GEFAD / GUJGEF 35(3): 395-422 (2015)

Öğrencilerin Düzlem Dönüşümlerine Ait Kavramsal Anlamalarının Geliştirdikleri İç Temsiller Kapsamında İncelenmesi*

Investigating Students' Conceptual Understanding about Plane Transformations within the Scope of Internal Representations

Hilal GÜLKILIK[1], Hasan Hüseyin UĞURLU[2], Nejla YÜRÜK[3]

[1]*Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı. ghilal@ gazi.edu.tr*
[2]*Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı. hugurlu@gazi.edu.tr*
[3]*Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Fen Bilgisi Öğretmenliği Anabilim Dalı. nejlayuruk@gazi.edu.tr*

ÖZ

Matematik eğitiminin başlıca amacı, öğrencilere matematiği anlayarak öğrenecekleri ortamlar sunmaktır. Araştırmalar, bu ortamların matematiksel kavramların çoklu temsillerini içerecek şekilde düzenlenmesi gerektiğine işaret etmektedir. Bu çalışmanın amacı, 10. sınıf öğrencilerinin çoklu temsillerle zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarında, düzlem dönüşümlerine yönelik kavramsal anlamalarını geliştirdikleri iç temsiller kapsamında belirlemektir. Bu amaç gereği öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerinin çoklu temsilleriyle çalışan dört 10. sınıf öğrencisiyle, söz konusu dönüşümlere yönelik görev temelli yarı yapılandırılmış birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bulgular, öğrencilerin matematiksel kavramların çoklu temsilleri olan sözel, görsel, cebirsel temsiller ve manipülatiflerle geçirdikleri deneyimlerin kavramsal anlamalarına yön verdiğini göstermektedir. Öğrenciler bu temsilleri kullanarak, kavramlara yönelik uygun iç temsiller geliştirebildikleri ölçüde sağlam bir kavramsal anlama inşa edebilmektedir.

Anahtar Sözcükler: *Kavramsal Anlama, İç-Dış Temsil, Çoklu Temsiller, Dönüşüm.*

---

* Bu araştırma, ilk yazarın, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı'nda tamamlamış olduğu doktora tez çalışmasından üretilmiştir. Çalışma, Gazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir, Proje Numarası: 04/2011-38.

ABSTRACT

The main goal of mathematics education is to provide environments in which students learn mathematics with understanding. Research studies indicate that these environments should be arranged to contain multiple representations of mathematical concepts. This study aims to identify 10th grade students' conceptual understanding about plane transformations in terms of internal representations that they developed in a learning environment enriched with multiple representations. For this purpose, one to one task-based semi-structured interviews were conducted with four 10th grade students who gained experience with multiple representations of translation, rotation, reflection and dilation. The results revealed that students' mathematical understanding developed through the experiences they had with standard external representations of mathematical concepts such as verbal, visual, algebraic representations and manipulatives. Students developed a deeper conceptual understanding of mathematical ideas to the extent that they can build appropriate internal representations of these external representations.

Keywords: *Conceptual Understanding, Internal-External Representation, Multiple Representations, Transformation.*

GİRİŞ

Matematik öğretimi ve öğreniminde 80'li yıllardan beri benimsenen yapılandırmacı yaklaşım, öğrencilerin matematiksel bilgiyi oluşturma süreçlerini inceleme konusunda araştırmacıları teşvik etmeye devam etmektedir. Son yıllardaki eğitim reformlarının dayanağı olan bu yaklaşımın temel felsefesine göre öğrenciler, öğrenme sürecinde çevreleriyle olan etkileşimlerini kendilerine özgü bir şekilde uyarlayarak bilgiyi içsel bir şekilde oluştururlar (Confrey, 1990; von Glasersfeld, 1995). Bu içsel süreci sorgulayarak öğrencilerin kavramsal anlamalarının yapısını inceleyen araştırmacılar, öğrenme ortamlarında matematiksel kavramların farklı temsilleriyle geçirilen deneyimlere dikkat çekmektedir. Örneğin, Hiebert ve Carpenter'a (1992) göre öğrenciler, "matematiksel bir fikri, süreci veya konuyu, içselleştirip zihinsel temsil sistemlerinden oluşan bir ağın parçası haline getirdikleri zaman anlamış demektir" (s. 67). Benzer şekilde Goldin ve Shteingold (2001), öğrencilerin matematiksel bir kavramı, uygun ve birbiriyle bağlantılı zihinsel temsiller geliştirdiği ölçüde anlamlandıracaklarını söyleyerek bu fikri desteklemektedir. Matematiksel kavramların öğrenilmesinde ve problem çözme süreçlerinde kullanılan temsiller, kavramlar arasında ilişki kurmada, matematiksel yaklaşımları ve tartışmaları anlamada ayrıca önemlidir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2010, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Türkçe alan yazında "gösterim" olarak da kullanılan temsil, "herhangi bir şeyi betimleyen, o şeyin yerine geçen işaretlerin, karakterlerin, ikonların ve nesnelerin bir yapılandırmasıdır" (Goldin, 2003, s. 276). Temsiller, iç ve dış temsiller olarak ikiye ayrılmaktadır (Goldin, 2003).

İç-Dış Temsiller

Dış temsiller, matematiksel kavramların, fiziksel olarak şekillenmiş ve gözlemlenebilen standart formlarını içeren temsillerdir (Goldin ve Janvier, 1998; Goldin ve Shteingold, 2001). Örneğin, matematiksel bir kavramın tanımında kullanılan yazılı sözcükler; grafik, resim veya diyagramlar; gerçek dünya durumları; denklemler veya formüller ile manipülatifler[†] söz konusu kavramın dış temsillerine örneklerdir (Goldin, 2003; Lesh, 1981). "Fikirlerin ve kavramların aynı bilgiyi farklı biçimlerde ortaya koyan, somut matematiksel dış temsilleri" olarak karşımıza çıkan bu örnekler, çoklu temsiller başlığı altında toplanmaktadır (Özgün-Koca, 1998, s. 1). Kavramsal anlamanın yapısını çoklu temsillerle ilişkilendiren yaklaşıma göre birey, matematiksel bir kavrama ait farklı temsilleri, bu temsiller arasındaki ilişkileri ve geçişleri ne kadar iyi yapılandırırsa anlaması o kadar güçlü olacaktır (Goldin, 2003; Lesh, 1981; Lesh ve diğerleri, 1983). Bu yüzden, çoklu temsillerin öğrenme ortamlarında kullanılması araştırmacılar tarafından önemle vurgulanmaktadır (örneğin Ainsworth, 2006; Akkuş ve Çakıroğlu, 2006; Even, 1998; Özgün-Koca, 2004; Wood, 2006). Öğrenciler çoklu temsillerle çalışırken, öncelikle, matematiksel bir kavrama ait temsili anlamalı ve bu temsil ile kavramın diğer temsilleri arasındaki ilişkileri kavrayabilmelidir. Goldin (2003), araştırmacıların çoklu temsiller fikri ile dış temsillere yaptıkları vurguya iç temsilleri dâhil ederek, kavramsal anlamanın gelişiminin dış temsiller kadar, iç temsiller

[†] Bu araştırmada, manipülatif "soyut matematiksel fikirleri somut ve açık bir şekilde temsil eden" (Moyer, 2001, s. 176), elle müdahalede bulunularak "hareket ettirilen veya yeniden düzenlenen" (Kennedy, 1986, s.6) nesneler olarak kullanılmıştır.

arasındaki ilişkilere bağlı olduğunu belirtmektedir. Çünkü öğrenciler, matematiksel durumlarda birbirinden farklı bu çoklu temsilleri kullanarak kavramlarla ilgili iç temsiller geliştirmeye çalışırlar (Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983).

İç temsiller, bireyin çevresindeki matematiksel olan veya olmayan davranışları gözlemlemesiyle oluşan, doğrudan gözlemlenemeyen zihinsel yapılarla şekillenmiş temsillerdir (Goldin, 1998; Goldin ve Kaput, 1996). Goldin (2003), bireyin çevresindeki dış temsiller yardımıyla zihinlerinde oluşturdukları iç temsil sistemlerini beş kategoride sınıflandırmaktadır. Bunlardan ilki, bireyin matematiksel olan veya olmayan kelime, cümle bilgisi gibi kendi diliyle ilgili yeterliliklerini kapsayan *sözel/sentetik sistemlerdir.* İkincisi, kavramların anlaşılmasına önemli ölçüde katkı sağlayan, görsel veya uzamsal bilişsel yapıları; jest, mimik veya beden hareketleriyle ortaya konan kinestetik yapıları ve işitsel-ritmik kodlamaları içeren *imgesel sistemlerdir.* Üçüncü kategoride yer alan *formal-notasyonel* sistemler ise, bireyin zihninde, sayılar, aritmetik işlemler veya cebirsel denklemlerle uğraşırken kullandığı sembolik adımları görselleştiren yapılardan oluşmaktadır. Dördüncü kategorideki *planlama, izleme, uygulama ve kontrol sistemleri,* bireyin bir problemi çözerken yönettiği planlama, izleme ve karar verme gibi stratejik süreçlerini içerir. Son olarak beşinci kategoride yer alan *duygusal sistemde,* bireyin matematiğe yönelik tutumları, inançları, değerleri ve duyguları yer almaktadır (Goldin, 2003).

Bu araştırmada, matematiksel kavramların çoklu temsilleriyle zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamında deneyim geçiren öğrencilerin kavramsal anlamaları, kavramlara yönelik oluşturdukları iç temsiller kapsamında belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda, öğrencilerin, dönüşümlere yönelik sözel, grafiksel ve cebirsel temsiller, sanal ve fiziksel manipülatiflerden oluşan çoklu temsilleri kullanarak geliştirdikleri sözel, imgesel ve formal-notasyonel temsilleri analiz edilmiştir. Öğrencilerin iç temsilleri değerlendirilirken -alanda tavsiye edildiği üzere (Goldin, 2003; Janvier, 1987)-, dış temsilleri kendilerine özgü kullanma biçimleri göz önüne alınmıştır. Araştırmanın, ortaöğretim seviyesinde manipülatif kullanımını içerecek şekilde, öğrencilerin çoklu temsillerle uzun süreli etkileşimleriyle oluşturdukları matematiksel anlamalarını nitel bir yaklaşımla belirleyerek alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin, söz konusu etkileşimler sonucu geliştirdikleri iç temsillerinin belirlenmesi, karmaşık bir süreç olan kavramsal anlama sürecini karakterize etmek açısından önemlidir. Zira öğrenciler, matematiksel kavramların dış temsillerini kullanarak, kendilerine özgü bir şekilde zihinlerinde oluşturdukları iç temsiller yardımıyla kavramsal anlamalarını şekillendirmektedir (Behr ve diğerleri, 1983; Hiebert ve Carpenter, 1992; Goldin, 2003; Goldin ve Shteingold, 2001).

Bu bağlamda araştırma, "10. sınıf öğrencilerinin çoklu temsillerle zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarında, düzlem dönüşümleriyle ilgili kavramsal anlamaları, geliştirdikleri iç temsiller bakımından nasıldır?" sorusu etrafında dizayn edilmiştir. Düzlem dönüşümleri (bundan sonra dönüşümler ifadesi kullanılacaktır), öğrencilerin, özellikle uzamsal muhakeme ve görselleştirme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olan bir kavram alanı olarak öne çıkmaktadır (NCTM, 2000). Dönüşümlerin, her seviyedeki öğrenci gruplarına öğretilmesi gerek öğretim programları (MEB, 2013; NCTM, 2000) gerekse araştırmacılar (örneğin Edwards, 2003; Flanagan, 2001; Hollebrands, 2003; Jung, 2002; Yanık, 2006; Soon, 1989) tarafından desteklenmektedir. Ayrıca alan yazın incelendiğinde, her yaştaki öğrenci gruplarının dönüşümlerle ilgili kavramlarla çalışırken zorluk yaşadıkları görülmektedir (örneğin Flanagan, 2001; Hollebrands, 2003; Jung, 2002; Sünker ve Zembat, 2012; Yanık ve Flores, 2009; Yavuzsoy-Köse, 2012). Araştırmada, bu zorluklar da göz önüne alınarak, dönüşümlere yönelik çoklu temsillerle zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamı oluşturulmuş ve öğrencilerin bu ortamda şekillendirdikleri kavramsal anlamaları, geliştirdikleri iç temsilleri yardımıyla detaylı bir şekilde incelenmiştir.

YÖNTEM

Araştırmanın amacı, 10. sınıf öğrencilerinin çoklu temsillerle zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarında, dönüşümlere yönelik kavramsal anlamalarının, geliştirdikleri iç temsiller kapsamında nasıl geliştiğini belirlemektir. Bu yüzden araştırmada nitel metodoloji temel alınmış ve araştırma bir durum çalışması olarak tasarlanmıştır.

Araştırma, Ankara'nın merkez ilçelerinin birinde yer alan bir lisede görev yapan bir matematik öğretmeninin geometri derslerinde yürütülmüştür. On dört yıllık mesleki deneyime sahip olan bu öğretmenle farklı ortamlarda yapılan informal görüşmeler sırasında, matematik derslerinde manipülatif kullanımıyla ilgili olumlu düşünceleri olduğu ve GeoGebra, The Geometer's Sketchpad gibi matematik yazılımlarını kullandığı belirlendiği için, araştırmada kendisiyle çalışılmaya karar verilmiştir. İlk olarak, öğretmenin geometri derslerini yürüttüğü üç farklı 10. sınıf şubesinde altı haftalık pilot çalışmada, ilk yazar (bundan sonra araştırmacı ifadesi kullanılacaktır) tarafından katılımcı gözlemler yapılmış ve araştırmanın yürütüleceği sınıfa karar verilmiştir. On yedi kız ve 15 erkek olmak üzere 32 öğrencinin bulunduğu araştırma sınıfında pilot çalışmaya dört hafta daha devam edilmiş ve üçgenler ünitesindeki kavram ve konular öğrencilere çoklu temsiller kullanılarak tanıtılmıştır. Bu bağlamda dersler, kavramlara ait sözel, grafiksel ve cebirsel temsillere ek olarak sanal ve fiziksel manipülatiflerin kullanımıyla zenginleştirilmiştir. Pilot çalışma boyunca, öğrencilerin sanal manipülatifleri kullanabilmesi için, haftalık iki saat olan geometri derslerinin bir saati öğretmen tarafından bilgisayar laboratuvarında yürütülmüştür. Böylelikle öğretmenin ve öğrencilerin, manipülatiflerin de yer aldığı çoklu temsillerle dizayn edilecek dersler hakkında deneyim kazanması amaçlanmıştır.

Katılımcılar

Araştırmada yürütülecek dersler başlamadan önce öğrencilere, dönüşümlerle ilgili ön bilgilerini belirlemek amacıyla ön test, uzamsal yeteneklerini ölçmek amacıyla Uzamsal Yetenek Testi uygulanmıştır. Ön testin başlangıç kısmında yer alan açık uçlu bir soru ile, öğrencilerden öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerini sözel, görsel ve cebirsel gösterimler kullanarak açıklamaları istenmiştir. Ayrıca test kapsamında öğrencilere bu dönüşümlerle ilgili 26 açık uçlu soru yöneltilmiştir. Bu sorularla ölçülmek istenen, öğrencilerin dönüşümlerle ilgili sözel, cebirsel ve görsel temsilleri anlama, üretme, kullanma ve bu temsiller arasında geçiş yapabilme becerileridir. Hazırlanan test, başka bir sınıfta yer alan 10. sınıf öğrencilerine pilot olarak uygulanmış ve bu uygulamadaki gözlemler dikkate alınarak iki matematik eğitimi alan uzmanının görüşleri doğrultusunda şekillendirilmiştir. Katılımcıları belirlemek amacıyla araştırma sınıfındaki tüm öğrencilere uygulanan Uzamsal Yetenek Testi, Ekstrom, French, Harman ve Dermen (1976) tarafından geliştirilmiş ve Delialioğlu (1996) tarafından Türkçeye çevrilmiştir. Uzamsal yetenek, öğrencilerin geometrik kavramlarla ilgili anlamaları etkileyen önemli bir bileşen olduğundan (Battista, 1990) katılımcıları belirlemek için ayrı bir ölçüt olarak değerlendirilmiştir. Bu uygulamaların değerlendirilmesinden sonra, araştırma sınıfından maksimum çeşitlilik ilkesine (Patton, 2002) göre seçilen ikisi kız ikisi erkek 4 öğrenci (takma isimler; Defne, Elif, Metin ve Selim) katılımcı olarak belirlenmiştir (bkz. Tablo 1).

Tablo 1. Katılımcıların Özellikleri

Katılımcı	Yaş	Uzamsal Yetenek Testi Puanı	Ön Test Puanı	Önceki Seneye Ait Geometri Akademik Başarı Puanı
Defne	17	67,5	28	71,75
Elif	16	150,25	55	78,50
Metin	17	161,50	40	55
Selim	16	48	32	87

Not: Uzamsal yetenek testinden alınabilecek tam puan=282, Ön testten alınabilecek tam puan=100, Geometri akademik başarı puanı tam puanı=100 dür.

Araştırma Süreci ve Verilerin Elde Edilmesi

Araştırma, on haftası pilot çalışma olmak üzere on altı hafta sürmüştür. Dönüşümlerle ilgili derslere başlamadan önce katılımcıların söz konusu dönüşümlere yönelik ön bilgilerini tespit etmek amacıyla, ön test sorularına verdikleri cevapları temel alan ön görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Daha sonra ilerleyen dört hafta boyunca, araştırma öğretmeni sırasıyla öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerine yönelik dersleri yürütmüştür. Katılımcılarla her bir dersten sonra görev temelli yarı yapılandırılmış birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Derslerin planlanması sürecinde dönüşümlere yönelik kazanımlar dikkate alınmış ve kavramlara ait sözel, görsel, cebirsel temsillere ek olarak sanal ve fiziksel manipülatiflere de yer verilmiştir. Derslerin içeriği, matematik eğitimi alan uzmanlarının görüşleri doğrultusunda geliştirilerek hazırlanmıştır. Derslerde kullanılan fiziksel manipülatifler, araştırmacılar ve bir devlet üniversitesinde öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmen adaylarıyla birlikte hazırlanarak uzman görüşleri doğrultusunda şekillendirilmiştir (bkz. Ek). Fiziksel manipülatiflerin hazırlanması sürecinde, manipülatiflerin doğrudan kazanım odaklı olmasına, kazanımlarla ilgili diğer temsillerle ilişkisinin açık olmasına, hareketli olmasına, ucuz ve kolay bulunabilen malzemelerin kullanılmasına, taşınabilir olmasına dikkat edilmiştir. Sanal manipülatifler, Utah State Üniversitesi tarafından http://nlvm.usu.edu web adresinde, 9-12. sınıf öğrencilerinin kullanımı için hazırlanan dönüşümlere ait manipülatiflerdir (bkz. Ek). Dersler, okulun bilgisayar laboratuvarında yürütülmüş ve video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Öğrenciler kavramlara ait farklı temsilleri, kimi zaman öğretmen rehberliğinde belirli etkinlikler içinde, kimi zaman ise kavramı anlamlandırmak için kendi belirledikleri uygulamalar kapsamında kullanmışlardır. Derslerin yürütülmesi sürecinde, genel olarak, kavramlara yönelik görsel ve sözel temsillerle manipülatiflerin kullanılmasına öncelik verilmiş, ardından cebirsel temsiller tanıtılarak kavramlarla ilgili ölçme değerlendirme soruları tartışılmıştır. Araştırmacı bu derslere gözlemci olarak katılmış ve katılımcıların çoklu temsillerle etkileşimlerini gözlemlemiştir. Her hafta derslerin tamamlanmasından sonra, katılımcılarla, o hafta tartışılan dönüşüme yönelik soruların yer aldığı görev temelli birebir görüşmeler (Goldin, 2000) gerçekleştirmiştir. Görüşmelerde öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerine yönelik soruların bulunduğu yarı yapılandırılmış görüşme formları kullanılmıştır. Dönüşümlerle ilgili yapılan araştırmalardan (Jung, 2002; Yanık, 2006) faydalanılarak matematik eğitimi alanında uzman olan iki öğretim üyesinin görüşleri doğrultusunda hazırlanan formlar, o hafta derslerde tartışılan dönüşüme yönelik öğrencilerin kavramsal anlamaları ile problemleri çözebilme yeterliklerini sorgulayan sorulardan oluşmaktadır. Sorular, öğrencilerin farklı temsilleri anlama, üretme, kullanma ve birbirleriyle ilişkilendirme yeterliliklerini belirleyebilmek amacıyla hazırlanmıştır. Bilgisayar laboratuvarında gerçekleştirilen bu görüşmelerde, öğrencilerin derslerde kullanmış oldukları sanal ve fiziksel manipülatifler görüşme ortamında hazır bulundurulmuştur. Kavramların sırasıyla, sözel, grafiksel ve cebirsel temsilleriyle hazırlanan görevlerin ağırlıkta olduğu görüşmeler boyunca katılımcılar, bu manipülatifleri kullanma konusunda serbest bırakılmışlardır.

Derslerin tamamlanmasından sonra, sınıftaki öğrencilere ön test olarak uygulanan test, dönüşümlerle ilgili kavramsal anlamalarının nasıl şekillendiğini belirlemek için son test olarak tekrar uygulanmıştır. Katılımcılarla, son test uygulamasından sonra da bir araya gelinmiş ve bu teste vermiş oldukları cevaplar temel alınarak yarı yapılandırılmış birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Verilerin Analizi

Veriler, katılımcıların ön ve son testlerine verdikleri yazılı cevaplar ile kendileriyle yapılan birebir görüşmeler ve derslerde gerçekleştirilen katılımcı gözlemlere ait video kayıtlarından oluşmaktadır. Veri analizine başlamadan önce çoklu temsiller yaklaşımı temel alınarak bir kodlama protokolü hazırlanmıştır. Hazırlanan protokol matematik eğitimi alan uzmanlarının görüşleri doğrultusunda düzenlenmiştir. Daha sonra, öğrencilerin sırasıyla öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümüne yönelik kavramsal anlamaları çoklu temsiller bağlamında analiz edilmiştir. Katılımcıların, her bir dönüşüme ait sözel, grafiksel ve cebirsel temsillerle oluşturulan sorulara vermiş olduğu cevaplar, bu üç temel temsili anlamlandırmaları, kullanmaları ve birbirleri arasında geçiş yapabilme becerilerine ait kodlarla irdelenmiştir. Örneğin, katılımcılardan birisi dönüşüme ait bir manipülatif kullanarak sahip olduğu sözel temsilleri dile getirdiğinde bu durum, *manipülatifle sözel iç temsil ilişkisi* şeklinde kodlanmıştır. Veriler analiz edilirken Glaser ve Strauss (1967) tarafından geliştirilen sürekli karşılaştırmalı analiz metodu kullanılmıştır. Bu bağlamda görüşmelere ait transkriptler, önce parçalara ayrılarak dikkatlice incelenmiş ve cümleler açık kodlama ile kodlanmıştır. Daha sonra açık kodlamanın bir sonraki aşaması olan eksensel kodlama ile kodlar değerlendirilerek diğer kodlarla ilişkilendirilmiştir. Kodların birbirleriyle ilişkilendirilmesinden ilk olarak kategoriler daha sonra temalar şekillendirilmiştir (Glaser ve Strauss, 1967).

Araştırmanın güvenirliği için uzun süreli etkileşim, süreklilik arz eden gözlemler, veri çeşitlemesi ve katılımcı teyidi yöntemleri kullanılmıştır. Araştırmanın transfer edilebilirliğini sağlamak için ise araştırmanın deseni, katılımcıları, veri toplama yöntemleri, veri toplama araçları, verilerin analizine ait detaylı betimlemeler yapılmıştır. Araştırmanın tutarlı ve teyit edilebilir bir araştırma olduğunu söyleyebilmek için meslektaş teyidi alınmış, araştırmanın bulguları sunulurken yapılan yorumlar verilerle desteklenmiş, bu veriler ve analize ait dokümanlar muhafaza edilmiştir.

BULGULAR ve TARTIŞMA

Verilerin analizi, öğrencilerin, söz konusu dönüşüme ait sözel, grafiksel, cebirsel temsiller ile sanal ve fiziksel manipülatiflerle geçirdikleri deneyimler yardımıyla oluşturdukları temsillerinin etrafında şekillenmektedir.

Sözel-Sentetik Temsillerin Anlamadaki Rolü

Öğrencilerin kavramsal anlamaları, geliştirdikleri temsiller kapsamında incelendiğinde, ilk olarak sözel temsillerle ilgili deneyimleri dikkat çekmektedir. Matematiksel kavramların standart sözel temsillerine uygun iç temsiller oluşturarak bunları etkili bir şekilde kullanmanın önemini ortaya koyan en önemli bulgu, kavramların matematiksel tanımlarında geçen ifadelerle ilgilidir. Dönüşüm, düzlemin noktalarını düzlemin noktalarına eşleyen birebir ve örten fonksiyon olarak tanımlandığından (MEB, 2010), öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümleri, düzlemden düzleme tanımlanan özel fonksiyonlardır. Ne var ki, öğrencilerin tanımları açıklarken kullanılan *düzlemden yine düzlemin kendisine*, *düzlemdeki noktaların tümü* ve *birebir eşleme* ifadelerini anlamlandırmaları pek kolay olmamaktadır. Başka bir deyişle, kavramsal anlamalarını şekillendirirken bu sözel dış temsillere yönelik uygun iç temsiller geliştirmekte zorluk çekmektedirler. Örneğin Defne, doğruya göre yansıma dönüşümünün düzlemden yine düzleme tanımlanan bir dönüşüm olduğunu belirtirken, kareli kâğıt üzerine çizdiği yansıma ekseninin sağ ve solunda kalan bölgeleri işaret etmiş ve dönüşümün bir bölgeden diğerine birebir eşlemelerle yapıldığını söylemiştir. Açıklamalarından yansıma dönüşümünün iki düzlem parçası arasında gerçekleştiğini düşündüğü anlaşılan Defne, başka bir görevde çalışırken, dönüşümün üç boyutlu uzayda, birbirine paralel iki düzlem arasında gerçekleştiğini düşündüğünü gösteren sözel temsillerle çalışmıştır. Defne bu fikri, düzlemde verilen bir şeklin bir eksene göre yansımasından ne anladığının sorulduğu soruya cevap verirken kullandığı jestleriyle de desteklemiş ve düşüncelerini "İki elimiz gibi düşünelim mesela, bu bunun (iki elini karşılıklı tutuyor) yansıması, mesela bu şekilde düşünürsek, şu elimiz şu da aynısını getirirsek, birleştirdiğimizde bir bütün gibi düşünebiliriz." şeklinde ifade etmiştir (bkz. Şekil 1).

Şekil 1. Defne'nin sözel temsillerini desteklerken kullandığı jestler

İlerleyen görüşmelerde Defne'ye birebir eşlemeden ne kastettiği sorulduğunda ise "Hani perspektif çizimde de (homotetiyi kastediyor) oluyordu, hani direkt kendisini veriyordu şeklin (1 oranlı homoteti dönüşümünü kastediyor). O şekilde düşünebiliriz, bire bir fonksiyondur." şeklinde cevap vermiştir. Defne'nin kavrama yönelik sözel temsillerine bakıldığında, birebir eşlemeyi şekillerin özelliklerini birebir koruyan bir işlev olarak anlamlandırdığı anlaşılmaktadır. Benzer şekilde Selim, öteleme, dönme ve yansıma dönüşümleriyle ilgili açıklamalarında birebir ve örten fonksiyon ifadesini kullanmış, fakat homoteti dönüşümünü açıklarken bu ifadeyi kullanmamıştır. Kendisinin bu dört dönüşüme yönelik yapmış olduğu açıklamalar şu şekildedir:

> $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (düzlemdeki) bir noktanın veya geometrik şeklin bir vektör boyunca ötelenmesine öteleme denir. Bir noktanın veya geometrik şeklin bir dönme merkezi etrafında α açısı yapacak kadar dairesel hareketine dönme dönüşümü denir. Bir noktanın bir noktaya veya yansıma eksenine göre yansıması altındaki görüntüsünü sağlayan fonksiyona düzlemde yansıma fonksiyonu denir. Bir

> noktanın veya geometrik bir şeklin M homoteti merkezi doğrultusunda k oranında küçültülüp büyütülmesine düzlemde homoteti dönüşümü denir. Öteleme, dönme, yansıma, düzlemde alınan her noktayı gene düzlemdeki bir noktaya eşlediğinden birebir ve örten fonksiyonlardır.

Selim'in sözel temsillerine bakıldığında, dönüşümlerin tanımlarında yer alan ifadeleri doğru bir şekilde kullanmasına rağmen, bu ifadeleri tam olarak anlamlandıramadığı söylenebilir. Zira homoteti dönüşümünü düzlemde tanımlanan birebir ve örten bir fonksiyon olarak tanımlamayan Selim'in, birebir eşleme ifadesinden, şekillerin uzunluk, açı ve açının ölçüsü gibi özelliklerinin aynen korunmasını algıladığı düşünülmektedir. Gerek Defne'nin gerekse Selim'in öteleme, dönme ve yansıma dönüşümlerinde dönüşüm uygulanan şekilleri ve görüntülerini göstererek birebir eşlendiklerini söylemeleri, homoteti dönüşümünde Defne'nin 1 oranlı bir homotetiği kastederek şeklin direkt kendisini veren bir örnek vermesi ve Selim'in birebir eşlemeyi homoteti dönüşümünde hiç kullanmaması bu bulguları desteklemektedir.

Dönüşümlerle ilgili derslerin tamamlanmasından sonra, öğrencilerden düzlemin noktalarını yine düzlemin noktalarına birebir eşleyen bir yansıma dönüşümü örneği vermeleri istendiğinde benzer bir tespitle karşılaşılmıştır. Katılımcılardan sadece Elif, "yansıma dönüşümünde zaten düzlemin bütün noktalarının düzlemin noktalarına birebir eşlendiğini" dile getirmiş, Metin böyle bir dönüşüm olmadığını söylemiş, diğer katılımcılar ise ifadeden bir şey anlayamadıklarını belirtmişlerdir. Kavramların matematiksel tanımlarındaki yer alan bu ifadeleri uygun bir şekilde yapılandıramayan öğrencilerin, bu yüzden dönüşümleri hareket olarak algılayabildikleri fonksiyon olarak algılayamadıkları düşünülmektedir. Bu durum, farklı öğrenim seviyesindeki katılımcılarla düzlem dönüşümlerini çalışan araştırmacılar Flanagan (2001), Hollebrands (2003) ve Yanık'ın (2011) da tespit ettiği gibi, öğrencilerin dönüşümleri hareket olarak anlamaya gösterdikleri eğilimi desteklemektedir.

Diğer yandan, katılımcıların, kavramların günlük hayattaki kullanımlarından etkilendikleri belirlenmiştir. *İtmek, kaydırmak, döndürmek, yansıtmak* ve *birebir olmak* eylemleri dönüşümlerle, *görünüş* ifadesi ise görüntü kavramıyla ilgili öğrencilerin geliştirdikleri sözel temsilleri şekillendirmektedir. Söz gelimi, öğrencilerin dönüşüm uygulanan bir şekil ile görüntüsü arasındaki ilişkileri açıklarken, şeklin görüntüsünden *görünüşünü* anladıkları tespit edilmiştir. Öğrenciler herhangi bir şekle dönüşüm uygulanırken öteleme vektörü, dönme merkezi, yansıma ekseni veya homoteti oranı gibi dönüşümün parametrelerinde yapılan değişikliklerde "şeklin aynı görüneceğini" bu yüzden görüntüde herhangi bir değişiklik olmayacağını düşünmektedir. Elif ile araştırmacı arasında geçen aşağıdaki diyalog bu duruma bir örnek olarak verilebilir:

Araştırmacı: Peki, bu üçgeni 90 derece döndürmüştük, dönme açısını 90 derece değil de 60 derece alsaydık, görüntüsünde herhangi bir farklılık olur muydu?

Elif: Görüntüsü yine değişmezdi, sadece bu mesela buraya (kareli kâğıtta çizdiği koordinat düzleminin ikinci bölgesini işaret ediyor) gelmezdi biraz daha şurada (aynı düzleminin birinci bölgesini işaret ediyor) olabilirdi ama yine eş üçgenler olurdu yükseklikleri ve kenarları aynı.

Araştırmacı: Şekil değişmezdi o yüzden her şey aynı mı olurdu yani?

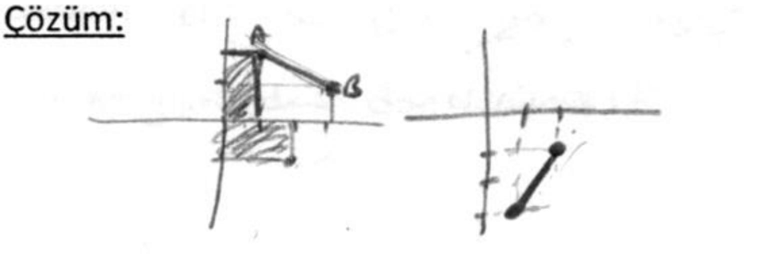
Elif: Evet, sadece konumları farklı olurdu.

Bu bağlamda, öğrencilerin günlük hayatta kullandıkları kavramlarla, öğrenme ortamlarında karşılaştıkları matematiksel kavramların çakışması durumunda karışıklık yaşadıkları düşünülmektedir. Yanık (2011) tarafından da tespit edilen bu durumun, öğrencilerin anlamalarını şekillendiren sözel temsillerin kullanımında ne kadar hassas davranılması gerektiğini vurgulaması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Grafiksel Temsiller ve Uzamsal Yeteneğin Avantajları

Öğrencilerin matematiksel anlamalarının belirlenebilmesi için veri analizinde odaklanılan temsil çeşitlerinden birisi de, düzlem dönüşümlerine ait grafiksel temsillere yönelik geliştirdikleri temsillerdir. Katılımcılardan Elif ve Metin'in kavramlara yönelik grafiksel temsilleri Defne ve Selim'e göre daha hızlı ve etkili bir şekilde kullandıkları tespit edilmiştir. Grafiksel temsiller ve sanal manipülatiflerle çalışırken bir problem yaşamayan bu katılımcılar, ayrıca, matematiksel görevlerle uğraşırken imgesel temsilleri yardımıyla bazı görsel stratejiler kullanmışlardır. Örneğin, Metin kareli kâğıt üzerinde bir üçgeni orijin etrafında döndürürken, kâğıdın kendisini döndürmüş, Elif ise bir $[AB]$ doğru parçasını negatif yönde 90° döndürürken kullandığı stratejiyi şu şekilde açıklamıştır (bkz. Şekil 2):

> Şimdi AB doğru parçasını döndürmek için ilk önce şu A'yı düşündüm (A noktasını belirginleştiriyor) şunu şöyle bir kare yaparsam (köşe noktalarından biri A noktası, diğeri orjin, diğer ikisi ise x ve y eksenleri üzerinde olan dikdörtgeni kastediyor) 90 derece döndürdüğümde (çizdiği dikdörtgeni saat yününde döndürüyor) A şöyle olur. Bunu da (B noktasını kastediyor) aynı şekilde düşünebiliriz.



Şekil 2. Elif'in şekilleri döndürürken uyguladığı strateji

Gerek Elif gerekse Metin'in kullandığı stratejilerin derslerde kendilerine gösterilmediği düşünüldüğünde, söz konusu bulguların öğrenmenin birey tarafından kendiliğinden oluşturulduğuna dair fikirleri desteklediği söylenebilir. Diğer yandan, iki katılımcının da uzamsal yetenek testinden aldıkları yüksek puanlar göz önüne alındığında, uzamsal yeteneğin dönüşümlerle ilgili grafiksel temsillerle çalışırken büyük kolaylık sağladığı düşünülmektedir. Zira Elif ve Metin'in aksine, grafiksel temsillerle çalışırken birçok sorun yaşayan Defne ve Selim'in uzamsal yetenek testinden aldıkları puanlar, sınıf ortalamasının altında kalmaktadır (Uzamsal yetenek testine ait sınıf ortalaması=99,42, Standart Sapma=32,18). Bu bağlamda, uzamsal yetenek açısından avantajlı olan öğrencilerin, düzlem dönüşümlerine ait grafiksel temsiller ve diğer görsel öğelerle çalışırken uygun imgesel temsiller geliştirerek anlamalarını güçlendirebildikleri, dezavantajlı olan öğrencilerin ise bu temsilleri anlamlı bir şekilde kullanabilmek için daha fazla zamana ve deneyime ihtiyaç duydukları düşünülmektedir.

Diğer yandan, Defne ve Selim'in, bir noktanın bir noktaya veya bir doğruya uzaklığını bulmak istediklerinde koordinat düzlemindeki birim uzaklıklar yerine, ortamda bulunan cetveli yahut farklı nesnelerin uzunluklarını kullanma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Bu durum, Elif'in de dikkatini çekmiş ve şu cümlelerle konu hakkındaki gözlemlerini "Bilgisayarda cetvelle ölçüm yapmaya çalışanlar var. Uzunlukları ben gözlerimle takip ettiğimde daha rahat oluyor. Sınıftakiler santime bağlıyorlar işte illa ölçeceksin cetvelle santimlerini falan, ama birim kareler her yerde eşit, onu görseler daha kolay yapabilirler." cümleleriyle dile getirmiştir:

Düzlem Geometrisi Temel Kavramlarına ait İmgesel Temsillerin Önemi

Öğrencilerin kavramsal anlamalarını etkileyen bir diğer faktörün düzlem geometrisine ait temel kavramlarla ilgili görsel temsilleri kullanma yeterlilikleri olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler, dönüşümlerin grafiksel temsillerini anlamlandırabilmek için önceden kavramış olmaları gereken vektör, doğru, uzaklık gibi kavramlara ait farklı görsel temsilleri etkin bir şekilde kullanamamaktadır. Söz gelimi, öğrencilerin hepsi de yansıma dönüşümünde grafiksel temsillerle çalışırken, noktanın noktaya veya noktanın doğruya uzaklığını tam belirleyemedikleri için dönüşüme uygun temsiller geliştirmekte zorlanmışlardır. Örneğin Selim, düzlemdeki bir ABC üçgenini bir doğruya göre yansıtırken üçgenin köşe noktalarının yansıma doğrusuna uzaklığını belirleyememiş ve cetvel istemiştir. Cetveli kullanırken ise noktanın yansıma eksenine dik uzaklığını almadığından sıkıntı yaşamış, üçgenin görüntüsünü ancak simetri aynasını kullanarak bulabilmiştir. Selim yaşadığı benzer bir sıkıntıyı Defne öteleme dönüşümünde vektör ile çalışırken yaşamıştır. Herhangi bir vektörü düzlemde gösterirken zorluk çeken Defne'nin, vektörler ünitesindeki kazanımlarla ilgili imgesel temsillerinin yetersiz kaldığı düşünülmektedir. Fiziksel manipülatif üzerinde çalışırken koordinat düzleminin birinci bölgesinde (1,4) vektörünü çizmeye çalışan Defne ile araştırmacı arasında şöyle bir diyalog gerçekleşmiştir:

Araştırmacı:	… Peki, şimdi senden (1,4) vektörünü çizmeni istiyorum.
Defne:	… Hocam şu şekilde çizerim yani… ((1,0) noktası ile (0,4) noktasından geçen doğru parçasını çiziyor).

Araştırmacı: Anladım, (1,4) vektörünü bu şekilde çizersin? Peki bu vektörden daha kısa bir vektör çizmeni istesem senden?

Defne: …Hocam bir dakika bu şekilde çizmeyiz ki. Çünkü şurasını şey yapması gerekiyor şu şekilde ((0,0) noktası ile (1,4) noktasını birleştiren doğru parçasını çiziyor).

Araştırmacı: Peki. Bu (1,4) vektörü değil mi?

Defne: Vektör çünkü şu şekilde işte (Bu kez vektörün yönünü belirten ok işaretini ekliyor)

Araştırmacı: Şimdi senden (1,4) vektörünün yerini yani konumunu değiştirmeni istiyorum.

Defne: Nasıl yani?

Araştırmacı: Mesela burada (koordinat düzleminin birinci bölgesini işaret ediyor) değil de burada (koordinat düzleminin ikincisini işaret ediyor) çizerek kullanman gerekse bu vektörü?

Defne: ((-1,4) vektörünü çiziyor). Hocam, o zaman eksi yani... (1,4) vektörü burada olduğu için bu (1'i gösteriyor) pozitif x ama burada negatif. (-1,4) olur o zaman vektör.

Defne, vektör kavramına ait yeterli imgesel temsiller geliştiremediğinden, düzlemde bir konum vektörüne denk başka bir vektör çizememekte, böyle bir durumda vektörü temsil eden noktaya karşılık gelen sıralı ikililerin değişeceğini düşünmektedir. Bu durumun bir sonucu olarak, bir diğer görevde çalışırken koordinat düzleminin üçüncü bölgesinde yer alan bir üçgeni (1,4) vektörüyle ötelerken problem yaşamıştır. Bu bağlamda, öğrencilerin dönüşümleri anlamak için gerekli olan önceki kavramalarına ait iç temsillerinin, dönüşümlere ait uygun imgesel temsiller geliştirmelerini etkilediği söylenebilir. Benzer sonuçlar, ilköğretim öğrencilerinden öğretmen adaylarına kadar öğrenci gruplarında yapılan çalışmalarda dile getirilmiştir (Hollebrands, 2003; Sünker ve Zembat, 2012; Yanık, 2006; 2011).

Ortak Sorun: Formal-Notasyonel Temsiller

Dönüşümlerle çalışan öğrencilerin hepsinin de anlamlandırıp kullanmakta sorun yaşadığı temsil çeşidi cebirsel temsillerdir. Düzlem, fonksiyon, parametre, doğru ve vektör kavramlarına ait cebirsel temsillerde yer alan notasyonları anlamlandıramayan öğrenciler bu yüzden dönüşümlere ait cebirsel ifadeleri anlayamamaktadır.

Öğrencilerin, dönüşümlerin sözel temsillerini bile yeteri kadar anlamlandıramadığı düşünüldüğünde, bu temsillerin cebirsel formlarıyla çalışırken problem yaşamaları pek de sürpriz değildir. Örneğin katılımcılar arasında kavramsal anlaması arkadaşlarına nazaran daha üst seviyede olan Elif bile, $\mathbb{R}^2$ notasyonunun reel düzlemi temsil ettiğini anlamlandıracak şekilde uygun temsiller geliştirmek için uzun zaman harcamıştır. Öteleme dönüşümünü çalışırken $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ifadesiyle ilgili düşüncelerini açıklayan Elif ile şu şekilde bir diyalog gerçekleşmiştir:

Araştırmacı:	Şimdi Elif, $T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ifadesinden tam olarak ne anlıyorsun, açıklayabilir misin?
Elif:	Re kareden re kareye gidiyormuş… (2,4) gibi.
Araştırmacı:	(2,4) gibi? Nasıl yani biraz açabilir misin?
Elif:	Ya şey birincisi, x'i yani, r kare olacak, y si de onun karesi bir ifade olacak. Ben aslında… Bu re kareden re kareye biraz karışık bir olay.
Araştırmacı:	Karışık derken? Tam olarak anlayamadın mı?
Elif:	Evet.
Araştırmacı:	Yani burada (2,4) derken, mesela bunu (vektörün x bileşenini gösteriyor) 2 alırsan bu da (vektörün y bileşenini gösteriyor) 4 e gidecek gibi mi düşünüyorsun?
Elif:	Evet. (4,16) da olabilir aynı şekilde.

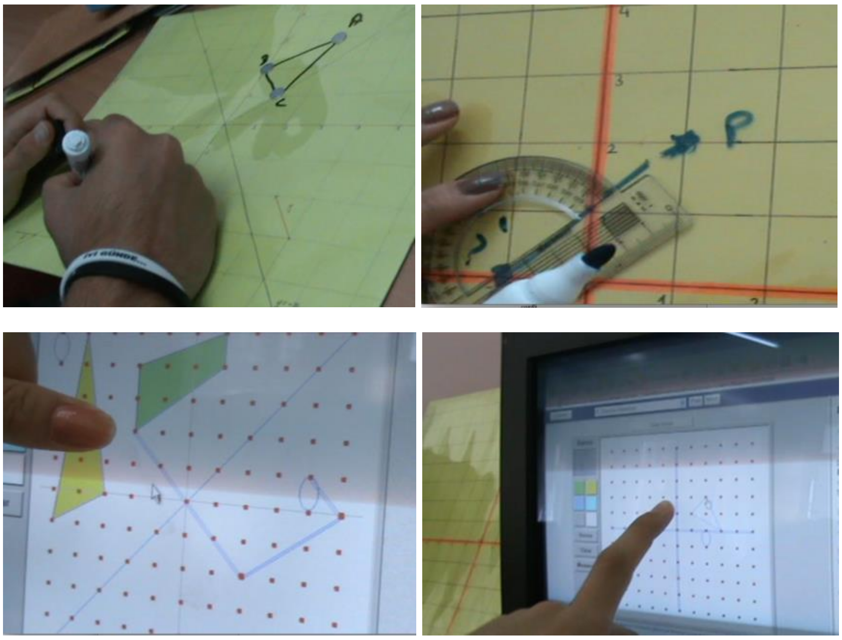
Dersler sırasında, öğretmen de $\mathbb{R}^2$ notasyonuyla çalışırken "re kare" ifadesini kullanmıştır. Notasyonun okunuş biçiminden etkilenerek, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ifadesine ait iç temsillerini sorgulayan Elif, ancak ilerleyen derslerde bu ifadenin dönüşümün tanım ve değer kümesi olan düzlemi temsil ettiğini kavrayabilmiştir. Benzer şekilde, diğer katılımcılar, $T_{\vec{u}}\ (x,y)$ ifadesinde $\vec{u}$'nun parametre olarak öteleme vektörünü, $R_\alpha\ (x,y)$ ifadesinin düzlemde (x,y) noktasının α açısı kadar döndürülmesi sonucu elde edilen görüntüsünü gösteren cebirsel temsiller olduğunu anlamlandırmakta zorluk çekmişlerdir.

Cebirsel temsillerle ilgili deneyimlerden bahsederken, öğrencilerin doğruya göre yansıma dönüşümünde yaşadığı sıkıntıların altını çizmek gerekmektedir. Düzlemde bir P noktası ve bir $l\ (X = A + \lambda\vec{u})$ doğrusu verildiğinde, P noktasının l doğrusuna göre yansıması sonucu oluşan görüntüsü, $S_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $S_l(P) = P' = 2A - P + \frac{2\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ formülü ile verilmektedir. Araştırma öğretmeni, yansıma dönüşümüne ait derslerde cebirsel birçok notasyon içeren bu formülü açıklasa da, görüşmeler sırasında hiç bir katılımcı bu ifadeleri kullanamamıştır. Doğruya göre yansıma dönüşümüyle ilgili görevlerde çalışırken cebirsel temsiller kullanmaları gerektiğinde, düzlemde bir noktanın bir noktaya göre yansıması sonucu elde edilen görüntüsünü veren formülü kullanmaya eğilimli oldukları tespit edilmiştir.

Öğrencilerin, herhangi bir matematiksel kavramı anlamalarının öncelikle kavramın farklı temsillerini anlamlandırıp uygun bir şekilde kullanabilmelerine bağlı olduğu (Goldin, 2003; Lesh ve diğ., 1987; Özgün-Koca, 1998) düşünüldüğünde, doğruya göre yansıma dönüşümüne ait uygun iç temsiller geliştiremedikleri, bu yüzden de matematiksel anlamalarının gelişiminde sıkıntılar yaşadıkları söylenebilir. Öğrencilerin dönüşümlere ait cebirsel temsillerle ilgili anlamalarının incelenmesiyle elde edilen bu sonuçların, önceki araştırmalarda (Flanagan, 2001; Hollebrands, 2003; Yanık, 2006) dönüşümün fonksiyon olarak kavranmasına ait tespit edilen sonuçlara katkı sunduğu düşünülmektedir.

Manipülatif Kullanımı ve Anlamadaki Kalıcılık

Öğrencilerin dönüşümlerle çalışırken özellikle sözel ve grafiksel temsilleri anlamlandırmak veya bu temsillere yönelik geliştirdikleri iç temsillerini açıklamak için manipülatiflerden yardım aldıkları belirlenmiştir. Örneğin, öteleme dönüşümünde vektörün yönünün, büyüklüğünün veya konumunun, dönme dönüşümünde dönme açısının veya yönünün, yansıma dönüşümünde yansıma merkezinin veya ekseninin, homoteti dönüşümünde homoteti oranının veya merkezinin değişmesi durumunda dönüşüm uygulanan şekiller ile görüntüleri arasında ne gibi değişiklikler olacağının sorulduğu sorularda, öğrencilerinin hepsi de fiziksel veya sanal manipülatifleri kullanmışlardır (bkz. Şekil 3)



Şekil 3. Öğrencilerin süreç boyunca manipülatif kullanımını gösteren örnek durumlar

Öğrencilerin araştırma boyunca kullanmış oldukları bu sanal ve fiziksel manipülatiflerin, dönüşümlerle ilgili hareket algılamalarını desteklediği gözlemlenmiştir. Örnek vermek gerekirse, fiziksel manipülatifler üzerinde herhangi bir şekle dönüşüm uygulanırken, düzlemi temsil eden karton veya metal zemin sabit kalmaktadır. Bu yüzden öğrencilerin, düzlemdeki noktaların tamamının dönüşümden etkilendiğini anlamlandıramadıkları düşünülmektedir. Bu durumun önüne geçebilmek için derslerde sanal manipülatiflerde dönüşümün düzlemdeki tüm noktaları etkilediğini gösteren uygulamalar yapılmıştır. Buna ek olarak araştırma öğretmeni sözel temsiller yoluyla dersler boyunca düzlemdeki tüm noktaların dönüşümden etkilendiğini vurgulamıştır. Tüm bu uygulamalara rağmen, öğrencilerin dönüşümleri hareket olarak algılamaya devam ettikleri belirlenmiştir. Katılımcılardan sadece Elif, derslerin sonunda, dönüşümün düzlemden düzleme tanımlanan bir fonksiyon olduğunu ve düzlemdeki tüm noktaları etkilediğini anlamlandırabilmiştir. Bu durum, geometri yazılım programlarıyla çalışan öğrencilerin de dönüşümleri hareket olarak anlamlandırdığını söyleyen Flanagan (2001), Hollebrands (2003) ve Yanık (2006) ile öğretmen adaylarının dönüşümleri fonksiyonlar olarak anlamakta zorluk çektiğini söyleyen Yanık (2011) ile benzer sonuçlar ortaya koymaktadır.

Manipülatiflerin kavramsal anlamadaki rolünü vurgulayan bir diğer önemli bulgu, öğrencilerin kavramsal anlamalarında gerçekleştirdikleri kalıcılığa yöneliktir. Öğrencilerle derslerin tamamlanmasından sonra gerçekleştirilen görüşmelerde, manipülatiflerin kavramlarla ilgili özellikleri hatırlamalarına yardımcı olduğu tespit edilmiştir. Katılımcılardan, sırasıyla Elif ve Selim'in yapmış oldukları şu açıklamalar bu bulguyu desteklemektedir:

> Şu an yansıma, dönme, homoteti, onları hep bilgisayardan hatırladım. Bilgisayarda ve görsellerle ilgili materyaller çok iyiydi bence. Şu an hatırlamamızı sağlıyor. Dersler zamanında aslında pek de gerekli görmüyorduk anlatınca anlıyorduk ama şimdi. Dönüşümlerle ilgili tanımları unutuyorsunuz, ama bunlar aklımızda kalıyor.
>
> Fiziksel manipülatiflerde kavramları görsel olarak görüyoruz. Görsel olarak görmemiz işin mantığını anlamamızı sağlıyor, biz mesela sadece işlem yapıyoruz, cebirsel işlem yapıyoruz. İşte hoca kuralı veriyor geçiyor, ama bu şekilde yani görsel manipülatifler gelince işin içine, kafanda sürekli canlanıyor. Hemen unutmanız mümkün değil konuları.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Öğrencilerin matematiksel kavramların çoklu temsilleriyle geçirdikleri deneyimler kavramsal anlamalarının göstergeleri sayılabilecek iç temsillerinin gelişimini doğrudan etkilemektedir. Bu deneyimler, öğrencilerin, matematiksel kavramlara ait sözel temsilleri anlamlandırmakta bile zorluk yaşayabildiklerini göstermektedir. Bu zorlukların temelinde, *birebir eşleme, düzlemdeki noktaların tümü, düzlemden yine düzlemin kendisine* gibi dönüşümleri anlamak için gereken matematiksel ifadeler yer almaktadır. Ortaöğretim matematik ders programına göre, öğrencilerin bu ifadeleri dönüşümlerle karşılaşmadan çok daha önce kavramış olmaları gerekmektedir. Bu durumda, öğrencilerinin dönüşümlere yönelik uygun iç temsiller geliştirmesini isteyen öğretmenlerin, söz konusu ifadelerle ilgili öğrenci anlamalarını belirlemesi ve varsa, öğrencilerin bu anlamalarında yer alan eksikliklerini gidermesi gerekmektedir. Dönüşümlere ait sözel temsillerin kullanımı söz konusu olduğunda vurgulanması gereken diğer bir sonuç, kavramların günlük hayattaki kullanımlarıyla ilgilidir. Öğrenciler, öteleme, dönme, görüntü gibi kavramlarla ilgili anlamalarını oluştururlarken günlük hayatta yaşadıkları matematiksel olmayan durumlardan etkilenmektedir. Bu bağlamda öğretmenlere, bu kavramların günlük hayattaki kullanımlarıyla matematiksel anlamda kullanımları arasındaki farklılıklara dikkat çekmeleri ve kavramlara ait sözel temsilleri bu durumu göz önüne alarak kullanmaları önerilmektedir.

Dönüşümlerin grafiksel temsilleriyle ilgili sonuçlar, uzamsal yeteneğin öğrencilerin oluşturduğu temsilleri etkilediğini göstermektedir. Uzamsal yetenek açısından avantajlı durumda olmayan öğrencilerin, arkadaşlarına nazaran daha yavaş çalışacakları, farklı temsilleri anlamlandırırken daha fazla zamana ihtiyaç duyacakları dikkate alınmalıdır. Bu noktada öğretmenlere, dönüşümlerle ilgili kavramları tartışmaya başlamadan önce, öğrencilerle, şekilleri döndürme ve yansıtma etkinlikleri üzerinde çalışmaları önerilebilir. Diğer yandan, öğrencilerin dönüşümlerin grafiksel temsilleriyle uygulamalar yaparken bazı zorluklar yaşadığı görülmektedir. Bu zorlukların büyük bir kısmı, öğrencilerin, düzlem geometrisi temel kavramlarının görsel temsillerine ait iç temsillerindeki yetersizliklerden kaynaklanmaktadır. Öncelikle, öğretmenlerin, öğrencilerin ön bilgilerindeki kavramlara ait grafiksel temsillere ait uygun temsillere sahip olup olmadıklarının belirlenmesi yaşanan problemleri azaltabilir. Buna ek olarak, öğretmenlerin, koordinat düzleminde yaptığı uygulamalarda birim uzaklıkları kullanmaları ve öğrencilerini bu yönde teşvik etmeleri gerektiği düşünülmektedir. Örneğin vektör, birim çember, doğru, noktanın doğruya dik uzaklığını temsil eden doğru parçasına ait grafiksel temsillerin görselleştirilmesiyle ilgili eksikliklerin giderilerek dönüşümlere geçilmesi, öğrencilerin anlamalarındaki gelişimi olumlu yönde etkileyecektir. Bu bağlamda öğretmenlere, özellikle görselleştirme becerileri gerektiren matematiksel tanım veya ifadeleri kullanırken öğrencilerin sahip olduğu imajları sorgulaması önerilmektedir.

Sözel ve grafiksel temsillere yönelik problemlerin ardından, öğrencilerin hepsinin de cebirsel temsillere yönelik geliştirdikleri temsillerinden kaynaklanan bazı zorluklar yaşadığı belirlenmiştir. Öğrenciler kavramlara yönelik sözel ve grafiksel temsilleri anlamlandırabilseler bile, cebirsel temsillerin içerdiği matematiksel dil ve notasyon nedeniyle problemler yaşamaktadır. Düzlem, vektör, sıralı ikili ve fonksiyon gibi kavramlara ait cebirsel temsillerin içselleştirilememesinden kaynaklanan bu problemleri çözmek için, öğrencilerin cebirsel temsillerde yer alan notasyonlardan ne anladıklarının belirlenmesi önerilmektedir. Zira dönüşümlerin tanım ve değer kümesi açıklanırken kullanılan $\mathbb{R}^2$ notasyonunun reel düzlemi, $T_{\vec{u}}\,(x, y)$ ifadesinde $\vec{u}$'nun parametre olarak öteleme vektörünü, $R_\alpha\,(x, y)$ ifadesinin düzlemde (x, y) noktasının α açısı kadar döndürülmesi sonucu elde edilen görüntüsünü temsil ettiğini anlamlandıramayan öğrencilerin, dönüşümleri fonksiyon olarak anlamlandırmaları zor görünmektedir.

Diğer bir temsil çeşidi olarak manipülatiflerin öğrencilerin dönüşümlerle ilgili kavramsal anlamalarındaki gelişimi doğrudan etkilediği belirlenmiştir. Bu durum, farklı yaş grubundaki öğrencilerin dönüşümlerle çalışırken manipülatif kullanmaları gerektiğini söyleyen araştırmacıların (Baki, Kösa ve Güven, 2011; Olkun 2003) fikirlerini desteklemektedir. Bu yüzden, öğretmenlere dönüşümlerle ilgili derslerini tasarlarken manipülatifleri de öğretim sürecine katmaları özellikle tavsiye edilmektedir. Diğer yandan, manipülatiflerin dönüşümlerle ilgili hareket algısını desteklediğini hatırlatmakta fayda görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencilerin dönüşümleri fonksiyon olarak anlamlandırabilmeleri için, sözel, grafiksel temsilleri veya manipülatifleri cebirsel temsillerle ilişkilendirilebilecekleri ortamlar sağlanmalıdır.

Araştırmanın öğretime yönelik önerilerine ek olarak, sonraki araştırmalara yönelik bazı öneriler sunulabilir. Bu bağlamda, ilerleyen araştırmalarda, öğrencilerin matematiksel kavramlara ait cebirsel temsillerle yaşanan zorlukların nedenleri ve sonuçları derinlemesine irdelenebilir. Bu araştırmada, öğrencilerin kavramlara yönelik geliştirmiş oldukları iç temsiller, araştırmanın kapsamı gereği sözel, imgesel ve formal-notasyonel iç temsillerle sınırlandırılmıştır. Farkı çalışmalarda, planlama, izleme, uygulama ve kontrol sistemi ile duygusal sisteme ait temsilleri de kapsayacak araştırmalar dizayn edilerek öğrencilerin anlamaları daha farklı açılardan araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Ainsworth, S. (2006). Deft: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Akkuş, O. & Çakıroğlu, E. (2006). Seventh grade students' use of multiple representations in pattern related algebra tasks, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31*, 13-24.

Baki, A., Kösa, T., & Güven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, *42*(2), 291-310. doi: 10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1) 47-60.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press. Retrieved from https://gismodb.fi.ncsu.edu/gismodb/files/articles/e69810947cbdb9a788e72b100bd87b46.pdf

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. *Review of Research in Education*, *16*, 3-56.

Delialioğlu, Ö. (1996). *Contribution of students' logical thinking ability, mathematical skills and spatial ability on achievement in secondary school physics* (Unpublished master's thesis), Middle East Technical University, Turkey.

Edwards, L. (2003). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science.* Paper presented at the Third Congress of the European Society for Research in

Mathematics, Bellaria, Italy. Retrieved from http://fibonacci.dm.unipi.it/cluster-pages/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_edwards_cerme3.pdf

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Flanagan, K. A. (2001). *High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment* (Order No. 3020450). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (250028840). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/250028840?accountid=11054

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory.* Hawthorne, NY: Aldine Publishing Company.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, M.G. Martin, & S. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–286). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour, 17* (1), 1-4.

Goldin, G., & Shteingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Carpenter, Th. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). New York: Macmilan.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 55-72.

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jung, I. (2002). Student representation and understanding of geometric transformations with technology experience (Order No. 0803710). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (305570475). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/305570475?accountid=11054

Kennedy, L. M. (1986). A Rationale. Arithmetic Teacher, 33, 6-7, 32.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 235-264.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press.

Milli Eğitim Bakanlığı (2010). *Ortaöğretim geometri dersi 9-10. sınıflar öğretim programı*, Ankara: MEB-Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). *Ortaöğretim geometri dersi 9-10. sınıflar öğretim programı*, Ankara: MEB-Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Olkun, S. (2003). Comparing computer versus concrete manipulatives in learning 2D geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(1), 43-56.

Ozgun-Koca, S. A. (1998). Students' use of representations in mathematics education. Paper presented at the *Annual Meeting Of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Raleigh, NC. Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED425937.pdf

Özgün-Koca, S. A. (2004). The effects of multiple linked representations on students' learning of linear relationships. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 26*, 82-90.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Soon, Y. (1989). *An investigation of van hiele-like levels of learning in transformation geometry of secondary school students in singapore* (Order No. 8915764). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (303765885). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/303765885?accountid=11054

Sünker, S. ve Zembat, İ. Ö. (2012). Teaching of translations through use of vectors in Wingeom-tr environment. *Elementary Education Online*, *11*(1), 173-194.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* Washington, DC: The Falmer Press.

Wood, K. (2006). *The effect of using multiple representations on student success in solving rational, radical, and absolute value equations and inequalities.* (Unpublished Masters thesis,University of Victoria, British Columbia). Retrieved from file:///C:/Users/eren/Downloads/Wood_K_MA.pdf

Yanik, H. B. (2006). *Prospective elementary teachers' growth in knowledge and understanding of rigid geometric transformations* (Order No. 3210254). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (305354163). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/305354163?accountid=11054

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 231-260.

Yanik, H. B. & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 41-57.

Yavuzsoy-Köse, N. (2012). İlköğretim öğrencilerinin doğruya göre simetri alma bilgileri, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 42*, 274-286.

SUMMARY

The constructivist paradigm that has long been employed in mathematics teaching and learning points out the importance of characterizing how students build their mathematical understanding. For researchers who focus on this importance (e.g., Goldin, 2003; Hiebert & Carpenter, 1992; Lesh, 1981), the mathematical understanding development can be described through experiences with different representations of mathematical concepts.

Representations can be defined as "configurations of signs, characters, icons, or objects that can somehow stand for, or "represent" something else" (Goldin, 2003, p. 276). They are mainly categorized as external and internal representations (Goldin, 2003; Janvier, 1987). External representations are physical, observable and standard configurations of mathematical concepts while internal representations are mental structures shaped by the observation of surrounding mathematical or not mathematical statements (Goldin & Kaput, 1996). Multiple representations are "external mathematical embodiments of ideas and concepts to provide the same information in more than one form" (Özgün-Koca, 1998, p. 1). This study aims to identify 10th grade students' conceptual understanding about plane transformations in terms of internal representations that they developed in a learning environment enriched with multiple representations.

The study was conducted over four months in an Anatolian High School in the central part of Turkey. Prior to the study, a pretest about transformations and a spatial ability test were conducted to 32 students in a 10th grade level classroom. Among these students, four were purposefully selected in accordance with maximum variation sampling method (Patton, 2002). Researchers performed first interviews with these four students according to their responses to these instruments. For the next four weeks, the teacher presented the lessons about translation, rotation, reflection, and dilation. The first author observed the class during these lessons and conducted task based (Goldin, 2002) semi-structured interviews with four participants after the each lessons. The pretest was implemented as posttest after the lessons and participants were again interviewed about their responses and ideas for this test.

A coding protocol based on multiple representations of plane transformations has been prepared before starting the data analysis. Conceptual understanding of participants were analyzed according to this protocol by constant comparative method (Glaser & Strauss, 1967). To ensure the trustworthiness of the study, pilot study, persistent observations and triangulation were used. On the other hand, findings and discussion of the study was supported with raw data and peer review method was used to make the study consistent.

The results of this study showed that students' experiences with multiple representations of mathematical concepts directly influenced their growth of conceptual understanding within the context of internal representations. According to these experiences, they had some difficulties in the process of constructing effective representations while making sense of the external verbal, graphical and algebraic representations. Firstly, students needed to understand mathematical expressions like one to one mapping, all the points on the plane, and a function from plane to plane. It was also seen that students were dealing with some problems while engaging in graphical representations tasks. The main source of these difficulties was the insufficiency of students' prior imagistic representations about basic plane concepts. On the other hand, spatial ability played an important role in shaping students' representations when the experiences with graphical representations of transformations were in question. If students could even make sense of verbal and graphical representations of the concepts, it didn't guarantee a well-developed conceptual understanding. They met some problems with algebraic representations due to the mathematical language and notations contained in these representations. As another kind of multiple representations, manipulatives directly enhanced students' conceptual understanding by supporting the development of appropriate representations about transformations. Based on these results, the details of the learning environment where students learn mathematical concepts with understanding were discussed and relevant suggestions were offered.

EK: Araştırmada kullanılan bazı fiziksel ve sanal manipülatif örnekleri