y_1(\cdot) \in Y_{p,r}$ ve $y_2(\cdot) \in Y_{p,r}$ (1) sisteminin keyfi seçilmiş yörüngeleri olduğundan, teoremin kanıtı son eşitsizlikten elde edilir.

4. YÖRÜNGELER KÜMESİNİN r ‘YE GÖRE LIPSCHITZ SÜREKLİLİĞİ

$$B_p(1) = \{y(\cdot) \in L_p(E;R^n) : \| y(\cdot) \|_p \leq 1\}, \quad (5)$$

$$L_* = \frac{3^{\frac{p-1}{p}}\alpha_2}{\left[1-3^{p-1}\left(\alpha_0^p+\alpha_1^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \quad (6)$$

olsun. Bu bölümde sabitlenmiş $p > 1$ için $r \to Y_{p,r}$, $r \in [0,+\infty)$, küme değerli dönüşümünün L_* sabiti ile Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanacaktır.

Teorem 4.1. Sabitlenmiş $p > 1$ için $r \to Y_{p,r}$, $r \in [0,+\infty)$, küme değerli dönüşümü L_* sabiti ile Lipschitz süreklidir, yani keyfi $r_1 \in [0,+\infty)$, $r_2 \in [0,+\infty)$ için

$$h_p(Y_{p,r_1}, Y_{p,r_2}) \leq L_*|r_1-r_2|$$

eşitsizliği doğrudur. Burada L_* sayısı (6) ile tanımlıdır.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın $r_1 < r_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$Y_{p,r_1} \subset Y_{p,r_2} \quad (7)$$

olur. Şimdi keyfi $y_*(\cdot) \in Y_{p,r_2}$ yörüngesi alalım ve bu yörüngenin $w_*(\cdot) \in W_{p,r_2}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretildiğini varsayalım.

$$\tilde{w}(s) = \frac{r_1}{r_2}w_*(s), \qquad s \in E, \quad (8)$$

olmak üzere yeni $\tilde{w}(\cdot): E \to R^m$ kontrol fonksiyonu tanımlayalım. $w_*(\cdot) \in W_{p,r_2}$ olduğundan, (8) eşitliğinden $\tilde{w}(\cdot) \in W_{p,r_1}$ olduğu bulunur. (1) sisteminin $\tilde{y}(\cdot): E \to R^n$ yörüngesinin, $\tilde{w}(\cdot) \in W_{p,r_1}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörünge olduğunu varsayalım. O halde $\tilde{y}(\cdot) \in Y_{p,r_1}$ olur. 2.A, 2.B koşullarından, $w_*(\cdot) \in W_{p,r_2}$ içermesinden, Hölder eşitsizliğinden, (1), (2) ve (8) ‘den h.h. $\omega \in E$ için

$$\| \tilde{y}(\omega) - y_*(\omega) \| \leq k_0(\omega) \| \tilde{y}(\omega) - y_*(\omega) \|$$

$$\leq \int_E k_1(\omega,s)\|\tilde{y}(s)-y_*(s)\|ds$$

$$+\int_E k_2(\omega,s)\|\tilde{w}(s)-w_*(s)\|ds$$

$$\leq \alpha_0 \| \tilde{y}(\omega) - y_*(\omega) \| + \int_E k_1(\omega,s)\|\tilde{y}(s)-y_*(s)\|ds$$

$$+\int_E k_2(\omega,s)\left\|\frac{r_1}{r_2}w_*(s)-w_*(s)\right\|ds$$

$$= \alpha_0 \| \tilde{y}(\omega) - y_*(\omega) \| + \int_E k_1(\omega,s)\|\tilde{y}(s)-y_*(s)\|ds$$

$$+\frac{|r_1-r_2|}{r_2}\int_E k_2(\omega,s)\|w_*(s)\|ds$$

$$\leq \alpha_0 \| \tilde{y}(\omega) - y_*(\omega) \| + \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\cdot\left(\int_E \|\tilde{y}(s)-y_*(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{|r_1-r_2|}{r_2}\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_E \|w_*(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \alpha_0 \parallel \tilde{y}(\omega)-y_*(\omega) \parallel$$

$$+\left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot \|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p$$

$$+\frac{|r_1-r_2|}{r_2}\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot r_2$$

$$= \alpha_0 \parallel \tilde{y}(\omega)-y_*(\omega) \parallel$$

$$+\left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot \|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p$$

$$+|r_1-r_2|\cdot\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu elde edilir. Buradan, h.h. $\omega \in E$ için

$$\parallel \tilde{y}(\omega)-y_*(\omega) \parallel^p$$

$$\leq 3^{p-1}\cdot\left\{\alpha_0^p \parallel \tilde{y}(\omega)-y_*(\omega) \parallel^p + \left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}\right.$$

$$\left.\cdot \|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p + |r_1-r_2|^p\cdot\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}}\right\}$$

olur. Son eşitsizliğin E kümesi üzerinde integralini alırsak, (2) ve (3) ‘ten

$$\|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p \leq 3^{p-1}\cdot\left\{\alpha_0^p\|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p\right.$$

$$+\|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p\cdot\int_E\left(\int_E k_1(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} d\omega$$

$$\left.+|r_1-r_2|^p\cdot\int_E\left(\int_E k_2(\omega,s)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} d\omega\right\}$$

$$= 3^{p-1}\cdot\left\{\alpha_0^p\|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p + \alpha_1^p\|\tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot)\|_p^p + \alpha_2^p|r_1-r_2|^p\right\}$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz son eşitsizlik, 2.C koşulu ve (6) ‘dan

$$\parallel \tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot) \parallel_p \leq \frac{3^{\frac{p-1}{p}}\alpha_2}{\left[1-3^{p-1}\left(\alpha_0^p+\alpha_1^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\cdot|r_1-r_2|$$

$$= L_*\cdot|r_1-r_2| \qquad (9)$$

olur.

Böylece, (9) gereği, her $y_*(\cdot) \in Y_{p,r_2}$ için

$$\parallel \tilde{y}(\cdot)-y_*(\cdot) \parallel_p \leq L_*\cdot|r_1-r_2|$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde $\tilde{y}(\cdot) \in Y_{p,r_1}$ vardır. Bu ise

$$Y_{p,r_2} \subset Y_{p,r_1} + L_*|r_1-r_2|\cdot B_p(1) \qquad (10)$$

olması demektir. Burada $B_p(1)$ kümesi (5) ile tanımlıdır. Son olarak, teoremin kanıtı (7) ve (10) kapsamalarından elde edilir.

5. SONUÇ

Yörüngeler kümesinin kontrol kaynağın sınırını belirleyen r parametresine Lipschitz sürekli bağımlılığı, kontrol sürecin matematiksel modelinin oluşumunda r parametresinin bulunmasında oluşabilecek küçük hataların, kontrol sistemin yörüngeler kümesini az etkileyeceğini göstermektedir. Yörüngeler kümesinin çapı için elde edilmiş üst değerlendirme, yörüngelerin sıfır kontrol kaynak kullanarak elde edilmiş yörüngeden maksimal kaymayı öngörmeyi sağlar.

5. KAYNAKLAR

Brauer, F. (1975). On a nonlinear integral equation for population growth problems. SIAM J. Math. Anal., 6(2), 312-317.

Conti, R. (1974). Problemi di controllo e di controllo ottimale. UTET, Torino.

Deimling, K. (1992). Multivalued differential equations. Walter de Gruyter, Berlin.

Guseinov, K. G., & Nazlipinar, A. S. (2007). On the continuity property of L_p balls and an application. J. Math. Anal. Appl., 335(2), 1347-1359.

Gusev, M. I., & Zykov, I. V. (2017). On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints. Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN, 23(1), 103-115.

Hu, S., & Papageorgiou, N. S. (1997). Handbook of multivlued analysis. Vol. I: Theory. Kluwer, Dordrecht.

Huseyin, N., Guseinov, K. G., & Ushakov, V. N. (2015). Approximate construction of the set of trajectories of the control system described by a Volterra integral equation. Math. Nachr., 288(16), 1891-1899.

Huseyin, N., Huseyin, A., & Guseinov, K. G. (2018). Approxmation of the set of trajectories of the nonlinear control system with limited control resources. Math. Model. Anal., 23(1), 152-166.

Huseyin, N. (2020). On the properties of the set of p-integrable trajectories of the control system with limited control resources. Internat. J. Control, 93(8), 1810-1816.

Huseyin, A. (2022). On the p-integrable trajectories of the nonlinear control system described by the Urysohn-type integral equation. Open Math., 20(1), 1101-1111.

Ibragimov, G., Ferrara, M., Ruziboev, M., & Pansera, B. A. (2021). Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. Int. J. Game Theory, 50, 729–750.

Kalman, R. E. (1963). Mathematical description of linear dynamical systems. J. SIAM Control, Ser. A, 1, 152-192.

Kelley, J. L. (1975). General topology. Springer, New York.

Krasovskii, N. N. (1968). Theory of control of motion: Linear systems. Nauka, Moscow.

Krasovskii, N. N., & Subbotin, A. I. (1988). Game-theoretical control problems. Springer, New York.

Krasnoselskii, M. A., & Krein, S. G. (1955). On the principle of averaging in nonlinear mechanics. Uspekhi Mat. Nauk. 10(3), 147-153.

Kostousova, E. K. (2020). On the polyhedral estimation of reachable sets in the "extended" space for multistage systems with uncertain matrices and integral constraints. Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, 26(1), 141-155.

Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. (1998). Handbook of integral equations. CRC Press, Boca Raton.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mishchenko, E. F. (1962). The mathematical theory of optimal processes. John Wiley & Sons, New York.

Subbotin, A. I, & Ushakov, V. N. (1975). Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players' controls. J. Appl. Math. Mech., 39(3), 367-375.

Subbotina, N. N., & Subbotin, A. I. (1975). Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls. J. Appl. Math. Mech., 39(3), 376-385.

Ukhobotov, V. I., & Izmest'ev, I. V. (2018). Impulse differential game with a mixed constraint on the choice of the control of the first player. Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN, 24(1), 209-222.

Urysohn, P. S. (1923). On a type of nonlinear integral equation. Mat. Sb., 31(2), 236-255.