ISSN: 2146-8168 Sayı: **7**, Yıl: **2013**, Sayfa: **67-79** **http://bilader.gop.edu.tr**

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi

Dergiye Geliş Tarihi: 04.07.2013
Yayına Kabul Tarihi: 21.09.2013
Baş Editör: Naim Çağman
Danışman Editör: Nevin Gürbüz

Robertson-Walker Uzay-zaman Modellerinde Lightlike Hiperyüzeylerin Simetri Koşulları

Süleyman CENGİZ (suleymancengiz@karatekin.edu.tr)

Çankırı Karatekin Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 18100 Çankırı

Özet – Robertson-Walker uzay zamanında lightlike hiperyüzeyler konusu ele alınıp yerel simetri ve Ricci simetri eğrilik koşulları incelendi.

Anahtar Kelimeler – *Robertson-Walker uzay zamanı,lightlike hiperyüzeyler, simetri koşulları, Riemann eğriliği, Ricci eğriliği*

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 7 (2013) 67-79

Symmetry Conditions of Lightlike Hypersurfaces in Robertson-Walker Spacetimes

Abstract – Symmetry type curvature and Ricci curvature conditions of lightlike hypersurfaces in Robertson-Walker spacetimes are investigated.

Keywords – *Robertson-Walker spacetime, lightlike hypersurfaces, symmetry conditions, Riemann curvatue, Ricci curvature*

Received: 04.07.2013 *Accepted*: 21.09.2013

1. Genel Tanımlar ve Teoremler

$\overline{M}, \bar{g}$ yarı-Riemann uzayında g simetrik tensör alanı dejenere olan bir hiperyüzey (M, g) olsun. Yani, M hiperyüzeyinde öyle bir $\xi \neq 0$ vektör alanı vardır ki her $X \in \Gamma(TM)$ için $g(\xi, X) = 0$ şartını sağlar.

$$RadTM = \{\xi \in TM : g(\xi, X) = 0, \forall X \in TM\}$$

ile tanımlı altuzaya TM tanjant uzayının radikali ya da null uzayı adı verilir. Tanjant uzayının

$$TM = RadTM \perp S(TM)$$

ayrışımında S(TM) vektör demetine M hiperyüzeyinin bir ekran dağılımı denir. Lightlike hiperyüzeylerde tanjant ve normal uzayları ayrık olmadığından bu hiperyüzeylere özel olarak, ortonormal bazlar yerine quasi-ortonormal bazlar tanımlanmıştır.

Teorem 1.1 [2] $(M, g, S(TM))$, yarı-Riemann manifoldu (M, g) de bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinde rankı 1 olan tek bir tr(TM) vektör demeti vardır öyle ki $U \subset M$ koordinat komşuluğunda $TM^{\perp}$ nin sıfırdan farklı herhangi bir ξ vektör alanı için U da tr(TM) demetinin

$$\bar{g}(N, \xi) = 1, \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, W) = 0, \forall X \in \Gamma(S(TM)|_U) \quad (1)$$

eşitliklerini sağlayan tek bir N vektör alanı bulunur.

Burada tr(TM) bir lightlike vektör demetidir ve $tr(TM) \cap TM = \{0\}$ dır. Böylece aşağıdaki ayrışım yazılabilir:

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp \big(RadTM \oplus tr(TM)\big) = TM \oplus tr(TM) \quad (2)$$

tr(TM) demetine M hiperyüzeyinin S(TM) ekran dağılımına göre lightlike transversal vektör demeti denir.

Yarı-Riemann manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de, bir $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyin Gauss-Weingarten formülleri her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N,$$
$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N$$

olur. Burada ∇ koneksiyonu M hiperyüzeyinde torsiyonsuz ve indirgenmiş lineer bir koneksiyondur. $h(X, Y) = B(X, Y)N$ simetrik bilineer formuna M hiperyüzeyinin ikinci temel formu ve A_N lineer operatörüne M hiperyüzeyinin şekil operatörü adı verilir. B formuna M hiperyüzeyinin yerel ikinci temel formu adı verilir. M uzayında ∇ metrik koneksiyon olduğundan

$$B(X, \xi) = 0, \forall X \in \Gamma(TM) \quad (3)$$

elde edilir. M hiperyüzeyindeki ∇ koneksiyonu metrik koneksiyon olmayıp her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\bar{g}(N, Z) + B(X, Z)\bar{g}(N, Y)$$

eşitliğini sağlar.

Tanjant uzayının ayrışımında $\Gamma(S(TM))$ üzerine $\Gamma(TM)$ uzayının izdüşüm morfizmi P olsun. S(TM) ekran dağılımı için yerel Gauss-Weingarten denklemleri her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki şekilde verilir:

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X, PY)\xi,$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - \tau(X)\xi.$$

Burada $h^*(X, PY) = C(X, PY)\xi$ bilineer formuna ekran dağılımının ikinci temel formu ve A_ξ^* lineer operatörüne de ekran dağılımının şekil operatörü denir. Her iki ikinci temel form, şekil operatörleri ile aşağıdaki denklemlerle ilişkilendirilir:

$$B(X, Y) = g\left(A_\xi^* X, Y\right), \bar{g}\left(A_\xi^* X, N\right) = 0,$$
$$C(X, PY) = g(A_N X, PY), \bar{g}(A_N Y, N) = 0.$$

Ekran dağılımı üzerindeki ∇^* koneksiyonu metrik koneksiyondur. A_ξ^* şekil operatörü, S(TM)-değerli ve self-adjoint olup lightlike hiperyüzey için

$$A_\xi^* \xi = 0 \tag{4}$$

eşitliğini sağlar. Böylece

$$\bar{\nabla}_\xi \xi = \nabla_\xi \xi = -\tau(\xi)\xi \tag{5}$$

eşitliği bulunur [2].

M lightlike hiperyüzeyinin h(X,Y) ikinci temel formunun ve $A_N X$ şekil operatörünün kovaryant türevleri her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki formüllerle verilebilir:

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^t h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$
$$\nabla_X (A_N Y) = (\nabla_X A_N) Y + A_N (\nabla_X Y).$$

B formunun kovaryant türevi

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = X(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \tag{6}$$

dir.

$(M, g, S(TM))$, yarı-Riemann manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de bir lightlike hiperyüzey olsun. M lightlike hiperyüzeyi ve $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörleri sırasıyla R ve $\bar{R}$ olmak üzere her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Gauss eğrilik denklemi

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + A_{h(X,Z)} Y - A_{h(Y,Z)} X + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \tag{7}$$

ile verilir. Esas uzay, c sabit eğrilikli bir yarı-Riemann uzay formu olduğunda ise Gauss denklemi

$$R(X, Y)Z = c\{\bar{g}(Y, Z)X - \bar{g}(X, Z)Y\} - A_{h(X,Z)} Y + A_{h(Y,Z)} X$$

ve Codazzi denklemi

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$

olur.

$(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann uzayının Ricci tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{Ric}(X,Y) = trace\{Z \rightarrow \bar{R}(X,Z)Y\}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin indirgenmiş $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a g(R(X,E_a)Y,E_a) + \bar{g}(R(X,\xi)Y,N)$$

ile verilir. Burada $\varepsilon_a = g(E_a, E_a)$ dir ve $\{\xi; E_a\}$, $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi üzerinde indirgenmiş bir quasi-ortonormal çatı olup $Rad(TM) = span\{\xi\}$ ve $S(TM) = span\{E_a\}$ tanımlıdır. Genel olarak Ricci tensörü simetrik değildir. Bu yüzden $R^{(0,2)}$ tensörü simetrik olduğunda indirgenmiş Ricci tensörü olarak adlandırılacak ve Ric ile gösterilecektir.

Tanım 1.2 $(M, g, S(TM))$, yarı-Riemann manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de bir lightlike hiperyüzey olsun. M hiperyüzeyinin her U koordinat komşuluğunda bir ρ diferensiyellenebilir fonksiyonu bulunmak üzere

$$B(X,Y) = \rho g(X,Y), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM|_U)$$

eşitliği sağlanıyorsa M hiperyüzeyine total umbiliktir denir.

Eşdeğer olarak M hiperyüzeyinin total umbilik olması için gerek ve yeter şart

$$A_\xi^*(PX) = \rho PX, \qquad \forall X \in \Gamma(TM|_U)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. $\rho = 0$ olması durumunda ise M total geodeziktir denir.

Bir Riemann manifoldunun yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart $\nabla R = 0$ eşitliğini sağlamasıdır. Aynı tanım ve teorem yarı-Riemann uzaylar ve altmanifoldları için de geçerlidir [5]. Bir yerel simetrik yarı-Riemann manifoldunda lightlike hiperyüzeylerin yerel simetrileri için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 1.3 [3] $\bar{\mathrm{M}}$ bir yerel simetrik yarı-Riemann manifoldu ve $A_N\xi$ bir null vektör alanı olmayacak şekilde $\bar{\mathrm{M}}$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi M olsun. Bu durumda M lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.

Bir açık aralık $I \subset R$ ve irtibatlı 3-boyutlu sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu F olmak üzere $I \times F$ çarpım manifoldunu düşünelim. π ve σ, sırasıyla I ve F üzerine izdüşüm dönüşümleri olsun. I üzerindeki standart d/dt vektör alanının $I \times F$ manifoldundaki lifti ∂_t timelike birim vektör alanı ve

$$F(t) = t \times F = \{(t,p) : p \in F\}$$

olmak üzere $\partial_t \perp F(t)$ olsun. Böylelikle her $F(t)$ uzayı bir Riemann uzayı olur. Her $t \in I$ için $f(t) > 0$ fonksiyonu alınır ve X,Y vektörleri $F(t)$ uzayına teğet olmak üzere

$$\bar{g}(X,Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + f^2(t) g(d\sigma(X), d\sigma(Y))$$

tanımlanırsa, $(I \times F, \bar{g})$ manifoldu I tabanlı, (F, g) fiberli bir katlı çarpım manifoldu olur. Şimdi bu gösterimler yardımıyla Robertson-Walker uzay-zamanı şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.4 İrtibatlı n-boyutlu $k = -1{,}0$ veya 1 sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu F ve $I \subset R_1^1$ açık aralığında tanımlı diferensiyellenebilir pozitif bir fonksiyon f olmak üzere,

$$M_1^{n+1}(k, f) = \left(I \times_f F, \bar{g}\right), \bar{g} = -dt^2 + f^2(t) g_k$$

katlı çarpım manifolduna bir Robertson-Walker uzay-zamanı adı verilir [6].

Burada F uzayı için standart seçimler sırasıyla -1,0,1 sabit eğrilikleri için $H^{\mathrm{n}}, R^{\mathrm{n}}, S^{\mathrm{n}}$ uzay formlarıdır. F ve I uzaylarındaki tanjant vektör alanlarının yatay ve düşey liftleri sırasıyla L(F) ve L(I) ile gösterilir. ∂_t timelike birim vektör alanının gelecek yönlü seçilmesiyle $M_1^{n+1}(k, f)$ manifoldu zaman yönlendirilmiş olur. Her $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$X = \hat{X} - \bar{g}(X, \partial_t)\partial_t, \hat{X} \in L(F) \tag{9}$$

ayrışımı yazılabilir. $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanında koneksiyon ve Riemann eğrilik tensörü ile ilgili aşağıdaki yardımcı teoremler biliniyor [1],[4]:

Yardımcı Teorem 1.5 $M_1^{n+1}(k, f)$ manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun. Her $X, Y \in L(F)$ için

1. $\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0,$
2. $\bar{\nabla}_{\partial_t}X = \bar{\nabla}_X\partial_t = (\frac{f'}{f})X,$
3. $\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \partial_t) = -\bar{g}(X, Y)(\frac{f'}{f}),$
4. F uzayının Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere, $\nabla_X Y$ vektör alanının düşey lifti $\bar{\nabla}_X Y$ dir.

Yardımcı Teorem 1.6 $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, her $X, Y, Z \in L(F)$ için

1. $\bar{R}(\partial_t, X)\partial_t = (\frac{f''}{f})X,$
2. $\bar{R}(X, \partial_t)Y = -\bar{g}(X, Y)\left(\frac{f''}{f}\right)\partial_t,$
3. $\bar{R}(X, Y)\partial_t = 0,$
4. $\bar{R}(X, Y)Z = \frac{(f')^2 + k}{f^2}(\bar{g}(Y, Z)X - \bar{g}(X, Z)Y)$

olur.

$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının Riemann eğrilik tensörünü bulmak için yukarıdaki yardımcı teoremin son eşitliğinden faydalanabiliriz. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (9) ayrışımı ve eğrilik tensörünün doğrusallığı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \frac{(f')^2 + k}{f^2}(\bar{g}(Y, Z)X - \bar{g}(X, Z)Y) + \frac{ff'' - (f')^2 - k}{f^2}(\bar{g}(X, \partial_t)\bar{g}(Z, \partial_t)Y \\ &\quad -\bar{g}(Y, \partial_t)\bar{g}(Z, \partial_t)X + \left(\bar{g}(Y, \partial_t)\bar{g}(X, Z) - \bar{g}(X, \partial_t)\bar{g}(Y, Z)\right)\partial_t) \end{aligned} \tag{10}$$

bulunur.

Not 1.7 [1] Eğer f katlı çarpım fonksiyonu $(ff'' - (f')^2 - k) = 0$ denklemini sağlarsa $(((f')^2 + k)/f^2)' = 0$ eşitliğini de sağlayacağı açıktır. Dolayısıyla (10) eşitliğinden, $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olduğu görülür. $(ff'' - (f')^2 - k) = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünden şu sonuçlar elde edilir:

- $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının Riemann eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart $f(t) = at + b, (k = -a^2)$ olmasıdır.
- $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının $c^2>0$ sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart $f(t) = ae^{ct} + be^{-ct}, (k = 4c^2ab)$ olmasıdır.
- $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının $-c^2 < 0$ sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart $f(t) = asin(ct) + bcos(ct), (k = -c^2(a^2 + b^2))$ olmasıdır.

2. Robertson-Walker Uzay-zamanında Lightlike Hiperyüzeyler ve Simetri Özellikleri

Bir $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann uzay-zamanının bir alt uzayı V ve Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olsun. Eğer her $X, Y, Z \in V$ için $\bar{R}(X, Y)Z \in V$ oluyorsa, V alt uzayına $\bar{R}$ ye göre eğrilik-invaryant'tır denir. Burada özel olarak $V = TM$ alınırsa, M uzay-zamanı eğrilik-invaryant'tır denir. Benzer şekilde bir lightlike hiperyüzey $(L, g, S(TL))$ için şu önerme verilebilir:

Önerme 2.1 [4] Bir $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S(TL))$ olsun. O halde

1. L lightlike hiperyüzeyinin eğrilik-invaryant olması için gerek ve yeter şart $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olmasıdır.
2. Eğer S(TL) ekran dağılımı eğrilik-invaryant ise $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanı düz-dür.
3. Eğer Rad(TL) null dağılımı eğrilik-invaryant ise $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir.
4. Eğer tr(TL) null transversal dağılımı eğrilik-invaryant ve $rank(S(TL)) > 1$ ise ya $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanı düz ya da S(TL) ekran dağılımı L(F) fiber uzaylarına teğettir.

$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olması durumunda Teorem 1.3 ten, $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, L lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır. Uzay-zamanın sabit eğrilikli olmaması durumu ise aşağıda incelenecektir. ∂_t timelike vektör alanının, bir L lightlike hiperyüzeyine göre durumunu belirleyen aşağıdaki yardımcı teoremi biliyoruz:

Yardımcı Teorem 2.2 [4] Bir $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S(TL))$ olsun. O halde ∂_t vektör alanının (2) ayrışımına göre transversal izdüşümü ∂_t^{tr} olmak üzere

1. ∂_t vektör alanı L ye teğet olamaz, yani $\partial_t^{tr} \neq 0$
2. ∂_t vektör alanı L ye dik olamaz.
3. $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanındaki bir sıfırdan farklı null U vektör alanı için $\bar{g}(U,\partial_t) \neq 0$ dır.

Görüldüğü üzere ∂_t vektör alanı L lightlike hiperyüzeyinin RadTL radikal uzayına veya tr(TL) transversal vektör demetine ait olamaz. Ancak ∂_t vektör alanı S(TL) ekran dağılımına ait veya dik olabilir.

Önerme 2.3 Sabit eğrilikli olmayan bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ ve $rank(S(TM)) > 1$ olsun. Aşağıdaki (i)~(iii) koşullarından birinin sağlandığını varsayalım:

1. η paraleldir, yani her $X,Y \in \Gamma(TL)$ için $\eta(Y) = g(Y,N)$ olmak üzere $\nabla_X \eta(Y) = 0$,
2. Ekran ikinci temel formu h^* paraleldir,
3. Her $X,Y \in \Gamma(TL)$ ve $N \in \Gamma(tr(TL))$ için $(\nabla_X A)_N Y = (\nabla_Y A)_N X$ dir.

Bu durumda S(TL) ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğettir [4].

Teorem 2.4 Sabit eğrilikli olmayan bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olsun. S(TL) ekran dağılımının h^* ikinci temel tensörünün paralel olması ve f fonksiyonu sabit olmayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon olması durumunda, eğer L lightlike hiperyüzeyi yerel simetrik ise total umbiliktir.

İspat. Şimdi $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir $(L,g,S(TL))$ lightlike hiperyüzeyini ele alalım. (10) eşitliğinden $\bar{R}$ Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevi her $X,Y,Z \in \Gamma(TL)$ vektör alanı için

$$
\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_W R)(X,Y)Z \;&=\; W[\frac{(f')^2+k}{f^2}](\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y) \\
&+ W[\frac{ff'' - ((f')^2+k)}{f^2}](\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)Y \\
&- \bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)X + (\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&- \bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t) \\
&+ \frac{ff'' - ((f')^2+k)}{f^2}((\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&- \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t + (\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&- \bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\bar{\nabla}_W\partial_t + \bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y
\end{aligned}
$$

$$-\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)X+\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y$$
$$-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t)X)$$

olarak bulunur. [3] çalışması Yardımcı Teorem 3.2 den her $X,Y,Z\in\Gamma(TL)$ için

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_W R)(X,Y)Z &= (\nabla_W R)(X,Y)Z+B(W,R(X,Y)Z)N\\
&+(\nabla_W B)(X,Z)A_N Y-(\nabla_W B)(X,Z)\tau(Y)N\\
&+B(X,Z)(\nabla_W A_N)Y+B(X,Z)B(W,A_N Y)N\\
&-(\nabla_W B)(Y,Z)A_N X-B(Y,Z)(\nabla_W A_N)X\\
&-B(Y,Z)B(W,A_N X)N+(\nabla_W(\nabla_X B))(Y,Z)N\\
&-(\nabla_W(\nabla_Y B))(X,Z)N+B(Y,Z)(\nabla_W\tau)(X)N\\
&-B(Y,Z)\tau(X)A_N W+\tau(X)\tau(W)B(Y,Z)N\\
&+(\nabla_Y B)(X,Z)A_N W-(\nabla_Y B)(X,Z)\tau(W)N\\
&-(\nabla_X B)(Y,Z)A_N W+(\nabla_X B)(Y,Z)\tau(W)N\\
&-B(X,Z)(\nabla\tau)(Y)N+B(X,Z)\tau(Y)A_N W\\
&+B(X,Z)\tau(Y)\tau(W)N-(\nabla_{\nabla_W X}B)(Y,Z)N\\
&+(\nabla_{\nabla_W Y}B)(X,Z)N-\bar{R}(h(W,X),Y)Z\\
&-\bar{R}(X,h(W,Y))Z-\bar{R}(X,Y)h(W,Z)\\
&+(\nabla_W B)(Y,Z)\tau(X)N\end{aligned}$$

olduğu biliniyor. R eğrilik tensörünün $W\in\Gamma(TL)$ vektör alanına göre kovaryant türevi yukarıdaki eşitlik kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}(\nabla_W R)(X,Y)Z &= W[\frac{(f')^2+k}{f^2}](\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y)\\
&+W[\frac{ff''-((f')^2+k)}{f^2}](\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)Y\\
&-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)X+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z)\\
&-\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t)\\
&+\frac{ff''-((f')^2+k)}{f^2}((\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)\bar{g}(X,Z)\\
&-\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z)\end{aligned}$$

$$-\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\bar{\nabla}_W\partial_t+\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y$$
$$-\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)X+\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y$$
$$-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t)X-B(W,R(X,Y)Z)N$$
$$-(\nabla_W B)(X,Z)A_N Y+(\nabla_W B)(X,Z)\tau(Y)N$$
$$-B(X,Z)(\nabla_W A_N)Y-B(X,Z)B(W,A_N Y)N$$
$$+(\nabla_W B)(Y,Z)A_N X+B(Y,Z)(\nabla_W A_N)X$$
$$+B(Y,Z)B(W,A_N X)N-(\nabla_W(\nabla_X B))(Y,Z)N$$
$$+(\nabla_W(\nabla_Y B))(X,Z)N-B(Y,Z)(\nabla_W\tau)(X)N$$
$$+B(Y,Z)\tau(X)A_N W-\tau(X)\tau(W)B(Y,Z)N$$
$$-(\nabla_Y B)(X,Z)A_N W+(\nabla_Y B)(X,Z)\tau(W)N$$
$$+(\nabla_X B)(Y,Z)A_N W-(\nabla_X B)(Y,Z)\tau(W)N$$
$$+B(X,Z)(\nabla\tau)(Y)N-B(X,Z)\tau(Y)A_N W$$
$$-B(X,Z)\tau(Y)\tau(W)N+(\nabla_{\nabla_W X}\}B)(Y,Z)N$$
$$-(\nabla_{\nabla_W Y}B)(X,Z)N+\bar{R}(h(W,X),Y)Z$$
$$+\bar{R}(X,h(W,Y))Z+\bar{R}(X,Y)h(W,Z)$$
$$-(\nabla_W B)(Y,Z)\tau(X)N. \tag{11}$$

L yerel simetrik ise (11) eşitliğinde $X=Z=\xi$ alındığında

$$0 \;=\; W[\frac{ff''-((f')^2+k)}{f^2}]((\bar{g}(\xi,\partial_t))^2 Y-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(\xi,\partial_t)\xi)$$
$$+\frac{ff''-((f')^2+k)}{f^2}(\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y$$
$$-\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)\xi+\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t)Y$$
$$-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t)\xi)-B(W,R(\xi,Y)\xi)N$$
$$+(\nabla_W B)(Y,\xi)A_N\xi-(\nabla_W(\nabla_\xi B))(Y,\xi)N$$
$$+(\nabla_W(\nabla_Y B))(\xi,\xi)N+(\nabla_{\nabla_W\xi}B)(Y,\xi)N$$
$$+\bar{R}(\xi,h(W,Y))\xi-(\nabla_W B)(Y,\xi)\tau(\xi)N \tag{12}$$

elde edilir. h^* ikinci temel formu paralel olduğundan, yukarıdaki önerme yardımıyla S(TL) ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğettir. Dolayısıyla S(TL) ekran dağılımı tanım gereğince ∂_t vektör alanına diktir.

$Y \in S(TL)$ alınırsa $\bar{g}(Y,N)=0$ ve $\bar{g}(Y,\partial_t)=0$ sonuçlarına ulaşılır. Ayrıca (9) eşitliği ve Yardımcı Teorem 1.5 ten

$$\bar{\nabla}_W \partial_t = \bar{\nabla}_{\widehat{W}} \partial_t = \frac{f'}{f}(W + \bar{g}(W,\partial_t)\partial_t)$$

bulunur. (10) eşitliğinden bulunan

$$g(R(\xi,N)\xi,N) = \frac{(f')^2+k}{f^2} - \frac{2\big(ff'' - ((f')^2+k)\big)}{f^2}\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(N,\partial_t)$$

ifadesi ve yukarıdaki eşitlik kullanılarak (12) eşitliğinin her iki tarafının N vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$0 \;=\; -\frac{\big(ff'' - ((f')^2+k)\big)}{f^2}.\frac{f'}{f}\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(W,Y)$$

$$+B(W,Y)\Big(\frac{(f')^2+k}{f^2} - \frac{2\big(ff''-((f')^2+k)\big)}{f^2}\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(N,\partial_t)\Big) \qquad (13)$$

elde edilir. Bu aşamada, eğer

$$\frac{(f')^2+k}{f^2} - \frac{2\big(ff''-((f')^2+k)\big)}{f^2}\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(N,\partial_t) = 0$$

olduğu kabul edilirse, $\bar{g}(\xi,\partial_t)=0$ ve $\frac{ff''-((f')^2+k)}{f^2}=0$ olduğundan, (13) eşitliğinden $f'=0$ bulunur. Hipoteze göre f fonksiyonu sabit olmadığından, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (13) eşitliğinden

$$B(W,Y) = \frac{\frac{\left(ff''-((f')^2+k)\right)}{f^2}.\frac{f'}{f}\bar{g}(\xi,\partial_t)}{\frac{(f')^2+k}{f^2} - \frac{2\left(ff''-((f')^2+k)\right)}{f^2}\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(N,\partial_t)}\,\bar{g}(W,Y)$$

elde edilir. Bu ise hiperyüzeyin total umbilik olduğu anlamına gelir. ■

$M_1^{n+1}(k,f)$ Robertson-Walker uzay-zamanının sabit eğrilikli olması durumunda ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

Önerme 2.5 $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olsun. Eğer hiperyüzeyin h ikinci temel formu paralel ise $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir [4].

Sonuç 2.6 $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olsun. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı ve hiperyüzeyin h ikinci temel formu paralel olmak üzere, L lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.

İspat. Yukarıda verilen önerme gereğince, h ikinci temel formunun paralel olması durumunda $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir. Her sabit eğrilikli uzay yerel simetrik olduğundan, Teorem 1.3 e göre L lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır. ■

$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının Ricci tensörü aşağıdaki önerme ile tanımlanıyor:

Önerme 2.7 $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının Ricci tensörü her $X,Y \in M_1^{n+1}(k,f)$ için

$$\overline{Ric}(X,Y) = -\alpha n \bar{g}(X,Y) + \beta\{(n-1)\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t) - \bar{g}(X,Y)\}$$

eşitliği ile tanımlıdır [4].

$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olmak üzere, bu hiperyüzeyin Ricci tensörü $R^{(0,2)}$ ile gösterilirse, her $X,Y \in \Gamma(TL)$ için (7) ve (8) eşitliklerinden

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \overline{Ric}(X,Y) - B(X,Y)trA_N + g(A_\xi^*Y, A_NX) + \bar{g}(\bar{R}(\xi,Y)X,N) \qquad (14)$$

bulunur. (10) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(\xi,Y)X,N) \;=\; & \alpha\bar{g}(X,Y) + \beta\{\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t) - \bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N) \\ & -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik, yukarıdaki önerme ile birlikte (14) eşitliğinde yerine yazılırsa, $R^{(0,2)}$ tensörü

$$\begin{aligned}R^{(0,2)}(X,Y) \;=\; & -\alpha(n-1)\bar{g}(X,Y) + \beta\{n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t) - \bar{g}(X,Y) \\ & -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N) - \bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)\} \\ & -B(X,Y)trA_N + \bar{g}(A_\xi^*Y, A_NX) \qquad (15)\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.8 Düz bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ ve $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olsun. Bu durumda L hiperyüzeyinin Ricci düz olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.

İspat. $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının düz olması durumunda $\beta = \alpha = 0$ olur. (15) eşitliğinden

$$R^{(0,2)}(X,Y) = -B(X,Y)trA_N + g(A_\xi^*Y, A_NX)$$

bulunur. L hiperyüzeyinin Ricci düz olması durumunda, $X = \xi$ alınırsa

$$0 = g(A_\xi^*Y, A_N\xi)$$

olur. $A_N\xi = 0$ olduğundan, $A_\xi^* = 0$ olarak bulunur. Yani L lightlike hiperyüzeyi total geodeziktir. Diğer taraftan, eğer L total geodezik kabul edilirse, (15) eşitliğinden ve $\alpha = \beta = 0$ olduğu gerçeğinden $R^{(0,2)} = 0$ olacağı açıktır. ■

Teorem 2.9 $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S(TL))$ olsun. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı ve S(TL) ekran dağılımı, $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğet olmak üzere, eğer L lightlike hiperyüzeyi Ricci simetrik ise, $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir.

İspat. (15) eşitliğinin kovaryant türevini alırsak

$$
\begin{aligned}
(\nabla_W R^{(0,2)})(X,Y) = & -W(\alpha)(n-1)g(X,Y) \\
& -\alpha(n-1)\{B(W,X)\bar{g}(N,Y) + B(W,Y)\bar{g}(N,X)\} \\
& +W(\beta)\{n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t) - g(X,Y) \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N) - \bar{g}(\xi,\partial_t)g(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)\} \\
& +\beta\{n\bar{g}(Y,\partial_t)[B(W,X)\bar{g}(N,\partial_t) + \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& +n\bar{g}(X,\partial_t)[B(W,Y)\bar{g}(N,\partial_t) + g(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& -B(W,X)\bar{g}(N,Y) - B(W,Y)\bar{g}(X,N) \\
& -\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N)[-\bar{g}(A_\xi^*W,\partial_t) + \bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,N)[B(W,Y)\bar{g}(N,\partial_t) + \bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& +\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,A_NW) \\
& -g(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)[-\bar{g}(A_\xi^*W,\partial_t) + \bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)g(X,Y)[-\bar{g}(A_NW,\partial_t) + \bar{g}(N,\bar{\nabla}_W\partial_t)] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(N,\partial_t)[B(W,X)\bar{g}(N,Y) + B(W,Y)\bar{g}(X,N)]\} \\
& -(\nabla_W B)(X,Y)trA_N - B(X,Y)W(trA_N) \\
& +B(Y,(\nabla_W A_N)X)
\end{aligned}
$$

bulunur. $Y = W = \xi$ alınırsa, L lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olduğu düşünülerek (3) ve (4) eşitlikleri yardımıyla yukarıdaki eşitlikten

$$
\begin{aligned}
0 = & \ \xi(\beta)\{n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(\xi,\partial_t) - \left(\bar{g}(\xi,\partial_t)\right)^2\bar{g}(X,N)\} \\
& +\beta\{n\bar{g}(\xi,\partial\_t)\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) + n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,N)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) - \bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,N)\bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) \\
& +\left(\bar{g}(\xi,\partial_t)\right)^2\bar{g}(X,A_N\xi) - \left(\nabla_\xi B\right)(X,\xi)trA_N
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $X \in S(TL)$ alınırsa, S(TL) ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğet olduğundan, $\bar{g}(X,\partial_t) = 0$ ve $\bar{g}(X,N) = 0$ olur. Bu ifadeler yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında (5) ve (6) eşitlikleri de kullanılarak

$$0 = \beta\{n\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) + \left(\bar{g}(\xi,\partial_t)\right)^2\bar{g}(X,A_N\xi) \qquad (16)$$

bulunur. (9) eşitliği ve Yardımcı Teorem 1.5 ten

$$\bar{\nabla}_\xi\partial_t = \bar{\nabla}_{\hat{\xi}-\bar{g}(\xi,\partial_t)\partial_t}\partial_t = \bar{\nabla}_{\hat{\xi}}\partial_t = \frac{f'}{f}\hat{\xi} = \frac{f'}{f}(\xi + \bar{g}(\xi,\partial_t)\partial_t)$$

ve

$$\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t) = \frac{f'}{f}\{g(X,\xi) + \bar{g}(\xi,\partial\_t)\bar{g}(X,\partial_t)\} = 0$$

elde edilir. Böylece (16) eşitliğinden

$$0 = \beta\left(\bar{g}(\xi,\partial_t)\right)^2\bar{g}(X,A_N\xi)$$

bulunur. Bu eşitlikten, $\bar{g}(\xi,\partial_t) \neq 0$ ve $A_N\xi = 0$ olduğundan $\beta = 0$ dır. Yani $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir. ■

Kaynaklar

[1] Chen, B. and Veken, J.V., 2007, Spatial and Lorentzian surfaces in Robertson-Walker space times, J. Math. Phys., 48, 073509.

[2] Duggal, K.L. and Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academics Publishers, 301 p.

[3] Güneş, R., Şahin, B. ve Kılıç, E., 2003, On Lightlike Hypersurfaces of a Semi-Riemannian Space Form, Turk. J. Math., 27, 283-297.

[4] Kang, T.H., 2012, On Lightlike Hypersurfaces of a GRW space-time, Bull. Korean. Math. Soc., 49 (4), 863-874.

[5] Kath, I., 2010, Classification results for pseudo-Riemannian symmetric spaces, Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry, V. Cortes (Ed.), EMS, Germany, 946 p.

[6] O'neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 469 p.