



www.ziraat.selcuk.edu.tr/dergi

Selçuk Üniversitesi  
Ziraat Fakültesi Dergisi 22 (44): (2008) 78-83  
ISSN:1300-5774



## LEVENE VE BARTLETT TESTLERİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Coşkun KUŞ<sup>1</sup>

İsmail KESKİN<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Selçuk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Konya/Türkiye

<sup>2</sup> Selçuk Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Zootekni Bölümü, Konya/Türkiye

(Geliş Tarihi: 14.12.2007, Kabul Tarihi: 29.01.2008)

### ÖZET

Bu çalışmada, varyansların homojenliğinin sınanması için Bartlett ve Levene testlerinin kullanımında ortaya çıkabilecek problemler incelenmiştir. MINITAB 14 ve SPSS 13 yazılımlarının Levene testinin performansındaki farklılıklar tartışılmıştır. Ek olarak bu yazılımların varyansların homojenliğini test etmedeki zayıf noktalarına işaret edilmiş ve aynı zamanda çözüm yolları önerilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bartlett Testi, Homojenlik Testi, Levene Testi, Monte Carlo Simülasyon

### A STUDY ON LEVENE AND BARTLETT TESTS

#### ABSTRACT

In this study, the problems which may arise from using Bartlett and Levene tests for the control of variances homogeneity are investigated. The differences in the performance of MINITAB 14 and SPSS 13 software in the Levene test are discussed. In addition, the shortcomings of these software are pointed out in terms of the testing homogeneity of variances and some solution approaches are also suggested.

**Keywords:** Bartlett Test, Homogeneity Test, Levene Test, Monte Carlo Simulation

### GİRİŞ

Ziraat, veteriner, tıp vb. birçok uygulamalı alanda yapılan bilimsel deneyler sonucunda elde edilen verilere (örneklem değerlerine) istatistiksel analizler uygulanmaktadır. Bazı analizlerin (testlerin) teorisi grupların homojen olması varsayımı üzerine kurulmuştur. Bu nedenle varyans homojenlik testlerinin istatistiksel sonuç çıkarımında önemli bir yeri vardır.

Levene ve Bartlett testleri, k adet örneklemin, alındığı kitlelerin varyanslarının eşit olup olmadığını test etmektedir. Bartlett testinin varsayımları, örneklemelerin (grupların) bağımsız ve örneklem alınan kitlelerin normal dağılıma sahip olmalarıdır ve bunlar güçlü varsayımlardır. Levene testinin varsayımları da örneklemelerin bağımsız ve örneklem alınan kitlelerin sürekli dağılıma sahip olmalarıdır ve sürekli dağılıma sahip olma varsayımı Bartlett testinin varsayımındaki normal dağılıma sahip olma varsayımından çok daha zayıf bir varsayımdır. Bartlett testinde normal dağılım varsayımı olması, problemi normal dağılıma sahip kitlelerin varyanslarının eşitliği problemine dönüştürdüğünden Bartlett testi parametrik testler sınıfına dahildir. Levene testi için herhangi bir özel dağılım varsayımı olmadığından ve sürekli dağılımlar ailesi için teorisi geliştirildiğinden parametrik olmayan bir testtir. Ancak ilerleyen bölümlerde levene testinin test istatistiğinin asimptotik dağılımının sürekli dağılımlar ailesi için dağılımdan bağımsız olmadığı gözlenecektir. Varyansların eşitliği testi, literatürde varyansların homojenlik testi olarak da anılmaktadır. Homojenlik

testleri, teorisinde homojenlik varsayımı gerektiren istatistiksel testlerin (varyans analizi, t testi gibi) kullanılabilirliği için varsayım kontrolörü olarak kullanılmaktadır. İki örneklem t-test istatistiğinin dağılımı normal teori altında varyansların eşit olup olmaması durumuna göre farklı serbestlik dereceli t dağılımına sahip olduğundan iki örneklem t-testinde varyansların homojenliği hakkındaki bilgi, serbestlik derecesinin seçiminde önemli bir rol oynamaktadır.

SPSS 13 yazılımının iki örneklem t-testi arayüzünde homojenlik testi seçeneği olmamasına rağmen çıktıda Levene test istatistiğinin aldığı değer ve ilgili p değeri verilmektedir. Yine SPSS 13 yazılımının varyans analizi arayüzünün seçenekler kısmında homojenlik testi adı altında Levene testi sunulmuştur. Bartlett testi SPSS 13 yazılımında yer almamaktadır. Burada neden Bartlett testinin kullanılmadığı sorusu akla gelebilir. İlerleyen bölümlerde bu konu tartışılacaktır. MINITAB 14 yazılımında ise varyansların eşitliği adı altında bir arayüz sunulmuş, çıktı olarak da Bartlett ve Levene test istatistiklerinin aldığı değerler ve ilgili p değerleri beraber verilmiştir. Ayrıca MINITAB 14, örneklem (grup) sayısı iki olduğunda Bartlett testinin yerine F testini icra etmektedir. Şunu belirtmek gerekir ki F testi, Bartlett testinin k = 2 için özel bir halidir. Burada k grup sayısıdır. İlginçtir ki k = 2 durumunda Bartlett ve F test istatistiklerinin değerleri farklı olsa da ilgili p değerleri aynıdır. MINITAB 14 bünyesinde çalışan istatistikçilerin bu durumun farkında olmamasından kaynaklanış olabilir ki, MINITAB 14 genel olarak Bartlett

<sup>3</sup>Sorumlu Yazar: [ikeskin@selcuk.edu.tr](mailto:ikeskin@selcuk.edu.tr)

testini kullanmaktan kaçınıp,  $k = 2$  durumunda F testini kullanmaktadır.

Levene testi ve Bartlett testlerinde birinci tip hata ve testin gücünü belirlemeye yönelik birçok ampirik çalışma yapılmıştır (Islam, 2006; Vorapongsathorn ve ark., 2004). Bu çalışmada, Levene testinin, varyansların eşitliği varsayımında kullanımında ortaya çıkacak sorunlar, MINITAB 14 ve SPSS 13'de kullanılan Levene test istatistiklerinin aldığı değerler ve ilgili p değerlerinin farklı olmasının sebepleri, normallik ve homojenlik varsayımı gerektiren testler için önceden yapılan homojenlik varsayımının teyidi için normal teori altında gücü daha iyi olan Bartlett testi yerine Levene testinin kullanımının doğru olup olmayacağı tartışılmıştır. Levene ve Bartlett testlerinin bazı durumlar için asimptotik dağılımlarına yakınsama hızı ve güçleri Monte Carlo yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

### HOMOJENLİK TESTLERİ

$X_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , i. örneklemin (grupun) j. elemanı olsun. Burada k örnekleme (grup) vardır ve i. örneklemin hacmi  $n_i$  dir.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 \quad (1)$$

hipotezini

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \text{ en az bir } (i, j) \quad (2)$$

hipotezine karşı  $\alpha$  anlam seviyesinde test eden testlere Homojenlik Testi denir. Yukarıdaki hipotezler

$H_0$  : Gruplar homojendir,

$H_1$  : En az iki grup homojen değildir, hipotezlerine denktir.

### BARTLETT TESTİ

$X_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , bağımsız ve normal dağılımdan alınmış  $k$  örnekleme olmak üzere (1) hipotezini, (2) hipotezine karşı test etmek için Bartlett Test İstatistiği,

$$B = M \times C^{-1}$$

biçimindedir (Conover ve ark., 1981; Lim ve Loh, 1996; Ott, 1998; Zar, 1999). Burada  $k$  örnekleme sayısı,

$$C = 1 + \left\{ \sum_{i=1}^k v_i^{-1} - \left( \sum_{i=1}^k v_i \right)^{-1} \right\} \{3(k-1)\}^{-1},$$

$$M = \left( \sum_{i=1}^k v_i \right) \log_e \left\{ \sum_{i=1}^k v_i S_i^2 \left( \sum_{i=1}^k v_i \right)^{-1} \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^k v_i \log_e (S_i^2) \right\},$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, k, \text{ ve } \bar{X}_i, \text{ i.}$$

grupun ortalamasıdır. B istatistiği, asimptotik olarak (büyük örnekleme hacimleri için)  $k-1$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılımına sahiptir (Islam, 2006).

$B$ ,  $(0, \infty)$  aralığında değer alır. Bu değerın sıfıra yakın olması,  $H_0$  hipotezini yani grupların homojen olmasını, sıfırdan uzaklaşması (pozitif) olması ise  $H_1$  hipotezini desteklemektedir. Böylece  $\alpha$  anlam seviyesi kritik küme ( $H_0$  hipotezini ret ettiren örnekleme değerlerinin oluşturduğu küme),

$\left\{ (X_{ij}, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n_i) : B > \chi_{(k-1), (1-\alpha)}^2 \right\}$  şeklindedir. Burada  $\chi_{(k-1), (1-\alpha)}^2$ ,  $k-1$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılımının  $1-\alpha$  'lık kuantilidir. Bartlett testi için p değeri,

$$p \text{ değeri} = P(B > b) = \int_b^{\infty} f_B(b) db$$

şeklinde hesaplanır. Burada  $B$ ,  $k-1$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılımına sahip bir rasgele değişken,  $f_B(b)$ ,  $B$  rasgele değişkeninin (istatistiğinin) olasılık yoğunluk fonksiyonudur. MINITAB 14, Bartlett test istatistiği olarak  $B$  istatistiğini kullanmaktadır.

Bartlett Testin bir modifikasyonu  $B_1 = d \times B$  biçimindedir. Burada  $d = (\hat{\beta}_2 - 1)^{-1}$  ve

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^4}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

şeklinde (Box, 1953, Boos ve Brownie, 1989).  $\hat{\beta}_2$  çarpıklık katsayısının bir tahmin edicisidir. Bir başka modifikasyonda Miller (1986) tarafından  $B_2 = d \times M$  şeklinde verilmiştir. Similasyon çalışmasında, MINITAB 14 yazılımında kullanılması bakımından sadece  $B$  istatistiği ele alınmıştır.

### LEVENE TESTİ

$X_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , bağımsız ve sürekli bir dağılımdan alınmış  $k$  örnekleme olmak üzere (1) hipotezini, (2) hipotezine karşı test etmek için Levene test istatistiği,

$$L = \frac{(n-k) \sum_{i=1}^k n_i (\bar{V}_i - \bar{V}_..)^2}{(k-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (V_{ij} - \bar{V}_i)^2} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  dir,

$$V_{ij} = |X_{ij} - \tilde{X}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (4)$$

veya

$$V_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (5)$$

şeklinde tanımlanabilir.  $\tilde{X}_i$  ve  $\bar{X}_i$ , sırasıyla, i. örnekleme dayalı medyan ve ortalama tahmin edicisidir. Ayrca

$$\bar{V}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}, \quad i=1,2,\dots,k \quad \text{ve} \quad \bar{V}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \bar{V}_i$$

şekindedir. (3)'deki  $V_{ij}$  istatistiğinde % 10 budanmış ortalama (trimmed mean) da kullanılabilir. Levene (1960)  $V_{ij}$  istatistiğinde ortalamayı kullanmış, Brown ve Forsythe (1974) ortalama yerine medyan ve % 10 budanmış ortalamayı da kullanmışlardır. Brown ve Forsythe (1974)'in yaptıkları Monte Carlo çalışması, gruplar (örneklem) Cauchy dağılımından (uzun kuruklu long-tailed) alındığı durumlarda % 10 budanmış örneklem ortalamasının kullanılmasının, örneklem  $\chi^2_{(4)}$  dağılımından (çarpık) alındığı durumlarda, örneklem medianın kullanılmasının, son olarak örneklem simetrik veya orta-kuyruklu (moderate-tailed) dağılımdan alındığı durumlarda örneklem ortalamasının kullanılmasının güç bakımından en iyi performansı verdiğini göstermiştir.  $V_{ij}$  seçiminde, dağılımın simetrik, çarpık, uzun kuyruklu (long-tailed) olmasının önemli olduğunu gözlemişlerdir. Burada optimal seçim, örneklem alınacağı dağılıma bağlı olmasına rağmen örneklem medianının kullanılması, normal dağılımdan farklılaşmaya karşı berk (sağlam, robust) olması bakımından tavsiye edilmektedir (Brown ve Forsythe, 1974).  $V_{ij}$  istatistiği için daha farklı seçeneklerde (Islam, 2006) olmasına rağmen MINITAB 14 ve SPSS 13 yazılımlarında Levene istatistiği için, sırasıyla, (4) ve (5) deki  $V_{ij}$  değerleri kullanıldığından diğer durumlar simülasyon çalışmasında ele alınmıştır.

L istatistiği, asimptotik olarak (büyük örneklem hacimleri için)  $k-1$  ve  $n-k$  parametrelili F dağılımına sahiptir (Islam, 2006).

L,  $(0, \infty)$  aralığında değer alır. Bu oranın sifıra yakın olması,  $H_0$  hipotezini, sifirdan uzaklaşması (pozitif) alması ise  $H_1$  hipotezini desteklemektedir. Böylece  $\alpha$  anlam seviyeli kritik küme,

$$\{(x_{ij}, i=1,2,\dots,k, j=1,2,\dots,n_i) : L > F_{(k-1, n-k), (1-\alpha)}\}$$

şekindedir. Burada  $F_{(k-1, n-k), (1-\alpha)}$ ,  $k-1$  ve  $n-k$  serbestlik dereceli F dağılımının  $1-\alpha$  'lık kuantilidir. Levene testi için p değeri,

$$p \text{ değeri} = P(L > 1) = \int_1^{\infty} g_L(t) dt$$

şeklinde hesaplanır. Burada L,  $k-1$  ve  $n-k$  serbestlik dereceli F dağılımına sahip bir rasgele değişken,  $g_L(t)$ , L rasgele değişkeninin (istatistiğinin) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

MINITAB 14, Levene test istatistiğinde (4) de verilen  $V_{ij}$  yi kullanırken, SPSS 13, (5) de verilen  $V_{ij}$  istatistiğini kullanmaktadır. İlerleyen bölümlerde (4) de verilen  $V_{ij}$  yi kullanan Levene istatistiği  $L_1$  ve (5)

de verilen  $V_{ij}$  yi kullanan Levene istatistiğine  $L_2$  şeklinde bahsedilecektir.

MINITAB 14 ve SPSS 13 yazılımlarında Levene istatistiğinin aldığı değer ve ilgili p değerlerini incelemek için standart normal dağılımdan 10'ar hacimlik 3 örneklem (grup) üretilmiş Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1. Standart normal dağılımdan 10'ar hacimlik gruplar

1. grup	2. grup	3. grup
2.8208	-0.5019	0.2502
-0.7106	-0.3345	0.7513
-0.2508	-1.4768	0.0003
-1.4443	1.2081	-0.4622
0.0991	-1.7410	1.0457
0.8776	-0.6191	-0.9124
-0.2672	0.3722	-0.1827
-0.5065	-0.1644	0.2383
-1.0061	0.0418	0.3323
0.7558	-1.0294	0.1725

Tablo 1 deki grupların homojenliğini test etmek amacıyla MINITAB 14 ile yapılan Levene Testi sonucunda  $L_1 = 1.08$  ve p değeri 0.354 olarak, SPSS 13 ile yapılan Levene Testi sonucunda  $L_2 = 1.609$  ve p değeri 0.219 olarak elde edilmiştir. Bu farklılık Levene test istatistiğindeki  $V_{ij}$  seçiminden kaynaklanmaktadır. MINITAB 14,  $V_{ij}$  istatistiği için (4) eşitliğini, SPSS 13 ise (5) eşitliğini kullanmaktadır.

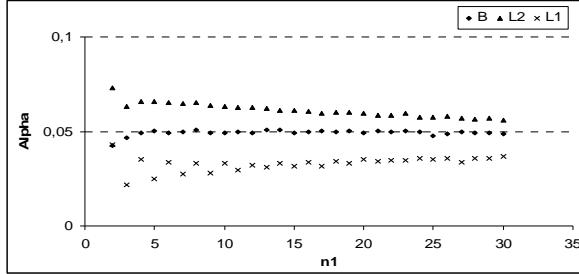
### SİMULASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, standart normal ve üstel teori altında farklı  $n_1, n_2$  ve  $n_3$  değerleri için Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik  $\alpha$  değerleri,  $\alpha = 0.05$  baz alınarak hesaplanmıştır. Birinci tip hata için maksimum değer 0.05 olması gerekirken, standart normal ve üstel teori altında farklı  $n_1, n_2$  ve  $n_3$  değerleri için  $\alpha$  'nın değerindeki değişimler incelenmiştir. Ayrıca Levene ve Bartlett testlerinin bazı durumlar için güçleri Monte Carlo yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

### BARTLETT VE LEVENE TEST İSTATİSTİKLERİNİN ASİMPOTİK DAĞILIMLARININ YAKINSAMA HIZI

Şekil 1 den, Normal teori altında MINITAB 14 ün kullandığı B istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerine dayalı olarak hesaplanan ampirik (100000 deneme)  $\alpha$  değeri, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerine  $n_1 \geq 4$  için çok iyi yaklaşmakta olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca  $L_2$  istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerine dayalı olarak hesaplanan ampirik  $\alpha$  değeri, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerine,  $n_1$  değeri arttıkça çok iyi olmasa

da yukarıdan yaklaşmakta,  
 $n_1 = 30, n_2 = 10, n_3 = 10$  durumunda  $\alpha = 0.05573$   
 olmaktadır.

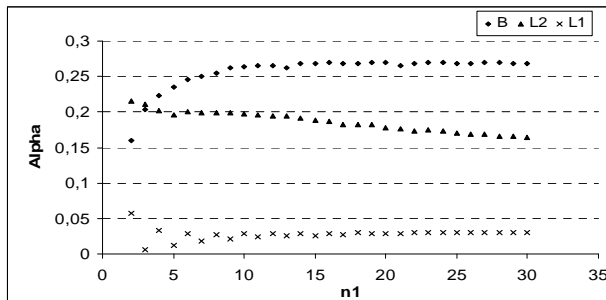


Şekil 1.  $n_2 = 10, n_3 = 10$  ve standart normal teori altında farklı  $n_1$  değerleri için Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik  $\alpha$  değerleri

$L_1$  istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerine dayalı olarak hesaplanan ampirik  $\alpha$  değeri, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerine,  $n_1$  değeri arttıkça aşağıdan  $L_2$  'ninkine oranla daha yavaş yaklaşmakta,  $n_1 = 30, n_2 = 10, n_3 = 10$  durumunda  $\alpha = 0.03687$  olmaktadır.

Örneğin,  $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 10$  ve  $\alpha = 0.05$  için B,  $L_1$  ve  $L_2$  istatistiklerinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerlerine dayalı yapılan Monte Carlo Simülasyon sonuçlarına dayanarak, gerçekte B testi için  $\alpha = 0.04948$ ,  $L_2$  testi için  $\alpha = 0.06319$  ve son olarak  $L_1$  testi için  $\alpha = 0.0332$  için yapılmaktadır.  $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 10$  hacimli grupları olan ve bu gruplardaki örneklemelerin alındığı kitlelerin varyanslarının homojenliğini test etmek isteyen bir araştırmacı, baz aldığı  $\alpha$ 'sının 0.05 olduğunu zannetmektedir. Halbuki bu değer SPSS 13 kullanıcıları için yaklaşık olarak  $\alpha = 0.06319$ , MINITAB 14 kullanıcıları için  $\alpha = 0.0332$ 'dir.

Şekil 2 den, Üstel teori (sağa çarpık dağılım) altında MINITAB 14'ün kullandığı B istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerine dayalı olarak elde edilen ampirik (100000 deneme)  $\alpha$  değeri, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerinden bütün  $n_1$  değerleri için çok uzak olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 2.  $n_2 = 10, n_3 = 10$  ve standart üstel teori altında farklı  $n_1$  değerleri için Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik  $\alpha$  değerleri

Ayrıca,  $L_2$  istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerine dayalı olarak hesaplanan ampirik  $\alpha$  değerinin, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerine yaklaşımının, ele alınan tüm örnek hacimlerinde çok kötü olduğu göze çarpmaktadır.  $L_1$  istatistiği, bu durum için kullanılacak en iyi test istatistiğidir.  $L_1$  istatistiğinin asimptotik dağılımından bulunan tablo değerine dayalı olarak elde edilen ampirik  $\alpha$  değeri, baz alınan  $\alpha = 0.05$  değerine  $n_1 \geq 4$  için iyi yaklaşmakta olduğu anlaşılmaktadır.

Örneğin,  $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 10$  ve  $\alpha = 0.05$  için B,  $L_1$  ve  $L_2$  istatistiklerinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değerlerine dayalı yapılan Monte Carlo Simülasyon sonuçlarına dayanarak, gerçekte B testi için  $\alpha = 0.32702$ ,  $L_2$  testi için  $\alpha = 0.19575$  son olarak  $L_1$  testi için  $\alpha = 0.04792$  için yapılmaktadır.  $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 10$  hacimli grupları olan ve bu gruplardaki örneklemelerin alındığı kitlelerin varyanslarının homojenliğini test etmek isteyen bir araştırmacı, baz aldığı  $\alpha$ 'sının 0.05 olduğunu zannetmektedir. Halbuki Levene testi için bu değer SPSS 13 kullanıcıları için yaklaşık olarak  $\alpha = 0.19575$ , MINITAB 14 kullanıcıları için  $\alpha = 0.04792$ 'dir. Burada SPSS 13 yazılımının kullandığı istatistiğin bazı durumlarda ne derecede yanlış kararlara yol açacağı gözler önüne serilmiştir. Ayrıca Şekil 2'den normallik şartı bozulduğunda Bartlett testi için p değeri hesaplariken asimptotik dağılımının ( $k-1$  serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımı) kullanılmaması gerektiği de anlaşılmaktadır.

Yapılan simülasyon çalışması sonucunda, SPSS yazılımının Levene istatistiğini hesaplama ara yüzünde  $L_1$  istatistiği opsiyonu koyması, MINITAB yazılımının Levene istatistiğini hesaplama ara yüzünde  $L_2$  istatistiği opsiyonu koyması gerektiği anlaşılmıştır. Ayrıca çarpık dağılım teorisi altında Bartlett istatistiğinin asimptotik dağılımı  $k-1$  serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımına yakınsamadığı teyit edilmiş, bu durumlarda kullanılmasının son derece sakıncalı olduğu gözlenmiştir. Son olarak normal teori altında Bartlett istatistiği B'nin asimptotik dağılımı, küçük örnek hacimli durumlarda bile çok iyi çalıştığı,  $L_1$  ve  $L_2$  istatistiklerinin küçük örnek hacimlerinde asimptotik dağılımlarına yakınsaması, Bartlett istatistiğinde olduğu gibi çok iyi olmadığı saptanmıştır.

### BARTLETT VE LEVENE TESTLERİNİN GÜÇLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, sağlıklı bir güç karşılaştırması için B,  $L_1$  ve  $L_2$  testleri için belirlenen  $n_1 = n_2 = n_3 = 5$  ve

$\alpha = 0.05$  değeri için tablo değerleri asimptotik dağılımdan elde edilen değil de Monte Carlo Simülasyon (100000 deneme) yöntemiyle elde edilen tablo değerleri kullanılmıştır. Tablo değerleri Tablo 2’de verilmiştir. Bölüm 3.1’de asimptotik dağılımların iyi çalışmadığı durumlarda asimptotik dağılımdan elde edilen tablo değerinin belirlenen  $\alpha$  değeriyle uyuşmadığı tespit edilmiştir. Bu durum çalışmayı, Bartlett ve Levene testinin gücünü karşılaştıran makalelerden farklı kılmaktadır. Normal teori ve  $n_1 = n_2 = n_3 = 5$  durumunda B istatistiğinin asimptotik dağılımından elde edilen tablo değeri ile Monte Carlo Simülasyon yardımıyla elde edilen tablo değeri aynıdır. Ancak diğer istatistikler için aynı şey söylenemez. Bu durum, küçük hacimli örneklem durumlarında  $L_1$  ve  $L_2$  istatistiklerinin normal teori altında asimptotik dağılımlarının kullanışsız olduğunu göstermektedir. Ayrıca Üstel teori altında B,  $L_1$  ve  $L_2$  istatistiklerinin üstel teori altında asimptotik dağılımlarının kullanışsız olduğu da anlaşılmaktadır.

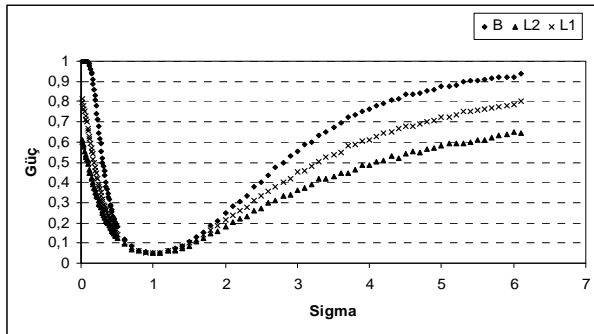
Normal ve üstel teori altında  $n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5$  durumunda Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik güç fonksiyonu 10000 Monte Carlo denemiyle elde edilmiş, Şekil 3 ve Şekil 4’de verilmiştir.

Şekil 3’de Normal teori altında B testinin gücünün,  $L_1$  ve  $L_2$  testlerinin güçlerinden daha büyük olduğu görülmektedir.  $L_2$  testinin de  $L_1$  testinden daha güçlü olduğu sonucu da çıkarılabilir.

**Tablo 2.**  $n_1 = n_2 = n_3 = 5$

$\alpha \approx 0.05$	Normal Teori			Üstel Teori		
	Test	B	$L_1$	$L_2$	B	$L_1$
<b>TD</b>	5.99	4.9	2.05	11.3	8.5	2.52
<b>Asimptotik TD</b>	5.99	3.88	3.88	5.99	3.88	3.88

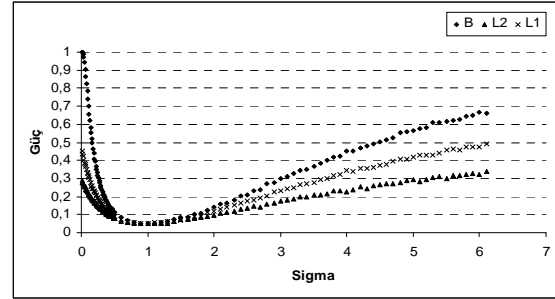
**TD:** Tablo Değeri



**Şekil 3.**  $n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5$  ve normal teori altında Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik güç fonksiyonu

Sonuç olarak normal teori altında MINITAB 14’ün kullandığı B testinin kullanılması elzemdir. SPSS 13 yazılımının homojenlik testi olarak Bartlett testi seçeneğini koymaması büyük eksiklidir.

Şekil 4’de üstel teori altında B testinin gücünün  $L_1$  ve  $L_2$  testlerinin güçlerinden daha büyük olduğu görülmektedir.  $L_1$  testinin de  $L_2$  testinden daha güçlü olduğu sonucu da çıkarılabilir.



**Şekil 4.**  $n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5$  ve üstel teori altında Bartlett ve Levene Testlerinin ampirik güç fonksiyonu

### SONUÇ

Sonuç olarak üstel teori altında B testinin kullanılması elzemdir. Ancak, Şekil 2’de B istatistiğinin asimptotik dağılımı kullanışsız olduğu sonucuna varıldığından tablo değerlerinin (veya p değerlerinin) Monte Carlo Simülasyon yöntemiyle elde edilmesi gerekir. Henüz MINITAB 14 ve SPSS 13 yazılımlarında Bartlett testi için böyle bir uygulama yoktur. SPSS 13 yazılımı bazı testlerde p değerini hesaplarken asimptotik dağılımın yanı sıra Monte Carlo Yöntemi seçeneğini de sunmaktadır. Yukarıda bahsedilen durumların anlaşılmasıyla istatistik yazılımlarındaki homojenlik testi arayüzüne Monte Carlo Simülasyon yöntemi ile p değeri hesaplama seçeneği konulması ümit edilmektedir.

### KAYNAKLAR

- Boos, D. D., Brownie, C., 1989. Bootstrap Methods for Testing Homogeneity of Variances. *Technometrics*, 31(1), 69–82.
- Box, G. E. P., 1953. Non-normality and Tests on Variances. *Biometrika*, 40, 318–335.
- Brown, M. B., Forsythe, A. B., 1974. Robust Tests for the Equality of Variance, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 364-367.
- Conover, W. J., Johnson, M. E., Johnsons, M. M., 1981. A Comparative Study of Tests for Homogeneity of Variances with Applications to the Outer Continental Shelf Bidding Data. *Technometrics*, 23, 351–361.
- Islam, K., 2006. Transformed Tests For Homogeneity of Variances and Means, Doctor of Philosophy, Graduate College of Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio.
- Levene, H., 1960. *Contributions to Probability and Statistics*. Stanford University Press, CA.
- Lim, T. S., Loh, W. Y., 1996. A Comparison of Tests of Equality of Variances. *Computational Statistics and Data Analysis*, 22, 287–301.

- Miller, R. G. Jr., 1986. Beyond ANOVA, Basics of Applied Statistics. Wiley, New York.
- Ott, L., 1998. An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis. Third Edition, PWS-Kent Publishing Company.
- Zar, J. H., 1999. Biostatistical Analysis. New Jersey: Prentice Hall Inc. Simon and Schuster, A Viacom Company.
- Vorapongsathorn, T., Taejaroenkul, S., Viwatwongkasem, C., 2004. A Comparison of Type I Error and Power of Bartlett's Test, Levene's Test and Cochran's Test Under Violation of Assumptions, 26 (4), 537-547..