

ARAŞTIRMA MAKALESİ

Keyfi Kesitli Çok Sayıda Dielektrik Silindirden Elektromanyetik Dalga Saçılımı için Sınır ve Sıfır Alan İntegral Denklemlerinin Sayısal Olarak Kararlı Çözüm Algoritmaları ve Karşılaştırmaları

Numerically Stable Algorithms and Their Comparisons of Boundary and Null-Field Integral Equations for Electromagnetic Wave Scattering from Multiple Dielectric Cylinders with Arbitrary Cross-Section

Murat Enes Hatipoğlu^{1*} Fatih Dikmen¹

¹Gebze Teknik Üniversitesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, Türkiye.

Geliş / Received: 29.04.2023

Kabul / Accepted: 18.05.2023

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author) Murat Enes Hatipoğlu hatipoglume@gtu.edu.tr

ÖZ: Günümüzde birçok mühendislik disiplinde, özellikle fotonik kristal yapılardan ve çoklu meta malzeme parçacıklarından saçılma problemlerinde, silindirik yapılardan dalgaların saçılması problemi büyük önem taşımaktadır. Zaman-harmonik silindirik elektromanyetik dalgaların sağladığı homojen Helmholtz denklemi ile ilgili olarak, keyfi kesitli çoklu kayıplı silindirik saçıcıların analizinde kullanılan sınır ve bölgesel integral denklem yöntemleri ve kararlı sayısal çözümleri tekrar ele alınmaktadır. Bunların verimli çalışmasına yol açan uygulama ve düzenleme stratejileri özetlenmiştir. Ele alınan saçılma problemi için fiziksel olarak ilgili titiz bir matematiksel model oluşturma süreci, elde edilen faydaları ifade etmek için sayısal sonuçlarla örneklendirilmiştir. Elde edilen avantajlar, özellikle fiziksel olarak karmaşık fenomenin artan karmaşıklığına sahip senaryolarla simülasyonları sırasında, gerekli sayıda doğru haneli temsilden yoksun olan sonlu doğruluklu hesaplama ortamında temel bir yardım aracı teşkil eder.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, iyi koşullu modeller, sıfır alan yaklaşımı, T matris yöntemi, silindirik saçıcılardan saçılma.

ABSTRACT: In many engineering disciplines nowadays, especially in scattering problems from photonic crystal structures and multiple metamaterial particles, the problem of scattering waves from cylindrical structures is of great importance. Regarding the homogenous Helmholtz equation standing for the time-harmonic cylindrical electromagnetic waves, the boundary and regional integral equation methods used in the analysis of the arbitrary cross section multiple lossy cylindrical scatterers and their stable numerical treatment is revisited. The implementation and regularization strategies leading to its efficient operation are outlined. The process of building a physically relevant rigorous mathematical model for the considered scattering problem is exemplified with numerical results to express the gained benefits. The obtained advantages provide a basic assist in a finite precision calculation environment which lacks the representation of the necessary number of significant digits, especially during simulations with scenarios of increasing complexity of the physically intricate phenomenon.

Keywords: Integral equations, well-conditioned models, null field approach, T matrix method, scattering by cylindrical scatterers.

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, silindirik nesnelere zaman-harmonik elektromanyetik dalga saçılmasının modellenmesinde kilit rol oynar. Bu modeller

sayısal elektronikteki temel kapıların milimetre dalgası veya optik frekanslarda gerçekleşmesini mümkün kılan fotonik kristal yapılarının analizleri için büyük öneme sahiptir [1]. Kayıplı dielektrikler

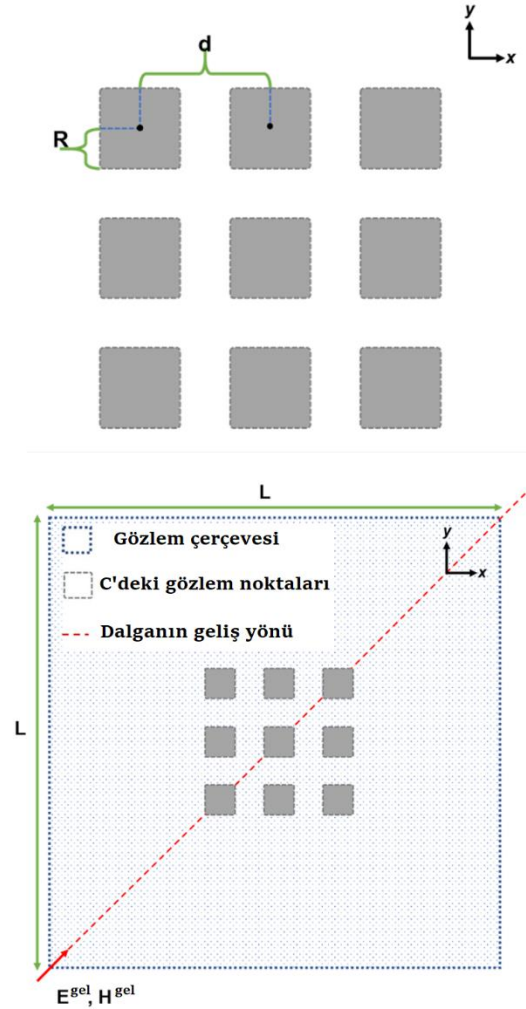
gibi geçirgen cisimler söz konusu olduğunda, saçılmış alanın integral gösterilimi, Helmholtz denklemi için serbest uzay Green fonksiyonundan yararlanır ve saçılan alanın sıfırdan farklı ve sıfır olduğu bölgelerde yazılmasına bağlı olarak farklı formülasyonlara yol açacaktır: İlki, sınır integral denklemlerine yol açarken, ikincisi, bölgesel integral denklemlere veya sıfır alan integral denklemlerine yol açar [2].

Kayıplı dielektrikleri içinde bulunduğu ortamdan ayıran sınırdaki eşdeğer yüzey akım yoğunlukları aranırken ilkinde çözümler için Galerkin tipi ağırlıklı rezidüel yöntemler, ikincisi için öz fonksiyon açılımları kullanılır [3]. Her ikisi de bizi genel olarak kötü koşullanmış doğrusal bir cebirsel denklem sistemine götürür. Bu, aranan bilgisayardaki kesilmiş çözümlerin, denklemin kaynağındaki yani sağ yanındaki küçük değişikliklere duyarlı olduğu anlamına gelir. Bu, söz konusu lineer cebirsel denklemlerin kesme sayılarını artırmak sonucunda sayısal bir çöküşe yol açar [4].

Bu sistemlerin sayısal kararlılığını sağlamak için, onları iyi koşullandırmaya yönelik bir regüleleştirme prosedürü kritik öneme sahiptir. Örneğin, Analitik Regüleleştirme Yöntemi, bu integral denklemlere dair, sonlu bir sayıda kesilmeleri yalnızca sistem boyutu arttıkça karşılık gelen çözümün doğruluğunu artıran doğrusal bir cebirsel sistemine ulaşmayı sağlayan bir yaklaşımdır [5]-[7]. İyi koşullandırmanın bahsedilen durumu, saçılmayı keyfi kesitli kayıplı dielektrik silindirler dizisi gibi tek değil, çok sayıda nesne için analiz ettiğimizde daha da önem kazanır. Çünkü sayısal gerçekleştirmelerle uğraşan iteratif çözümler, lineer cebirsel sistemin iyi koşullanmasına güçlü biçimde bağlıdır [8].

İlgilenilen sınır integral denklemleri, cebirsel-üstü yakınsak bir algoritma [3],[5],[6] tarafından ayrıklaştırılacakken, sıfır alan yöntemi, bilinmeyenlerin hızlı artan ve azalan faktörlerini ortadan kaldıran uygun ölçeklendirme yoluyla regüleleştirilecektir [7]. Fotonik kristaller, metalzemeler, dizi sensörler, ızgara yapılar gibi birçok pratik uygulamada ortaya çıkan söz konusu problem türü için yukarıda bahsedilen her iki integral denklem türünün sayısal uygulama

esasları, burada ele alınan konulara yönelik temel problemlerdir [9].



Şekil 1: $\theta_{\text{geliş}}=\pi/2$, $\varphi_{\text{geliş}}=\pi/4$ parametrelili bir düzlemsel dalganın aydınlattığı 3x3 dörtgen Zirkonyum Oksit çubukları.

Tablo 1: Şekil 1'deki problem için değerler

Geometrik parametreler	mm: milimetre	λ_0 : boş uzay dalga boyu
R	0.35	0.0899
d	2.50	0.6421
L	20.0	5.1368
Elektriksel parametreler	mm: milimetre	arkaplan ortamı
ϵ_r	23.52 - j0.2285	1
μ_r	$1 + \chi$; $\chi = -0.0000138$	1
f	77GHz	

2. KEYFİ KESİTLİ KAYIPLI DİELEKTRİK SİLİNDİR DİZİLERİNDEN SAÇILMA

Sonraki bölümde Şekil 1 ve Tablo 1 ile verilen örnek üzerinde bu bölümde verilen modelin özelliklerini vurgulamak için sayısal sonuçlar verilecektir. Aşağıda konu edilen teknikler, ilki için Γ ile verilen saçıcı sınırındaki Fourier spektrumu ve ikincisi için sıfır alan bölgesi boyunca silindirik harmonik tayfi ile elde edilen iyi koşullu doğrusal cebirsel denklem sistemlerine yol açar.

Sınır İntegral Denklemleri

$(H, E)_z^{gelen}$ genlikli bir (TE, TM) kutuplu düzlem dalganın keyfi kesitli bir dielektrik silindiri uyardığını düşünelim. Sınır integral denklemi, yani ele aldığımız (manyetik, elektrik) alan integral denklemi – (M,E)AİD, $K_{m(z,l),(l,z)}$ aranan enine elektrik ve boyuna manyetik eşdeğer doğrusal akım yoğunlukları, ω açılal frekans ve $\chi_{\pm} = (\epsilon_{\pm}, \mu_{\pm})$ ilgili bölgenin sırasıyla manyetik ve dielektrik geçirgenliği olmak üzere bu durumda aşağıdaki görünüme sahiptir [3].

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I-R^+ & j\omega\chi_+S^+ \\ -\frac{1}{2}I-R^- & j\omega\chi_-S^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{m(z,l)} \\ K_{(l,z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H, E)_z^{gelen} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$\zeta, K_{m(z,l),(l,z)}$ 'den birini temsil etmek üzere, (1)'de tek ve çift tabaka potansiyelleri Γ sınırının her iki tarafındaki (\pm) bünye parametreleriyle yazılan aşağıdaki operatörler aracılığıyla tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix} (\zeta(q)) = \int_{\Gamma} \zeta(p) \begin{bmatrix} 1 \\ \partial_{n'} \end{bmatrix} \mathcal{G}_2(q, p) dl'. \quad (2)$$

Burada gözlem/kaynak noktaları sırasıyla q/p , ve $\partial_{n'}$ bunlardan ikincisine göre normal yöndeki türev iken, $\mathcal{G}_2(q, p) = -jH_0^{(2)}(k|q-p|)/4$, yani kayıplı bölgelerin benzetimi sırasında karmaşık değerli dalga sayısı k olan $e^{j\omega t}$ zaman uyumundaki 2 boyuttaki alanlar için homojen Helmholtz denkleminin boş uzaydaki Green fonksiyonudur.

Γ burada sonsuz düzgün bir eğri ile parametrize edilmiştir [9] ve bu sayede sadece tek değil birçok cisimden oluşan saçıcı sistemi söz konusu olduğunda ortaya çıkan genelleştirilmiş sınır halinde de çözüm nerdeyse cebrik-üstü yakınsayan vasıfta başarılabilir [3].

Sıfır Alan (T-Matrisi) Yöntemi

Öte yandan, bölgesel integral denklem, kötü koşulluluğunun [7]'deki gibi çözümlenmesiyle birlikte, [8]'deki tanımlarla aynı probleme yönelik çok sayıda dielektrik nesnenin saçılması için sıfır alan integral denklemine konu olduğunda, aşağıdaki gibi regülerleştirilmiş bir görünümde olur:

$$\left[\bar{I} - \tilde{\tilde{T}} \cdot \tilde{\tilde{S}}_N \right] \cdot f = \tilde{\tilde{T}} \cdot \bar{\mathcal{L}}_T \cdot a \quad (3)$$

Saçıcı kesiti bir daire olduğunda ve [10] ile parametreleştirilmiş sınırlar, uzama ve/veya girintilenmeye maruz olmadığında [7], bu denklem mükemmel bir şekilde ikinci türden bir lineer cebirsel sistem gibi davranır. Bu denklemin regülerleştirilmiş versiyonunda, $\tilde{\tilde{T}}$ tek tek her saçıcının kendi verisini karşılarken, $\tilde{\tilde{S}}_N$ çoklu saçılma etkileşimlerini tümleyen terimdir. $\bar{\mathcal{L}}_T \cdot a$ ise gelen alanca sınırlarda denklemleri süren terimdir.

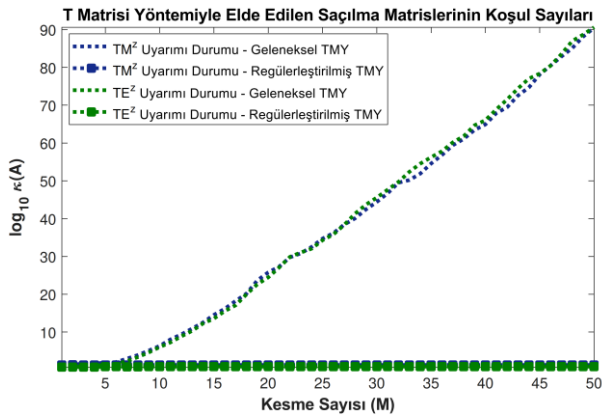
3. SAYISAL SONUÇLAR

Şekil 1'de verilen 3x3 dörtgen Zirkonyum-Oksit çubuk yapısından saçılma problemi Tablo 1'de verilen geometrik ve elektriksel parametrelerle ele alınmaktadır. Bu çubuk yapısı kutupsal ve yönsel geliş açısı sırasıyla $\theta_{geliş}=\pi/2$, $\varphi_{geliş}=\pi/4$ olan TM ve TE düzlem dalgalarla aydınlatılmaktadır. Dalganın ilerleme vektörünün z eksenine yaptığı açı olan kutupsal açı $\theta_{geliş}=\pi/2$ olduğundan, bir başka deyişle dik geliş durumu incelendiğinden TM ve TE uyarımları dekopple olurlar. Bu durum TM ve TE uyarımı durumlarının ayrı ayrı analizini mümkün kılar.

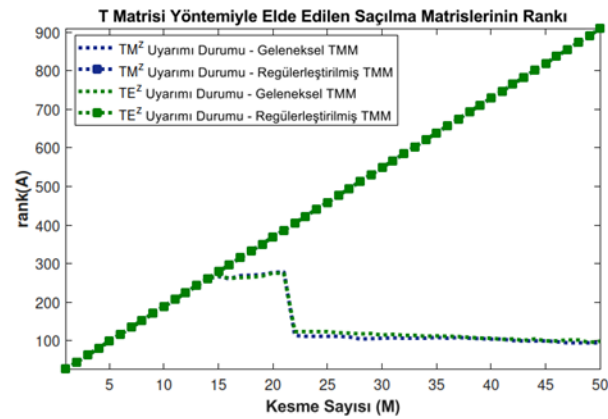
(3) denklemleri verilen Regülerleştirilmiş T Matrisi Yöntemi (RTMY) bu saçılma problemine uygulandığında ortaya çıkan denklem sisteminin geleneksel yöntemin aksine sayısal olarak kararlı olması beklenir. Bu sayısal kararlılığın göstergesi, saçılan alanların bilinmeyen katsayılarını içeren f vektörüyle soldan çarpılan saçılma matrisinin artan kesme sayısına göre sınırlı bir koşul sayısına sahip olması ve böylece iyi koşullu bir doğa göstermesidir. Şekil 2'de geleneksel T matrisi yöntemiyle elde edilen saçılma matrisinin TM ve TE uyarım durumları için koşul sayısı logaritmik olarak artarken, bu yöntemin regülerleştirilmiş halinin ikinci türden bir lineer cebirsel denklem

sistemine, iyi koşullu ve artan kesme sayısına göre koşul sayısı sınırlı kalan bir saçılma matrisine yol açtığı gözlemlenmektedir.

Aynı bulgulara Şekil 3'te verilen saçılma matrislerinin rankları üzerinden de varmak mümkündür. Her iki uyarım durumunda da geleneksel T matrisi yöntemiyle elde edilen saçılma matrislerinin belirli bir kesme sayısından sonra artan kesme sayısı ile ranklarının düştüğü görülmektedirken, RTMY için saçılma matrislerinin rankı sayısal olarak kararlı bir sisteme işaret etmektedir.



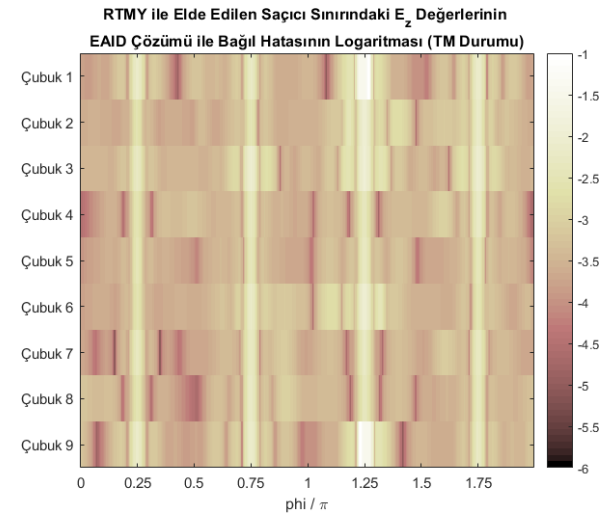
Şekil 2: TM ve TE kutuplu düzlem dalga uyarımları için T Matrisi Yöntemiyle (TMY) elde edilen saçılma matrislerinin kesme sayısına göre koşul sayıları grafiği.



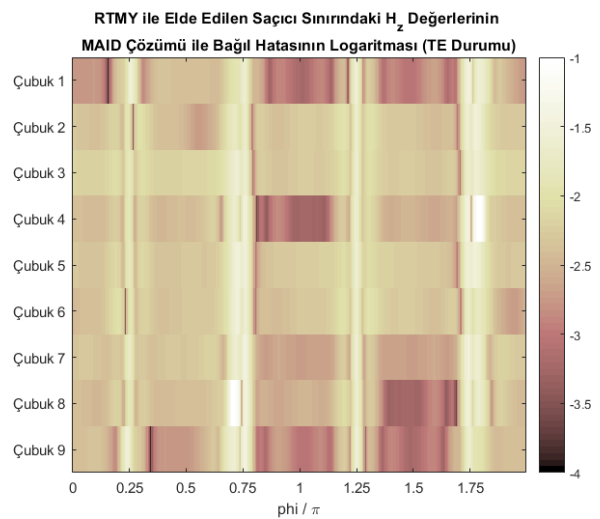
Şekil 3: TM ve TE kutuplu düzlem dalga uyarımları için T Matrisi Yöntemiyle (TMY) elde edilen saçılma matrislerinin ranklarının kesme sayısına göre grafiği.

Şekil 4 ve 5'te sırasıyla TM ve TE düzlem dalgalar için RTMY ile elde edilen, her bir saçıcının sınırında indüklenen akım yoğunluklarının E/M-AİD

çözümleriyle bağlı hatası logaritmik ölçekte yer almaktadır. T Matrisi yönteminde alanların silindirik harmonikler cinsinden ifade edilmesi dairesel sınırlarda doğru çözümler sunar, ancak keyfi kesitler için sınırda çözümün doğruluğu, saçıcının dairesel kesitten ne kadar saptığıyla ilişkilidir. Bu makaleye konu olan kare kesitli saçıcılar gibi çok uzun yahut derin oluklar içermeyen kesite sahip saçıcılar için T Matrisi yöntemi regülerleştirilse dahi Şekil 4 ve Şekil 5'te görülen hata mertebeleriyle çözümler sunmaktadır.

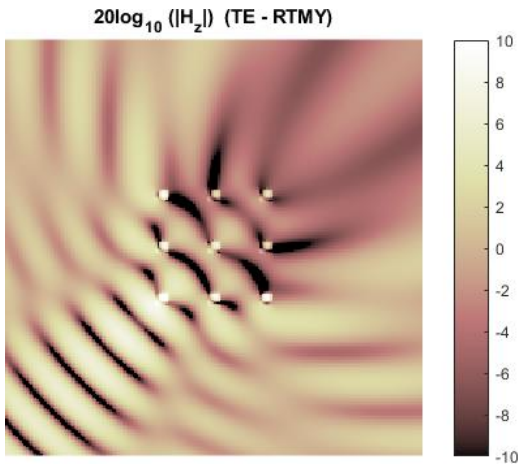


Şekil 4: TM durumunda RTMY ile elde edilen saçıcıların sınırındaki manyetik akım yoğunluğunun teğetsel bileşeninin (elektrik alanın z bileşeninin) EAİD çözümüyle bağlı hatasının log10 değerleri.

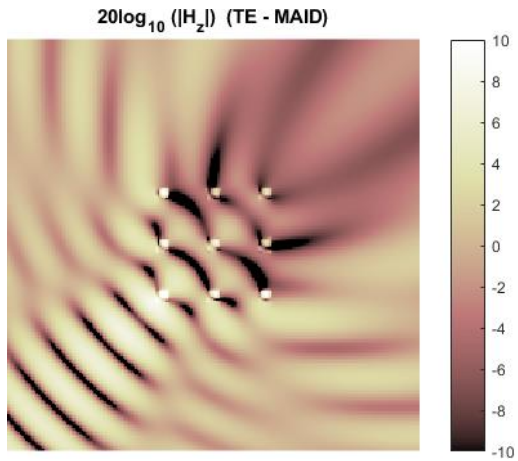


Şekil 5: TE durumunda RTMY ile elde edilen saçıcıların sınırındaki elektrik akım yoğunluğunun teğetsel bileşeninin (manyetik alanın z bileşeninin) MAİD çözümüyle bağlı hatasının log10 değerleri.

Ancak bu hatalara rağmen RTMY, Şekil 6'daki gibi saçıcı konfigürasyonu çevreleyen bir çerçeve üzerinde yakın alanlar söz konusu olduğunda Şekil 7'de verilen yakın alan MAİD çözümüyle tutarlı sonuçlar vermektedir. Buna ek olarak RTMY ile elde edilen çözümler nümerik olarak kararlı olup matris denklem sisteminin kesme sayısına duyarlı değildir. Bu çözümlerdeki hatalar Şekil 8'de görüldüğü gibi saçıcıların sınırında azami değer alır.



Şekil 6: Şekil 1'deki LxL'lik gözlem çerçevesinde TE durumunda RTMY ile elde edilen manyetik alan şiddeti H_z 'nin dB/m cinsinden değerleri.

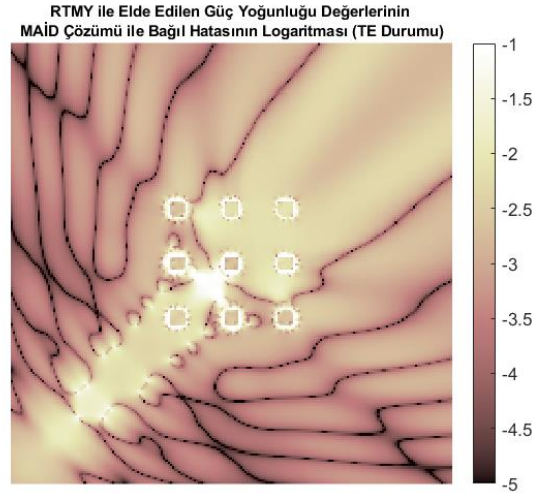


Şekil 7: Şekil 1'deki LxL'lik gözlem çerçevesinde TE durumunda MAID ile elde edilen manyetik alan şiddeti H_z 'nin dB/m cinsinden değerleri.

Şekil 4,5 ve 8'de verilen, RTMY ile hesaplanan niceliklerin (alan yahut güç yoğunluğu) E/MAİD ile elde edilenlerle bağıl hatasının logaritması LBH olmak üzere,

$$LBH = \log_{10} \left(\left| \frac{X^{RTMY} - X^{ID}}{X^{ID}} \right| \right) \quad (4)$$

ile verilir. Burada X^{RTMY} Regülerleştirilmiş T Matrisi yöntemiyle elde edilen niceliği, X^{ID} ise elektrik veya manyetik alan integral denklem çözümüyle elde edilen niceliği ifade eder.



Şekil 8: Şekil 1'deki LxL'lik gözlem çerçevesinde TE durumunda Regülerleştirilmiş T Matrisi Yöntemiyle elde edilen güç yoğunluğunun MAİD çözümüyle bağıl hatasının log10 değerleri.

4. SONUÇ

Bu çalışmada bahsedilen regülerleştirilmiş T-matris Yöntemi ve sınır integral denklem yöntemi birbirini doğrulamakta ve makalenin konusu olan saçılma problemi için doğru ve sayısal olarak kararlı bir çözüm üretmektedir. Bu yöntemler, farklı disiplinlerde ortaya çıkan iki boyutlu az kayıplı parçacık dizilerinden saçılma problemlerinde özellikle yararlıdır. Sonuçlar incelendiğinde, manyetik alan integral denklemi kullanılarak elde edilen çözüm daha güvenilir görünse de regülerleştirilmiş T matris yöntemi, periyodik saçıcılar dışında geniş bir alanda saçılan alan ve güç değerlerinin hesaplanmasında da hızlı ve pratiktir ve iyi koşullandırıldığı için geleneksel T matrisi yöntemi yerine sayısal olarak kararlı çözümler elde edebilmek için tercih edilebilir. Her iki yöntem de sayısal olarak kararlı ve doğru sonuçlar verdiği için, bu yöntemlerden herhangi biri saçılma ve böyle bir saçılma probleminin toplam alanı ve gücü hakkında bilgi verir.

Yazar Katkısı: Fatih Dikmen'in danışmanlığıyla temellendirilen ve detaylandırılan çalışma, Murat

Enes Hatipoğlu'nun problem kurulumu ve sayısal benzetimi ile şekillendirilmiş ve bulguların tartışmalarıyla tamamlanmıştır.

Çıkar Çatışması: Bu çalışmanın yazarları olarak, herhangi bir kurum/kuruluş ya da kişi ile çıkar çatışması bulunmadığını onaylarız.

5. KAYNAKLAR

- [1] M.A. Butt, S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, "Recent advances in photonic crystal optical devices: A review," *Optics & Laser Tech.*, vol. 142, 107265, Oct. 2021.
- [2] W.C. Chew, "Waves and Fields in Inhomogenous Media," Wiley - IEEE Press, 1999.
- [3] E. Sever, F. Dikmen, and Y. A. Tuchkin, "Superalgebraically Converging Galerkin Method for Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders," *Radio Sci.*, vol. 52, no. 10, pp. 1282–1292, Sep. 2017.
- [4] A. Ye. Poyedinchuk, Y. A. Tuchkin, and V. P. Shestopalov, "New numerical-analytical methods in diffraction theory," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 32, no. 9, pp. 1029–1046, Nov. 2000.
- [5] E. Sever, Y. A. Tuchkin, and F. Dikmen, "On a superalgebraically converging, numerically stable solving strategy for electromagnetic scattering by impedance cylinders," *Journal of Compt. Elec.*, vol. 17, no. 1, pp. 427-435, Oct. 2017.
- [6] F. Dikmen, E. Sever, S. Vatansever, and Y. A. Tuchkin, "Well-conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders," *Radio Sci.*, vol. 50, no. 2, pp. 99-110, Jan. 2015.
- [7] M. E. Hatipoğlu, F. Dikmen, "On Regularization of the T Matrix Method for Cylindrical Objects with Arbitrary Cross Section," in *Bremen Zoom Workshop on Light Scat.*, 2021.
- [8] M. E. Hatipoğlu, F. Dikmen, E. Sever and Y. A. Tuchkin, "FMM Accelaration of 2D Well-Conditioned T-Matrix Method for Multiple Scatterers," in *ACES*, 2021, pp. 1-4.
- [9] M. E. Hatipoğlu, E. Sever, F. Dikmen, Ö. Eriş and Ö. Ergül, "Well-Conditioned 2D Models of Rod Arrays for Accelerating 3D Simulations of Photonic Crystals and Plasmonic Structures," in *ACES*, 2021, pp. 1-3.
- [10] S. Güler et al., "Modified superformula contours optimized via genetic algorithms for fastly converging 2D solutions of EFIE," in *IEEE APSURSI*, 2016, pp. 1333-1334.
- [11] M. S. Hilario et al., "W-Band Complex Permittivity Measurements at High Temperature Using Free-Space Methods," *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Tech.*, vol. 9, no. 6, pp. 1011-1019, June 2019.
- [12] E. Sever, Y. A. Tuchkin, and F. Dikmen, "Correction to: On a superalgebraically converging, numerically stable solving strategy for electromagnetic scattering by impedance cylinders," *Journal of Compt. Elec.*, vol. 21, no. 2, pp. 550, Jan. 2022.