ISSN: **2146-8168** Sayı: **9**, Yıl: **2014**, Sayfa: **20-25** http://bilader.gop.edu.tr

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen bilimleri Enstitüsü
Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi

Dergiye Geliş Tarihi : 04.02.2014 *Baş Editör*: Naim Çağman
Yayına Kabul Tarihi: 04.03.2014 *Alan Editorü*: Oktay Muhtaroğlu

İndirgeme İlişkisine Sahip Diziler ve Matrisler Yardımı ile Gen Frekanslarının Hesaplanması

Adem ŞAHİN[a,1] (adem.sahin@gop.edu.tr)
İskender PARMAKSIZ[b] (iskender.parmaksiz@gop.edu.tr)
Kenan KAYGISIZ[c] (kenan.kaygisiz@gop.edu.tr)

[a] *Matematik Eğitimi Anabilimdalı, Eğitim Fakültesi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, 60250 Tokat*
[b] *Moleküler Biyoloji ve Genetik Böl., Fen Edebiyat Fak., Gaziosmanpaşa Üniversitesi, 60250 Tokat*
[c] *Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, 60250 Tokat*

Özet - Bu çalışmada erkeklerin heterogametik(XY) olduğu türlerde cinsiyete bağlı X üzerinde taşınan bir karakter için bir gen yerindeki gen frekansların erkek ve dişilerde farklı olması durumunda (erkeklerde a ve dişilerde b) birbirini izleyen generasyonlarda iki cinsiyette gen frekanslarının ne olacağının belirlenmesi için rekürans ilişkili sayı dizilerinin özellikleri kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Erkek annesinin frekansını aynen aldığı için hesaplama sadece dişiler üzerinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler - *Gen frekansı, populasyon genetigi, rekürans ilişkili sayı dizileri, matris determinantı.*

[1] Sorumlu Yazar

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 9 (2014) 20-25

Calculation of gene frequency by sequences and matrices with a reduction relation

Abstract - In this study, using the properties of recurrence related number sequences, we obtained some results in order to determine the status of gene frequencies in males and females in successive generations, in cases where gene frequency is different for a gender specific character in both genders (a for male, b for female) in species where males are heterogametic (XY). Calculations were carried out through females only since males inherit frequency of their mother.

Keywords -
Gene frequency, population genetic, recurrence related number sequences, determinant of matrix.

Received: 04.02.2014 *Accepted*: 04.03.2014

1 Giriş

Günümüzde, temel ve uygulamalı bilimlerde çeşitli sorunlarla karşılaşılmaktadır. Bu sorunları yerinde ve zamanında çözümlemek için disiplinler arası çalışmalar yapmak ve çözüm önerileri üretmek gerekmektedir. Çözüm odaklı çalışmaların belki de en önemli ilk basamağı sofistike Matematik teknikler kullanmaktır. Bu durumda, köprü görevi görecek Matematiğe dayalı bilimler ve diğer disiplinler arasında yoğun iş birliklerine ihtiyaç vardır. Sonuçta da Disiplinlerarası Uygulamalı Matematik adı altında yeni bir alan doğmuştur. Bir olayın ya da sorunun matematiksel olarak çözümlenebilmesi durumunda, aynı şekliyle veya benzer yollarla olayın sorun oluşturduğu bilim dalında da çözümlenebilir olması önerilmelidir. İşte burada matematikte modellenen problem ve çözüm yolları, diğer disiplinlere transfer edilebilirliğinin ve uygulanabilirliğinin ilk durum tespiti başarıya giden yolun da başlangıcıdır. Bu durum hem matematikçileri hem de diğer genelde Fen ve Teknoloji alanında, özelde de Biyoloji alanında yeni yöntemlere ulaşmak ve yenilikçi yollar açmak için fırsatlara dönüşebilir[5]. Genetik çalışmaların temelinde var olan matematik bu çalışmada da kullanılmıştır. İnsanlar ve tüm canlılar için ortak olan değerlerden birisi de meydana gelen neslin devamlılığıdır. Devamlılığın sağlanabilmesi için de tür içi etkileşimler sonucu oluşan yeni nesillerin biyolojik özelliklerinin türe özgü değerlere sahip olup olmaması ile denetlenmektedir. Bu gibi denetleme lerin yapılışı da yeni bir bilim dalı olarak kabul edilen Matematiksel Biyolojidir. Biyolojik ve Genetik bir problem olan hastalıkların bugünkü varlığının gelecek nesillerde nasıl olacağı zihinlerimizi meşgul eden bir sorudur. Bu sorunun cevabını, önlemlerini ve hatta çözüm yollarını Matematiksel Biyolojiden destek alarak bulabiliriz. Diğer bir ifade ile toplumda bugün var olan bir hastalığın yıllar sonra aynı toplumda nasıl ve hangi düzeyde olabileceğini yine aynı şekilde yorumlamaya çalışırız. Bu durum bize spesifik bir hastalıksa; onunla nasıl mücadele edeceğimiz, nasıl koruyucu tedbirler alabileceğimiz konusunda yönlendirici bilgiler sunmaktadır. Bu çalışmada insan kromozomlarından eşey kromozomlarından olan X kromozomu üzerinde taşınan bir özellik incelenmektedir.

X kromozomu üzerinde taşınan bu özellik (bir hastalık ya da herhangi bir incelenen özellik) incelenen ata canlıdan kaç nesil sonra ne düzeyde (frekans/yüzde etki) kendini göstermektedir sorusunun cevabının aranmasıyla başlamıştır[3, 6].

Sorumuzu matematiksel olarak ele alacak olursak; başlangıç koşulu $x_0 = a$, $x_1 = b$ olmak üzere $n \geq 2$ için $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ şeklinde n. generasyonda annenin frekansı bulunabilir. Bu tarz (bir başlangıç koşulu verilip bu başlangıç koşulu ve bir indirgeme bağıntısı ile elde edilen) dizilere Fibonacci tip diziler veya indirgeme ilişkisine sahip diziler denir. Bu tip dizilerin terimlerini hesaplamada temel problem şudur; bizden n. terim istendiğinde kendinden önceki $n-1$ tane terimin hesaplanması gerekir. Bu çalışmada n. generasyondaki frekansı reküransa gerek kalmadan elde etmemizi sağlayan eşitlikler verilecektir.

Machenry [4] genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$$\begin{aligned} F_{k,n}(t) &= 0,\ n<1 \\ F_{k,0}(t) &= 1 \\ F_{k,1}(t) &= t_1 \\ F_{k,n}(t) &= t_1F_{k,n-1}(t)+\cdots+t_kF_{k,n-k}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Teorem 1.1. *[2] $k \geq 2$ bir tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu ve $Q_{k,n} = (q_{rs})$*

$$q_{rs} = \begin{cases} i^{|r-s|}\cdot\frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}} & eğer\ \ -1 \leq r-s < k, \\ 0 & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipinde bir Hessenberg matris olmak üzere

$$\det(Q_{k,n}) = F_{k,n}(t) \tag{2}$$

dir. Burada $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ dir.

Teorem 1.2. *[2] $k \geq 2$ bir tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu ve $B_{k,n} = (b_{ij})$*

$$b_{ij} = \begin{cases} -t_2 & eğer\ \ j = i+1, \\ \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}} & eğer\ \ 0 \leq i-j < k, \\ 0 & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipinde bir Hessenberg matris ve $t_0 = 1$ olmak üzere

$$\det(B_{k,n}) = F_{k,n}(t) \tag{3}$$

dir.

2 Gen Frekanslarının Hesaplanması

İlk olarak problemimizi bir örnekle açıklayalım. Bu örnekte basit hesaplama ile annenin gen frekansının $0,6$, babanın gen frekansının $0,2$ olması durumunda 4. generasyonda erkek ve dişinin gen frekansının ne olacağını gösterelim. Burada erkek annenin gen frekansını aynen alırken, dişi anne ve babasının gen frekansının aritmetik ortalamasını gen frekansı olarak alır.

P	$X^{(0,6)}X^{(0,6)}$	$X^{(0,2)}Y$
F_1	$0,4$	$0,6$
F_2	$\frac{0,4+0,6}{2}=0,5$	$0,4$
F_3	$\frac{0,4+0,5}{2}=0,45$	$0,5$
F_4	$\frac{0,45+0,5}{2}=0,475$	$0,45$

Tablodan görüldüğü gibi 4. generasyonda dişinin gen frekansı $0,475$, erkeğin gen frekansı $0,45$ olarak elde edilir.

Teorem 2.1. *Erkeklerin heterogametik(XY) olduğu türlerde cinsiyete bağlı bir karekter için gen frekanslarının erkek ve dişilerde farklı olması durumunda (babanın gen frekansının a, annenin gen frekansının b) n. generasyonda dişinin frekansı x_n olmak üzere*

$$x_n = \frac{a(2^n-(-1)^n)+b(2^{n+1}-(-1)^{n+1})}{3.2^n}$$

dir.

İspat: İlk olarak bir tablo yardımı ile problemi açıklayalım; Bu türlerde bir sonraki generasyonda erkek annenin gen frekensını aynen alırken, dişi anne ve babanın gen frekansının toplamlarının yarısını frekans olarak alır.

Nesil	Erkek(XY)	Dişi(XX)
P	a	b
F_1	b	$\frac{a+b}{2}$
F_2	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{a+3b}{4}$
F_3	$\frac{a+3b}{4}$	$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+3b}{4}}{2}=\frac{3a+5b}{8}$
F_4	$\frac{3a+5b}{8}$	$\frac{\frac{a+3b}{4}+\frac{3a+5b}{8}}{2}=\frac{5a+11b}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tablodan görüldüğü üzere bu hesaplamayı sadece dişi üzerinden yapmak yeterlidir. Burada a ve b nin katsayılarına bakılırsa $1,1,3,5,11,\ldots$ şeklinde bir dizi oluşturduğu görülür. Bu dizi incelenirse yine indirgeme ilişkisine sahip, başlangıç koşulları $r_0=0$, $r_1=1$ ve genel terimi $n\geq 2$ için $r_n=r_{n-1}+2r_{n-2}$ olan bir dizi olduğu görülür. Bu dizi literatürde Jacobsthal dizisi olarak bilinir. O halde eğer r_n hesaplanırsa problem çözülmüş olur. Kalman [1] başlangıç koşulları $a_0=0$, $a_1=1$ ve genel terimi $a_{n+2}=c_0a_n+c_1a_{n+1}$ rekürans ilişkisi ile verilen dizinin genel terimini reküransa bağlı kalmadan

$$D=c_1^2+4c_0$$

olmak üzere

$$a_n=\frac{(c_1+\sqrt{D})^n-(c_1-\sqrt{D})^n}{2^n\sqrt{D}}$$

eşitliği ile vermiştir. Bizim çalışmamızdaki r_n dizisi göz önüne alınırsa $c_0=2$ ve $c_1=1$ için a_n dizisi r_n dizisine indirgenir. O halde yukarda verilen eşitlik $c_0=2$ ve $c_1=1$ için tekrar düzenlenirse

$$r_n=\frac{(1+\sqrt{9})^n-(1-\sqrt{9})^n}{2^n\sqrt{9}}=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

elde edilir. Problemimizde verilen temel x_n dizisi incelenirse

$$x_n = \frac{ar_n + br_{n+1}}{2^n} \tag{4}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $r_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$x_n = \frac{a(2^n - (-1)^n) + b(2^{n+1} - (-1)^{n+1})}{3.2^n}$$

elde edilmiş olur.

Teorem 2.2. *Erkeklerin heterogametik(XY) olduğu türlerde cinsiyete bağlı bir karekter için gen frekanslarının erkek ve dişilerde farklı olması durumunda (babanın gen frekansının a, annenin gen frekansının b) n. generasyonda dişinin frekansı x_n olmak üzere,*

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \textit{ ve } K_n = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ i & 1 & 2i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$x_n = \frac{a\det(R_{n-1}) + b\det(R_n)}{2^n}$$

veya

$$x_n = \frac{a\det(K_{n-1}) + b\det(K_n)}{2^n}$$

dir.

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ aldığımızda r_n dizisi elde edilir. Ayrıca (2), (3) eşitliklerinde $k = 2$ için $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ alınırak $\det(R_n) = \det(K_n) = r_n$ elde edilir. (4) de r_n yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3. *Erkeklerin heterogametik(XY) olduğu türlerde cinsiyete bağlı bir karekter için gen frekanslarının erkek ve dişilerde farklı olması durumunda (babanın gen frekansının a, annenin gen frekansının b) n. generasyonda dişinin frekansı x_n olmak üzere, erkeğin gen frekansı*

$$y_n = x_{n-1} = \frac{a(2^{n-1} - (-1)^{n-1}) + b(2^n - (-1)^n)}{3.2^{n-1}}$$

dir.

Kaynaklar

[1] Kalman, D., 1982. Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Method. The Fibonacci Quarterly, 20,73–76.

[2] Kaygısız, K. ve Şahin, A., Determinantal and Permanental Representations of Fibonacci Type Numbers and Polynomials. Rocky Mountain Journal of Mathematics, (in press).

[3] Klug, W.S., Cummings, M.R., Spencer, C.A. ve Palladino, M.A., 2009. Concepts of genetics. 9th ed.

[4] MacHenry, T., 2000. Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions, The Fibonacci Quarterly, 38, 17-24.

[5] Murray, D.J., 2002. Mathematical Biology. Springer-Verlag, New York.

[6] Özsoy, M.K.,1991. Genetik Problemleri, Erzurum.