



Dergiye Geliş Tarihi: 12.08.2015

Yayına Kabul Tarihi: 12.11.2015

Baş Editör: Bilge Hilal Çadircı

Alan Editörü: Ercan Tunç

Bazı Skaler İmpulsif Diferansiyel Denklem Modellerinde Kararlılık Analizi

Duygu Aruğaslan^{a,1} (duyguarugaslan@sdu.edu.tr)
Şerife Yolcu^a (serife.yolcu@hotmail.com)

^a Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260 Isparta

Özet - Bu çalışmada bazı skaler sabit zamanlı impulsif diferansiyel denklem modelleri ele alınmıştır. Bu modellerin denge noktalarının kararlılığı impulsif diferansiyel denklemler için geliştirilen ikinci Lyapunov metodu ile incelenmiştir. Sonuçlar modellerin parametrelerine bağlı olarak ifade edilmiştir ve bu sonuçların bazıları nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler

İmpulsif diferansiyel denklemler, kararlılık, ikinci Lyapunov metodu, skaler modeller

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 11 (2015) 70-82

Stability Analysis of Some Scalar Impulsive Differential Equation Models

Abstract - In this study, some scalar impulsive differential equation models with impulses at fixed times are considered. Stability of the equilibria of these models are investigated by means of the second Lyapunov method developed for impulsive differential equations. Results are stated depending on the parameters of the models and some of these results are supported by numerical simulations.

Keywords

Impulsive differential equations, stability, second Lyapunov method, scalar models

Received: 12.08.2015

Accepted: 12.11.2015

¹Sorumlu Yazar

1 Giriş

Bazı süreçler dış etkenler sebebiyle anlık değişimlere maruz kalmaktadır. Bu süreçlerin modellenmesinde adi diferansiyel denklemler yeterli olamamaktadır. Sisteme dışarıdan bir etki yapıldığı zaman, bu etki sürecin durumunda impuls olarak adlandırılan anlık değişimlere sebep olmaktadır. Böyle süreçleri matematiksel olarak açıklamak için impulsif diferansiyel denklemler ile ifade edilen süreksiz yörüngelere sahip sistemler kullanılmaktadır. Son yıllarda, impulsif diferansiyel denklemler teorisi ve uygulamaları konusunda çok sayıda çalışma yapılmıştır [1]-[8], [12]. İmpulsif diferansiyel denklemler fizik, kimya, kontrol teorisi, elektronik, mekanik, ekonomi, popülasyon dinamikleri, elektrik devreleri, tıp, ekoloji ve biyoloji gibi çeşitli alanlarda karşılaşılan birçok somut problemin modellenmesinde daha gerçekçi bir yaklaşım sunmaktadır.

Sistemlerin süreksizliği ile ilgili ilk araştırmalar uygulamaya yönelik problemler üzerinde yapılmıştır. Saatin matematiksel modeli gibi bazı özel örnekler impulsif diferansiyel denklemler teorisinin gelişiminde başrol oynamıştır. Bununla birlikte, impulsif diferansiyel denklemler ile ilgili genel fikirler Pavlidis tarafından ortaya atılmıştır [9]-[11]. Daha sonra birçok matematikçi impulsif diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalara başlamıştır. Günümüzde bu denklemlerle ilgili yapılan teorik çalışmalar hala devam etmektedir. Samoilenko ve Perestyuk'un kitabı [12] çözümlerin varlığı ve tekliği, kararlılık, integral kümeleri, periyodik ve hemen hemen periyodik çözümler gibi birçok kuramsal problemi kapsadığından bu alandaki temel bir kaynaktır. Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov'un kitabı [6] ise yine bu alanda yazılmış kapsamlı bir eserdir. Akhmet'in kitabı [2], impulsif diferansiyel denklemler sınıfında yer alan süreksiz dinamik sistemler alanında farklı yaklaşımlar sunan önemli ve yetkin bir kitaptır.

Diferansiyel denklemlerde kullanılan kararlılık tanımları impulsif diferansiyel denklemler için de geçerlidir [2, 4]. Literatürde impulsif diferansiyel denklemlerin kararlılığı ile ilgili birçok teorik sonuç elde edilmiştir [1, 2, 12]. Bu çalışmada ise sabit zaman impuls etkili bazı süreçlerin kararlılığı impulsif diferansiyel denklemler için geliştirilen ikinci Lyapunov metodu yardımıyla incelenecektir. Lyapunov metodu ile denklemleri çözmeden kararlılık analizi yapmak mümkün olmaktadır.

2 Ön Bilgiler

$B(h_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h_0\}$, $\overline{B}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq h\}$, $\mathbb{R}_{t_0}^+ = [t_0, \infty)$ olarak tanımlansın.

Bir $V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$, fonksiyonu

$$G_{h_0} = \mathbb{R}_{t_0}^+ \times B(h_0)$$

bölgesinde tanımlı, reel değerli ve sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

Pozitif (negatif) tanımlılık ile ilgili aşağıda verilen tanım için [4, 12] kitaplarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. Her $(t, x) \in G_{h_0}$ için

$$V(t, x) \geq 0 \quad (V(t, x) \leq 0)$$

oluyorsa V fonksiyonuna G_{h_0} bölgesinde yarı pozitif (negatif) tanımlı fonksiyon denir. Ayrıca $x \neq 0$ için

$$V(t, x) \geq W(x) > 0 \quad (V(t, x) \leq -W(x) < 0), \quad W(0) = 0,$$

olacak biçimde sürekli bir W fonksiyonu varsa V fonksiyonuna G_{h_0} bölgesinde pozitif (negatif) tanımlı fonksiyon denir.

$h < h_0$ olmak üzere $G_h = R_{t_0}^+ \times \overline{B}(h)$ bölgesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), \quad t \neq \theta_i(x), \\ \Delta x|_{t=\theta_i(x)} &= I_i(x), \end{aligned} \quad (1)$$

sistemi değişken zamanlı impulsif diferansiyel denklemi ifade eder [12]. Burada $t = \theta_i(x)$, impulsların gerçekleştiği yüzeyleri göstermektedir ve i indis değerleri sonlu veya sonsuz bir küme tarafından indekslenmektedir. f ve I_i ise n -boyutlu vektör değerli fonksiyonlardır. (1) sisteminde f ve I_i fonksiyonlarının, sırasıyla G_h ve $\overline{B}(h)$ kümelerinde sürekli olduğu ve $f(t, 0) = 0$, $I_i(x) = 0$, $\theta_i(x) < \theta_{i+1}(x)$ ifadelerinin sağlandığı kabul edilmektedir. Bu durumda $x = 0$, (1) sisteminin bir çözümü olmaktadır.

(1) sisteminde vuru olayının [4] olmadığını kabul edelim. Bir başka deyişle, çözümlerin bir $t = \theta_i(x)$ süreksizlik yüzeyi ile en fazla bir kere karşılaştığı kabul edilmektedir.

$V(t, x)$ fonksiyonunun (1) sistemi boyunca t 'ye göre türevi $t \neq \theta_i$ için

$$V'_{(1)}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x V(t, x), f(t, x) \rangle$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $\text{grad}_x V(t, x)$ ifadesi, V fonksiyonunun x değişkenine göre gradiyent vektörünü göstermektedir.

Bu koşullar altında (1) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 2.2. [12] Her $(t, x) \in G_h$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

- (i) $V(t, x)$ pozitif tanımlı,
- (ii) $V'_{(1)}(t, x)$ yarı negatif tanımlı ve
- (iii) $V(\theta_i(x), x + I_i(x)) \leq V(\theta_i(x), x)$

oluyorsa (1) sisteminin $x = 0$ çözümü kararlıdır. (iii) yerine

(iv) $\psi(0) = 0$, $s > 0$ için $\psi(s) > 0$ olacak biçimde $s \geq 0$ değerlerine göre sürekli bir $\psi(s)$ fonksiyonu için

$$V(\theta_i(x), x + I_i(x)) - V(\theta_i(x), x) \leq -\psi(V(\theta_i(x), x))$$

oluyorsa (1) sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik karardır.

Şimdi, (1) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararsızlığı ile ilgili teorem verilecektir.

(a) $\Pi = \{(t, x) \in G_h : V(t, x) > 0\}$ bölgesi ile $t = \text{sabit}$, $t \geq t_0$, düzleminin kesişimi boş kümeden farklı açık bir küme olsun ve orijin bu kesişim kümesinin sınırında yer alsın.

(b) $V(t, x)$, Π bölgesinde sınırlı bir fonksiyon olsun.

Teorem 2.3. [12] (a)-(b) özelliklerini sağlayan bir $V(t, x)$ fonksiyonu Π bölgesinde her $i = 1, 2, \dots$ için

$$(i) V'_{(1)}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x V(t, x), f(t, x) \rangle \geq 0 \text{ ve}$$

(ii) $\psi(0) = 0$, $s > 0$ iken $\psi(s) > 0$ olacak şekilde $s \geq 0$ değerlerinde sürekli bir $\psi(s)$ fonksiyonu için

$$V(\theta_i(x), x + I_i(x)) - V(\theta_i(x), x) \geq \psi(V(\theta_i(x), x))$$

koşullarını sağlıyorsa (1) sisteminin $x = 0$ çözümü kararsızdır.

Bu çalışmada, impulsif diferansiyel denklemler için geliştirilen ikinci Lyapunov metodu ile ilgili teorik sonuçların gerçek yaşam problemlerinde karşılaşılabilen bazı skaler modellere uygulanması ve böylece sistemin parametrelerine bağlı koşulların elde edilmesi hedeflenmektedir. Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde dört farklı skaler impulsif diferansiyel denklem modeli için Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 ile verilen sonuçlar kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise bazı nümerik simülasyonlar sunulmuştur.

3 Ana Sonuçlar

3.1 Skaler model I

Şimdi r , b reel sabitler ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= rx, & t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= bx \end{aligned} \quad (2)$$

sabit katsayılı sistemini ele alalım. $x = 0$, (2) sisteminin bir denge noktasıdır. Şimdi bu sistemin $x = 0$ çözümünün kararlılığı ile ilgili sonuçları verelim.

Teorem 3.1. *Eğer $r \leq 0$ ve $-2 \leq b \leq 0$ ise (2) sisteminin $x = 0$ çözümü kararlıdır.*

İspat: $V(t, x) = V(x) = x^2$ Lyapunov fonksiyonunu alalım.

- (i) $x \neq 0$ iken $V(x) > 0$ ve $x = 0$ için $V(x) = 0$ olduğundan $V(x)$ pozitif tanımlıdır.
- (ii) V fonksiyonun (2) sistemi boyunca t 'ye göre türevi $V'_{(2)}(x) = 2rx^2$ olur. $r \leq 0$ olduğundan $V'_{(2)}(x)$ yarı negatif tanımlıdır.
- (iii) $V(\theta_i, x + I_i(x)) = V(x + I_i(x)) = V(x + bx) = [(1 + b)x]^2 = (1 + b)^2x^2$ bulunur. Hipoteze göre $-2 \leq b \leq 0$ olduğundan $(1 + b)^2x^2 \leq x^2$ elde edilir. Buradan $V(x + I_i(x)) \leq V(x)$ bulunur.

Böylece Teorem 2.2'ye göre (2) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlı olduğu görülür. \square

Teorem 3.2. *Eğer $r \leq 0$ ve $-2 < b < 0$ ise (2) sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.*

İspat: $V(x) = x^2$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1'de (2) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlı olduğu ispatlanmıştı. Şimdi bu çözümün asimptotik kararlılığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} V(\theta_i, x + I_i(x)) - V(\theta_i, x) &= V(x + I_i(x)) - V(x) \\ &= (1 + b)^2x^2 - x^2 \\ &= [(b + 1)^2 - 1]x^2 \end{aligned}$$

ifadesi $-2 < b < 0$ olduğundan negatif tanımlıdır ve $\psi(s) = [1 - (b + 1)^2]s$ fonksiyonu için Teorem 2.2'nin (iv) maddesi sağlanmış olur.

O halde Teorem 2.2'ye göre (2) sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.3. *Eğer $r > 0$, $b > 0$ veya $b < -2$ ise (2) sisteminin $x = 0$ çözümü kararsızdır.*

İspat: $V(t, x) = V(x) = x^2$ olsun. Böylece

- (i) $V'_{(2)}(x) = 2rx^2 \geq 0$ bulunur.
- (ii) $V(\theta_i, x + I_i(x)) - V(\theta_i, x) = V(x + I_i(x)) - V(x) = [(b + 1)^2 - 1]x^2$ ifadesi $b > 0$ veya $b < -2$ olduğundan pozitif tanımlıdır ve $\psi(s) = [(b + 1)^2 - 1]s$ fonksiyonu için Teorem 2.3'ün (ii) maddesi gerçekleşir.

Sonuç olarak, Teorem 2.3'e göre (2) sisteminin $x = 0$ çözümü kararsızdır. \square

3.2 Skaler model II

$k, k > 0, r, E_i, E_i \geq -1$ reel sabitler olmak üzere $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq h\}$ bölgesinde

$$\begin{aligned} x' &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right), & t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= E_i x \end{aligned} \quad (3)$$

sistemini ele alalım. Bu impulsif diferansiyel denklemin diferansiyel kısmı lojistik denklem olarak alınmıştır. Bu modelde bir türün hastalık, avlanma veya göç gibi sebeplerle ani değişimlere maruz kaldığı durumlardaki davranışı impulsif diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir. $x(0) = x_0 > 0$ şeklindeki tüm çözümler için $E_i \geq -1$ olduğundan $x(t) = x(t, x_0) \geq 0$ eşitsizliği gerçekleşir.

$x = 0$, (3) sisteminin bir denge noktasıdır. Şimdi, bu sistemin $x = 0$ çözümünün kararlılığı ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 3.4. *Eğer $r \leq 0, h \leq k$ ve $-1 \leq E_i \leq 0$ ise (3) sisteminin $x = 0$ çözümü kararlıdır.*

İspat: $V(t, x) = V(x) = x^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

- (i) V fonksiyonu pozitif tanımlıdır.
- (ii) V fonksiyonun (3) sistemi boyunca t 'ye göre türevi

$$V'_{(3)}(x) = 2rx^2 \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

olur. $r \leq 0$ ve $0 \leq x \leq h \leq k$ olduğundan $V'_{(3)}(x)$ yarı negatif tanımlıdır.

- (iii) $V(\theta_i, x + I_i(x)) = V(x + I_i(x)) = V(x + E_i x) = [(1 + E_i)x]^2$ bulunur. $-1 \leq E_i \leq 0$ olduğundan $(1 + E_i)^2 x^2 \leq x^2$ olduğu görülür. Buradan $V(x + I_i(x)) \leq V(x)$ olur.

Bu da Teorem 2.2'ye göre (3) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlı olduğunu gösterir. \square

Teorem 3.5. *Eğer $r \leq 0, h \leq k$ ve $-1 \leq E_i < 0$ ise (3) sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.*

İspat: Teorem 3.4'e göre (3) sisteminin $x = 0$ çözümünün kararlı olduğunu biliyoruz. Şimdi bu çözümün asimptotik kararlı olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned} V(\theta_i, x + I_i(x)) - V(\theta_i, x) &= V(x + I_i(x)) - V(x) \\ &= (E_i + 1)^2 x^2 - x^2 \\ &= [(E_i + 1)^2 - 1] x^2 \end{aligned}$$

bulunur. $-1 \leq E_i < 0$ olduğundan bu fark negatif tanımlıdır ve $\psi(s) = [1 - (E_i + 1)^2] s$ olarak alındığında Teorem 2.2'nin (iv) ile verilen koşulu sağlanmış olur. Buna göre (3) sisteminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.6. *Eğer $r > 0$, $h \leq k$ ve $E_i > 0$ ise (3) sisteminin $x = 0$ çözümü kararsızdır.*

İspat: $V(t, x) = V(x) = x^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

- (i) $V'_{(3)}(x) = 2rx^2 \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ elde edilir. $r > 0$, $h \leq k$ olduğundan $V'(x)$ pozitif tanımlıdır.
- (ii) $V(x + I_i(x)) - V(x) = [(E_i + 1)^2 - 1] x^2$ bulunur. $E_i > 0$ olduğundan $\psi(s) = [(E_i + 1)^2 - 1] s$ fonksiyonu için Teorem 2.3'ün (ii) şartı sağlanır.

Bu durumda Teorem 2.3'e göre (3) sisteminin $x = 0$ çözümü kararsızdır. \square

3.3 Skaler model III

Şimdi r, k, E_i reel sabitler ve $k > 0$ olmak üzere $T_h = \{x \in \mathbb{R} : |x - k| \leq h\}$ bölgesinde

$$\begin{aligned} x' &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right), & t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= E_i(x - k) \end{aligned} \quad (4)$$

sistemi ele alalım. Önce bu sistemin denge noktasını bulalım.

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0 \text{ ise } x = 0 \text{ ve } x = k,$$

$$\Delta x = E_i(x - k) = 0 \text{ ise } x = k \text{ bulunur.}$$

Böylece $x = k$, (4) sisteminin pozitif denge noktasıdır. Öncelikle bu denge noktasını orijine taşıyalım. Bunun için $x - k = y$ lineer dönüşümü yapılırsa (4) sisteminin yerine

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{r}{k}y(y + k), & t \neq \theta_i \\ \Delta y|_{t=\theta_i} &= E_i y \end{aligned} \quad (5)$$

sistemi yazabiliriz. $y = 0$, (5) sisteminin bir denge noktasıdır. $x \in T_h$ olduğundan $|y| \leq h$ şartı sağlanmaktadır. Şimdi, (5) sisteminin $y = 0$ çözümünün kararlılığı ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 3.7. *Eğer $r \geq 0$, $h \leq k$ ve $-2 \leq E_i \leq 0$ ise (5) sisteminin $y = 0$ çözümü karardır.*

İspat: $V(y) = y^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

- (i) $V(y) = y^2$ pozitif tanımlıdır.
- (ii) V fonksiyonunun (5) sistemi boyunca t 'ye göre türevi

$$V'_{(5)}(y) = -\frac{2r}{k}y^2(y + k)$$

elde edilir. $r \geq 0$ ve $h \leq k$ olduğundan $V'_{(5)}(y)$ yarı negatif tanımlıdır.

(iii) $V(y + E_i y) - V(y) = [(E_i + 1)^2 - 1] y^2$ elde edilir. $-2 \leq E_i \leq 0$ olduğundan $V(y + E_i(y)) \leq V(y)$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Sonuç olarak, Teorem 2.2'ye göre (5) sisteminin $y = 0$ çözümü kararlıdır. \square

Teorem 3.8. *Eğer $r \geq 0$, $h \leq k$ ve $-2 < E_i < 0$ ise (5) sisteminin $y = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.*

İspat: Teorem 3.7'ye göre (5) sisteminin $y = 0$ çözümü kararlıdır. Şimdi bu çözümün asimptotik kararlı olduğunu gösterelim.

Hipoteze göre $-2 < E_i < 0$ olduğundan $\psi(s) = [1 - (E_i + 1)^2] s$ fonksiyonu için Teorem 2.2'nin son maddesi sağlanmış olur. Buna göre, (5) sisteminin $y = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.9. *Eğer $r < 0$, $h \leq k$ ve $E_i < -2$ veya $E_i > 0$ ise (5) sisteminin $y = 0$ çözümü kararsızdır.*

İspat: $V(t, y) = V(y) = y^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

(i) $V'_{(5)}(y) = -\frac{2r}{k} y^2 (y + k)$ elde edilir. Hipoteze göre $r < 0$ ve $h \leq k$ olduğundan $V'_{(5)}(y)$ pozitif tanımlıdır.

(ii) $V(y + E_i(y)) - V(y) = [(E_i + 1)^2 - 1] y^2$ bulunur. Hipoteze göre $E_i < -2$ veya $E_i > 0$ olduğundan $\psi(s) = [(E_i + 1)^2 - 1] s$ fonksiyonu için Teorem 2.3'ün (ii) maddesi doğrulanır.

O halde, (5) sisteminin $y = 0$ çözümü kararsızdır. \square

3.4 Skaler model IV

Şimdi r , k reel sabitler olmak üzere ve $I(x)$ sürekli fonksiyonu için

$$\begin{aligned} x' &= rx + k, & t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= (rx + k)I(x) \end{aligned} \quad (6)$$

sistemi ele alalım. Bu sistemin denge noktası $x = -\frac{k}{r}$ bulunur. Bu denge noktasını $x = 0$ noktasına taşımak için $y = x + \frac{k}{r}$ lineer dönüşümünü yapalım. $\tilde{I}(y) = I(y - \frac{k}{r})$ olmak üzere (6) sistemi

$$\begin{aligned} y' &= ry, & t \neq \theta_i, \\ \Delta y|_{t=\theta_i} &= ry\tilde{I}(y) \end{aligned} \quad (7)$$

sistemine denk olur. Görüldüğü gibi $y = 0$, (7) sisteminin denge noktasıdır. Şimdi bu denge noktasının kararlılığı ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 3.10. *Eğer $r < 0$ ve $0 \leq \tilde{I}(y) \leq \frac{-2}{r}$ ise (7) sisteminin $y = 0$ çözümü karardır.*

İspat: $V(t, y) = V(y) = y^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

(i) $V(y) = y^2$ pozitif tanımlıdır.

(ii) V fonksiyonun (7) sistemi boyunca t 'ye göre türevi

$$V'_{(7)}(y) = 2ry^2$$

olur. $r < 0$ olduğundan $V'_{(7)}(y)$ negatif tanımlıdır.

(iii) $V(y + ry\tilde{I}(y)) - V(y) = \left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2$ bulunur. $r < 0$ ve $0 \leq \tilde{I}(y) \leq \frac{-2}{r}$ olduğundan $\left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2 \leq 0$ elde edilir. Buradan $V(y + ry\tilde{I}(y)) \leq V(y)$ olduğu görülür.

Bu ifadeler Teorem 2.2'ye göre (7) sisteminin $y = 0$ çözümünün kararlı olduğunu gösterir. \square

Teorem 3.11. *$r < 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $\frac{-1+\sqrt{1-\alpha}}{r} \leq \tilde{I}(y) \leq \frac{-1-\sqrt{1-\alpha}}{r}$ ise (7) sisteminin $y = 0$ çözümü asimptotik karardır.*

İspat: Teorem 3.10'a göre (7) sisteminin $y = 0$ çözümü karardır. Şimdi $y = 0$ çözümünün asimptotik kararlılığı için Teorem 2.2'nin (iv) koşulunu inceleyelim.

$V(y) = y^2$ Lyapunov fonksiyonu için

$$V(y + I_i(y)) - V(y) = V(y + ry\tilde{I}(y)) - V(y) = \left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2 \text{ bulunur.}$$

Hipotezde verilen $\frac{-1+\sqrt{1-\alpha}}{r} \leq \tilde{I}(y) \leq \frac{-1-\sqrt{1-\alpha}}{r}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2 \leq -\alpha y^2$$

olduğu görülür.

Bu da bize gösterir ki $V(y + I_i(y)) - V(y) \leq -\psi(V(y))$ olacak biçimde $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $s > 0$ için $\psi(0) > 0$ şartını sağlayan $\psi(s) = \alpha s$ fonksiyonu vardır ve Teorem 2.2'ye göre (7) sisteminin $y = 0$ çözümü asimptotik karardır. \square

Teorem 3.12. *Eğer $r > 0$ ve $\alpha > 0$ için $\tilde{I}(y) \geq \frac{-1+\sqrt{1+\alpha}}{r}$ veya $\tilde{I}(y) \leq \frac{-1-\sqrt{1+\alpha}}{r}$ ise (7) sisteminin $y = 0$ çözümü kararsızdır.*

İspat: $V(t, y) = V(y) = y^2$ Lyapunov fonksiyonumuz olsun.

(i) $V'_{(7)}(y) = 2yy' = 2ry^2$ elde edilir. $r > 0$ olduğundan $V'_{(7)}$ pozitif tanımlıdır.

(ii) $V(\theta_i, y + I_i(y)) - V(\theta_i, y) = V(y + ry\tilde{I}(y)) - V(y) = \left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2$
 bulunur. Hipoteze göre $\tilde{I}(y) \geq \frac{-1 + \sqrt{1+\alpha}}{r}$ veya $\tilde{I}(y) \leq \frac{-1 - \sqrt{1+\alpha}}{r}$ olduğundan

$$\left\{ [1 + r\tilde{I}(y)]^2 - 1 \right\} y^2 \geq \alpha y^2$$

elde edilir. O halde $V(y + I_i(y)) - V(y) \geq \psi(V(\theta_i, y))$ olacak biçimde $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $s > 0$ için $\psi(s) > 0$ şartını sağlayan sürekli bir $\psi(s) = \alpha s$ fonksiyonu vardır.

Teorem 2.3'e göre (7) sisteminin $y = 0$ çözümü kararsızdır. \square

4 Nümerik Sonuçlar

Yukarıda bazı skaler impulsif diferansiyel denklem modellerinin kararlılığı ile ilgili kriterler ve teoremler verilmiştir. Bu bölümde, (2) sistemi için belirlenen kriterler ve teoremleri destekleyecek şekilde nümerik sonuçlar ve simülasyonlar verilecektir.

Örnek 4.1. (2) sisteminde $r = -1$, $b = \frac{-1}{10}$, $x(0) = 1$ ve $\theta_i = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde alınırsa, (2) sistemi

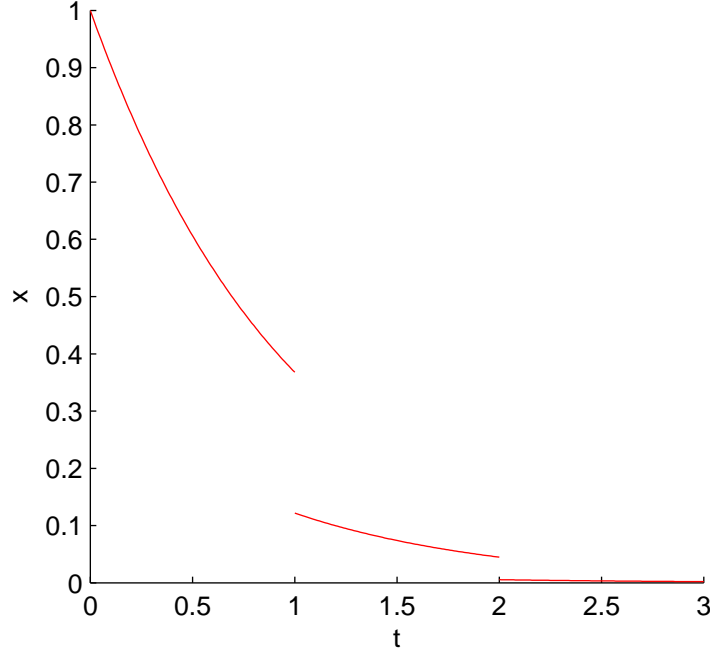
$$\begin{aligned} x' &= -x, & t \neq i, & x \in \mathbb{R} \\ \Delta x|_{t=i} &= \frac{-1}{10}x \end{aligned} \quad (8)$$

olarak yazılır.

(8) sisteminin $[0, 3]$ aralığında nümerik simülasyonu MATLAB programı ile Şekil 1'deki gibi elde edilmiştir.

Şekil 1'de çözümlerin $x = 0$ denge noktasına yaklaştığı görülmektedir. O halde Teorem 3.2'ye göre (8) sisteminin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır. Bu sonucu analitik çözüm ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

(8) sisteminin $t \neq i$ iken çözümü $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x(t) = ce^{-t}$ olarak bulunur. $x(0) = 1$ ise $x(t) = e^{-t}$ olur. $t \in [0, 1]$ aralığında çözüm $x(t) = e^{-t}$ fonksiyonu boyunca devam eder. Buradan $x(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ bulunur. Genel olarak $\Delta x|_{t=i} = x(i+) - x(i) = \frac{-1}{10}x(i)$, $x(i+) = \frac{9}{10}x(i)$ şeklinde bulunur. Buradan $x(1+) = \frac{9}{10}x(1) = \frac{9}{10e}$ elde edilir. $t \in (1, 2]$ aralığında çözüm $x(t) = \frac{9}{10e}e^{-t} = \frac{9}{10}e^{-t-1}$ şeklinde devam eder. Böylece $x(2) = \frac{9}{10}e^{-3}$, $x(2+) = \frac{9}{10}x(2) = \frac{81}{100}e^{-3}$ bulunur. $t \in (2, 3]$ için çözüm $x(t) = \frac{81}{100}e^{-t-3}$ şeklindedir. Çözümleri



Şekil 1: (8) sisteminin çözüm grafiği.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{9}{10}e^{-t-1}, & 1 < t \leq 2 \text{ ise} \\ \frac{81}{100}e^{-t-3}, & 2 < t \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalı fonksiyon halinde yazabiliriz. Buradan çözümlerin t artarken $x = 0$ denge noktasına yaklaştığı görülmektedir.

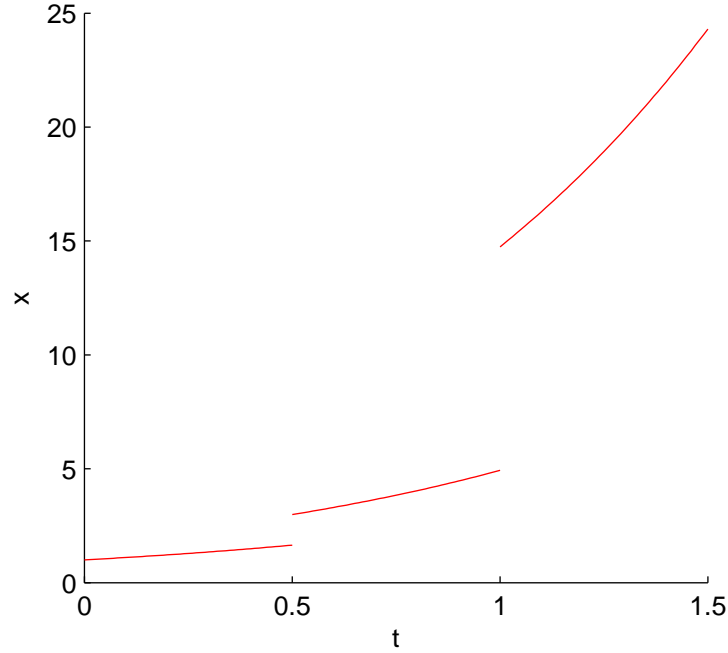
Örnek 4.2. Şimdi (2) sisteminde $r = 1$, $b = \frac{1}{10}$, $x(0) = 1$ ve $\theta_i = \frac{i}{2}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde alınırsa, (2) sistemi

$$\begin{aligned} x' &= x, & t &\neq \frac{i}{2}, x \in \mathbb{R} \\ \Delta x|_{t=\frac{i}{2}} &= \frac{1}{10}x \end{aligned} \quad (9)$$

olarak yazılır.

(9) sisteminin $[0, \frac{3}{2}]$ aralığında nümerik simülasyonu MATLAB programı ile Şekil 2'deki gibi elde edilmiştir.

Şekil 2'de çözümlerin $x = 0$ denge noktasından uzaklaştığı görülmektedir. O halde Teorem 3.3'e göre (9) sisteminin $x = 0$ denge noktası kararsızdır. Bu sonucu analitik çözüm ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 2: (9) sisteminin çözüm grafiği.

(9) sisteminin $t \neq \frac{i}{2}$ iken çözümü $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x(t) = ce^t$ olarak bulunur. $x(0) = 1$ ise $x(t) = e^t$ olur. $t \in [0, \frac{1}{2}]$ aralığında çözüm $x(t) = e^t$ fonksiyonu boyunca devam eder. Buradan $x(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}$ olarak bulunur. Genel olarak $\Delta x \Big|_{t=\frac{i}{2}} = x(\frac{i}{2}+) - x(\frac{i}{2}) =$

$\frac{1}{10}x(\frac{i}{2})$, $x(\frac{i}{2}+) = \frac{11}{10}x(\frac{i}{2})$ şeklinde bulunur. Buradan $x(\frac{1}{2}+) = \frac{11}{10}x(\frac{1}{2}) = \frac{11}{10}e^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ aralığında çözüm $x(t) = \frac{11}{10}e^{\frac{1}{2}}e^t = \frac{11}{10}e^{t+\frac{1}{2}}$ şeklinde devam eder. Böylece $x(1) = \frac{11}{10}e^{\frac{3}{2}}$, $x(1+) = \frac{11}{10}x(1) = \frac{121}{100}e^{\frac{3}{2}}$ bulunur. $t \in (1, \frac{3}{2}]$ için çözüm $x(t) = \frac{121}{100}e^{t+\frac{3}{2}}$ şeklindedir. Çözümleri

$$x(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ \frac{11}{10}e^{t+\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{121}{100}e^{t+\frac{3}{2}}, & 1 < t \leq \frac{3}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalı fonksiyon halinde yazabiliriz. Buradan çözümlerin t artarken $x = 0$ denge noktasından uzaklaştığı görülmektedir. O halde (2) sistemindeki sabit katsayıları, Teorem 3.3'ün koşullarını sağlayacak şekilde seçerek oluşturduğumuz (9) sisteminin $x = 0$ denge noktası kararsızdır.

Teşekkür

Bu çalışma Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 3829-YL1-13 nolu yüksek lisans tez projesi kapsamında desteklenmiştir.

Kaynaklar

- [1] Akhmet, M. U., On the general problem of stability for impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 288, 182–196, 2003.
- [2] Akhmet M.U., *Principles of Discontinuous Dynamical Dystems*, Springer, New-York, 2010.
- [3] Akhmet, M. U., Aruğaslan, D., Beklioğlu, M., *Impulsive control of the population dynamics, Differential and Difference Equations and Applications*, Hindawi Publ. Corp., New York, 21-29, 2006.
- [4] Aruğaslan Çiğin, D., *İmpulsif Diferansiyel Denklemlere Giriş*, Palme Yayıncılık, 2015.
- [5] Bainov, D. D., Simeonov, P. S., *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*, World Scientific, 1995.
- [6] Lakshmikantham, V., Bainov, D. D., Simeonov, P. S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [7] Liu, X., *Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models*, *Dynam. Stability Systems*, 9, 163–174, 1994.
- [8] Liu, X., Rohlf, K., *Impulsive control of a Lotka-Volterra system*, *IMA J. Math. Control Inform.*, 15, 269–284, 1998.
- [9] Pavlidis, T., *Stability of a class of discontinuous dynamical systems*, *Information and Control*, 9, 298–322, 1966.
- [10] Pavlidis, T., Jury, E. I., *Analysis of a new class of pulse-frequency modulated feedback systems*, *IEEE Trans. Automat. Control*, 10, 35–43, 1965.
- [11] Pavlidis, T., *A new model for simple neural nets and its application in the design of a neural oscillator*, *Bull. Math. Biophys.*, 27, 215–229, 1965.
- [12] Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A., *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, 1995.