İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 03 Sayfa 63-72 Aralık 2003

Lineer Modellerde Yarı Uzay DerinliğineDayalıDengeli Bootstrap Güven Bölgeleri

İhsan KARABULUT* Fikri ÖZTÜRK*

ÖZET

Bir lineer modelde parametrelere ilişkin güven bölgelerinin oluşturul- masında son yıllarda uygulaması yaygınlaşmaya başlayan derinlik kavramı kullanılarak dengeli bootstrap güven bölgelerinin nasıl oluşturulabileceği bir uygulama ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Lineer model, bootstrap, dengeli güven bölgesi, yarı uzay derinliği.*

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

lineer modelinde X nxp boyutlu matris olup $rank(X) = p$, $n \geq p$ olması durumunda ve $E(\varepsilon) = 0$, $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ varsayımları altında $\beta \in R^p$ parametre vektörü ile $\sigma^2 \in (0,\infty)$ parametresi için alışılmış tahmin ediciler

$$\hat{\beta}_n = (X'X)^{-1} X'Y$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'\left(I - X(X'X)^{-1}X'\right)Y}{n-p}$$

dır.

$\hat{\beta}_n$ tahmin edicisi Gauss-Markov teoremi ile belirtilen özelliklere sahiptir. $\hat{\sigma}^2$ tahmin edicisi de Y 'nin karesel formu biçiminde olan yansız tahmin ediciler arasında enküçük varyanslıdır(Graybill(1976)). Ancak $\hat{\beta}_n$ ve $\hat{\sigma}^2$'nin dağılımları bilinmediğinde β ve σ^2 parametreleri ile ilgili hipotez testi yapmak ve güven bölgeleri oluşturmak mümkün olmamaktadır. Bu çalışmada β parametre vektörü için $\hat{\beta}_n$ tahmin edicisine bağlı bootstrap güven bölgesi ile derinliklere dayalı güven bölgeleri teorik ayrıntılarına inilmeden kısaca tanıtılıp açıklanmaktadır.

---

* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, 06100 Tandoğan Ankara. e-posta: kbulut@science.ankara.edu.tr

Dağılımdan bağımsız olan bu güven bölgelerinin işlerliğini görmek amacıyla. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ durumunda $1-\alpha$ güven düzeyli

$$P((\hat{\beta}_n - \beta)' X'X (\hat{\beta}_n - \beta) \leq p\hat{\sigma}^2 F_{1-\alpha; p, n-p}) = 1-\alpha \tag{1}$$

güven bölgesi ile karşılaştırılma yapılmaktadır.

Çalışmanın ikinci kısmında bootstrap güven bölgesi, üçüncü kısmında yarı uzay derinliğine dayalı dengeli güven bölgesi kavramları tanıtılmaktadır. Dördüncü kısımda β parametre vektörü için $\hat{\beta}_n$ enküçük kareler tahmin edicisine dayalı $1-\alpha$ düzeyinde bootstrap güven bölgesinin oluşturulmaktadır. Son kısımda iki açıklayıcı değişkenli ve sabit terimi olmayan yapay bir model üzerinde üretilmiş verilerle bir uygulama yapılmaktadır.

2.BOOTSTRAP GÜVEN BÖLGESİ

Parametre vektörleri için güven bölgesi kavramına geçmeden önce bazı hatırlatmalar yapalım. $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere

$$K_{1-\alpha} = \{ z : z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2} \}$$

aralığı için

$$P(Z \in K_{1-\alpha}) = 1-\alpha$$

dır.

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ bir örneklem ve θ bu örneklemin geldiği kitleye ait bilinmeyen bir parametreyi göstersin. $\hat{\theta}_n$, θ için ve $\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}_n}$, $Var(\hat{\theta}_n) = \sigma^2_{\hat{\theta}_n}$ için tahmin ediciler olsunlar. Z standart normal dağılımlı rasgele değişkeni göstermek üzere

$$n^{1/2} (\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}_n})^{-1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $n^{1/2} (\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}_n})^{-1/2} (\hat{\theta}_n - \theta)$ pivotuna dayalı yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli bir güven aralığı

$$\{\hat{\theta}_n - n^{-1/2} (\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}_n})^{-1/2} z : z \in K_{1-\alpha}\}$$

dır.

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ örnekleminden üretilen B tane bootstrap örnekleminden

$$Z_n^b = n^{1/2} (\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}_n^b})^{-1/2} (\hat{\theta}_n^b - \hat{\theta}_n), b = 1, 2.3, \ldots, B$$

gözlenen bootstrap değerleri küçükten büyüğe sıralansın. Baştan ve sondan $\alpha/2$ oranlarında gözlemin dışında kalanların kümesi $W_{n,1-\alpha}$ ile gösterilsin.

$$BGA = \{\hat{\theta}_n - (\hat{\sigma}^2)^{-1/2} w : w \in W_{n,1-\alpha}\} \tag{2}$$

kümesini kapsayan enküçük kapalı aralık, θ için $1-\alpha$ güven düzeyinde dengeli bir bootstrap güven aralığı (BGA) olarak tanımlanabilir. Bir diğer bootstrap güven aralığı Hall(1992)'de anlatıldığı gibi

$$\{\hat{\theta}_n^b : Z_n^b \in K_{1-\alpha}, \quad b=1,2,3,\ldots,B\}$$

kümesini kapsayan en küçük kapalı aralık olarak tanımlanır. Burada bootstrap değerleri için bir sıralama yapılmadığı ve güven aralığının yukarıda tanımı yapılan $K_{1-\alpha}$ aralığında yer alabilenlerin oluşturduğunu belirtelim.

Benzer düşüncelerle p –boyutlu bir θ parametre vektörü için bootstrap güven bölgesinin oluşturulmasında $Z \sim N(0, I_{p\times p})$ olmak üzere

$$K_{1-\alpha} = \{z \in R^p \; z'z \le r_\alpha\}$$

küresi,

$$P(Z \in K_{1-\alpha}) = 1-\alpha$$

olacak şekilde tanımlansın . n birimlik bir örnekleme dayalı bir $\hat{\theta}_n$ tahmin edicisi için

$$\sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$$

olduğunda $\sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta)$ pivotuna dayalı yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli bir güven aralığı

$$\{\hat{\theta}_n - n^{-\frac{1}{2}}\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n}^{\frac{1}{2}} z \colon z \in K_{1-\alpha}\}$$

dır. $\hat{\theta}_n$ ve $\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n}$ tahmin edicilerinin bootstrap karşılıkları $\hat{\theta}_n^b$ ve $\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n^b}^b$, $b=1,2,3,\ldots,B$ olmak üzere

$$Z_n^b = \sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n^b}^{b\;-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n^b - \hat{\theta}_n)$$

değerlerine dayalı

$$\{\hat{\theta}_n^b \colon z_n^b \in K_{1-\alpha}, b=1,2,3,\ldots,B\}$$

güven bölgesi θ parametre vektörü için bir bootstrap güven bölgesidir. Bu güven bölgesi çok değişkenli standart normal dağılımın küresel bir dağılım olması düşüncesi altında, bu dağılımın $1-\alpha$'lık kısmını oluşturan $K_{1-\alpha}$ küresinin içine dönüştürülen $\hat{\theta}_n^b$ bootstrap tahminleri ile oluşturulmuştur.

$\hat{\theta}_n$ parametre vektörü bir boyutlu olduğunda yukarıda anlatıldığı gibi $\hat{\theta}_n^b$ bootstrap tahminleri veya bunların dönüşümleri olan z_n^b değerleri küçükten büyüğe sıralanıp sıra istatistiklerine dayalı olan (2)'deki dengeli bootstrap güven aralığı oluşturulur. Bunu parametrenin vektör olması durumunda yapabilir miyiz? Parametre vektörünün $\hat{\theta}_n^b$ bootstrap tahminleri çok boyutlu Euclide uzayında noktalar olarak ele alınıp , bu noktaların ortalaması(ağırlıklı ortalaması) olan noktaya göre Euclide uzaklıkları hesaplanır ve noktalar bu uzaklıklara göre sıralanırsa, en uzak noktalardan α kadarının atılmasından sonra geriye kalanlar yardımıyla güven bölgesi oluşturulabilir. $\hat{\theta}_n$'nın dağılımı küresel olmadığında böyle bir düşünce pek isabetli olmayabilecektir.

Çok değişkenli dağılımlarda sıra istatistikleri gibi bir kavrama ihtiyaç duyulduğu açıktır. Bu ihtiyaç bir ölçüde derinlik kavramıyla karşılanabilir. Sonraki kısımda bu kavram kısaca tanıtılıp parametre vektörleri için derinliklere dayalı bootstrap güven bölgelerinin oluştulmasında kullanılacaktır.

3.DERİNLİK ÖLÇÜLERİ

$x \in R^d$ verilen bir nokta ve F, d boyutlu X_i rasgele vektörünün R^d de tanımlı dağılım fonksiyonu olmak üzere, derinlik kavramı x noktasının F'nin "merkezine" yakınlığını ölçmenin bir yoludur. Bunun örneklem karşılığı, $x \in R^d$ noktasının $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele örneğine ait gözlem kümesinin(bulutunun) merkezine yakınlığının ölçüsü olarak ifade edilebilir. Tek boyutlu rasgele değişkenlere ilişkin sıra istatistiği tanımında herbir rasgele değişken için küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıralama sözkonusu olabilmekte iken rasgele vektörler için böyle bir sıralama yapılamamaktadır. Rasgele vektörlerde bir sıralama derinlik kavramı ile en derinde(merkezde) yer alan vektörden en dışta yeralan vektörlere doğru yapılabilmektedir. Derinlik ölçmek için değişik ölçüler tanımlanmıştır. Bunlar için diğerlerinin yanında Liu, Parelius ve Singh(1999), Liu(1990), Rousseeuw ve Ruts(1999)'un çalışmaları örnek gösterilebir.

Bu yazımızda derinlik ölçülerinden sadece yarı uzay derinliği(half-space depth, HD) üzerinde durulacaktır. Affin değişmezlik, merkezde en büyük derinlik, en derin noktadan uzaklaştıkça monoton olarak azalan derinlik ve sonsuzda sıfırlanan derinlik özelliklerine sahip olan bu derinlik ölçüsünün diğer özellikleri hakkında bilgi Danoho ve Gasko(1982) ile Zuo ve Serfling(2000)'de bulunabilir.

$x \in R^d$ noktasının F dağılımına göre yarı uzay derinliği

$$HD(F;x) = \inf_H \left\{ P(H) : H, R^d \text{ de } x'\text{i içeren kapalı bir yarı hiperdüzlem} \right\}$$

olarak tanımlanır. Yarı uzay derinliğinin örnek karşılığı

$$H\hat{D}(F;x) = \inf_H \left\{ \frac{n\{X_i ; X_i \in H\}}{n} ; H, R^d \text{ de } x'\text{i içeren kapalı bir yarı hiperdüzlem} \right\}$$

biçimindedir. Burada $n(A)$, A kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

Derinlik ölçülerinde derinlik değerleri [0, 1] aralığındadır. Derinliği en büyük olan noktaya derinlik merkezi ya da kısaca merkez denir. En büyük derinliğe sahip birdençok nokta bulunduğunda bunların ortalaması merkez olarak alınmaktadır. Gözlemlerin örnek derinlik değerleri gözlemleri sıralamak için doğal bir araçtır. Bu sıralamada derinlik değeri en büyük olan gözlem 1. sıraya konulmakta, sıra numarasının büyümesi o gözlemin merkezden dışarıya doğru uzaklaşması anlamındadır. Aynı derinlik değerine sahip birden çok gözlem bulunduğunda tek değişkenli rasgele değişkenlerde olduğu gibi bunlara aynı sıra numarası verilmeyip ayrı sıra numarası verilmektedir; kaç tane gözlem varsa o kadar sıra numarası vardır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin derinliklerine göre sıralanmışı $X_{[1]}, X_{[2]}, \ldots, X_{[n]}$'lere derinlik sıra istatistikleri denir.

Rasgele örneklemin alındığı kitlenin eliptik bir dağılıma sahip olması durumunda dağılıma ait, varsa ortak yoğunluk fonksiyonunun konturları ile derinlik konturları örtüşecektir, Liu, Parelius ve Singh(1999).

Şimdi, ikinci kısımda sözü edilen $Z_n^b, b=1,2,3,\ldots,B$ bootstrap gerçekleşmelerini gözönüne alalım . Bunlar p boyutlu Euclide uzayında birer nokta olarak düşünülsün ve örnek yarı uzay derinliğine göre sıralansın. Büyük derinlikli olanından küçüğüne doğru sıralanan Z_n^b'ler $Z_{n:1}^b, Z_{n:2}^b, Z_{n:3}^b, \ldots, Z_{n:B}^b$ olmak üzere bunlardan en derinde olan $1-\alpha$'lık kısmını oluşturanlar

$$BW_{n,1-\alpha} = \{Z_{n:1}^b, Z_{n:2}^b, Z_{n:3}^b, \ldots, Z_{n:\lceil(1-\alpha)B\rceil}^b\} \tag{3}$$

olsun. Burada,

$$\lceil(1-\alpha)B\rceil = \begin{cases}(1-\alpha)B & ,(1-\alpha)B \text{ tamsayı} \\ [(1-\alpha)B]+1 & ,(1-\alpha)B \text{ tamsayı değil}\end{cases}$$

olup, [.] sayının tam kısmını göstermektedir. $BW_{n,1-\alpha}$ kümesine dayalı olarak oluşturulan

$$BGB(\theta) = \{\hat{\theta}_n - n^{-1/2}\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n}^{1/2} w : w \in BW_{n,1-\alpha}\} \tag{4}$$

kümesini kapsayan en küçük konveks bölge θ parametre vektörü için yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyinde derinliklere dayalı dengeli bir bootstrap güven bölgesi (BGB)olarak tanımlanır. Bu bootstrap güven bölgesi n örneklem hacmine bağlı olarak tam $1-\alpha$ güven bölgesine hemen hemen heryerde yakınsaması Yeh ve Singh(1997) tarafından ıspatlanmıştır.

4. LİNEER MODELLERDE β PARAMETRE VEKTÖRÜ İÇİN DERİNLİKLERE DAYALI BOOTSTRAP GÜVEN BÖLGESİ

$Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_{n\times n})$ olması durumunda β parametre vektörünün ençok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\beta}_n = (X'X)^{-1}X'Y$ için

$$\hat{\beta}_n \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

dır. Ancak hata vektörü ε'nün dağılımı bilinmediğinde β için $1-\alpha$ güven düzeyinde

Yeh ve Singh(1997)'in elde ettikleri doğrulukta (hassasiyette) BGB oluşturmak istenirse ε_i rasgele değişkenlerinin dördüncü dereceden $E\varepsilon_i^4$ beklenen değerinin var olması gerekecektir. Bu saptama Qumsiyeh(1994) Teorem 3.3 ve Hatırlatma 3.4'e dayanarak yapılmıştır.

Bu varsayım yapıldığında $\hat{\beta}_n$, β'nın enküçük kareler tahmin edicisi olmak üzere

$$\sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{d} Z$$

olması için gerekli olan üçüncü dereceden $E\varepsilon_i^3$ beklenen değerinin var olması koşulu da yerine gelmektedir(Lehmann(1999) Teorem 2.7.3, Teorem 2.5.2 ve Teorem 5.4.6).

Bu ve önceki kısımlarda anlatılanları kullanarak β parametre vektörü için $1-\alpha$ güven düzeyinde BGB oluşturmak istensin. Bir bootstrap tahmini elde etmek için bootstrap örnekleminin nasıl elde edildiğini özetleyelim(Efron(1982)):

1. n çaplı rasgele örneklem kullanılarak $Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelindeki β parametre vektörünün $\hat{\beta}_n$ enküçük kareler tahmin edicisini kullanarak artıklar tahmin edilir ve artık terimleri $e_i = y_i - X\hat{\beta}_n$ için örneklem dağılım fonksiyonu F_n oluşturulur.
2. F_n dağılımından n birimlik bir örneklem $e_1^b, e_2^b, e_3^b, ..., e_n^b$ olmak üzere b. bootstrap verisi
$$y_i^b = X\hat{\beta}_n + e_i^b, i = 1,2,3,...,n$$
elde edilir ve enküçük kareler tahmin edicisi ile $\hat{\beta}_n^b$ bootstrap tahmini elde edilir.
3. İkinci adım birbirlerinden bağımsız olarak B defa tekrar edilerek $\hat{\beta}_n^1, \hat{\beta}_n^2, \hat{\beta}_n^3, ..., \hat{\beta}_n^B$ bootstrap örneklemi elde edilir.

Burada ilk adım için Qumsiyeh(1994), örneklem dağılım fonksiyonu F_n'nin e_i kalıntıları yerine $\hat{\mu} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e_i$ olmak üzere $\hat{\varepsilon}_i = e_i - \hat{\mu}$ için oluşturulmasının daha uygun olacağını ileri sürmektedir. Bu durumda F_n dağılım fonksiyonu altında beklenen değer $E_n\hat{\varepsilon}_i = 0$ olacaktır.

Şimdi yarı uzay derinliğine dayalı yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyinde dengeli bootstrap güven bölgesi ifade edilecektir. $\hat{\beta}_n$ enküçük kareler tahmin edicisinin varyans kovaryans matrisinin tahmin edicisi $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n}$ ve bunun bootstrap karşılığı $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n^b}^b$ ile gösterilsin.

$$\sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_n-\beta)\xrightarrow{d} Z$$

olmak üzere,

$$Z_n^b = \sqrt{n}\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n^b}^{b\ -\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_n^b - \hat{\beta}_n), b = 1,2,3,..,B \qquad (5)$$

bootstrap gerçekleşmeleri yarı uzay derinliğine göre büyük derinlikli olanından küçük derinlikli olanına doğru $Z^b_{n:1}, Z^b_{n:2}, Z^b_{n:3}, \ldots Z^b_{n:B}$ olarak sıralansın. Bunların en derinde olan $1-\alpha$'lık kısmını oluşturanlar (3)'deki gibi $BW_{n,1-\alpha}$ kümesi ile gösterilsin. $BW_{n,1-\alpha}$ kümesine dayalı olarak (4)'deki gibi

$$BGB(\beta) = \{\hat{\beta}_n - n^{-\frac{1}{2}} \hat{\Sigma}^{\frac{1}{2}}_{\beta_n} w : w \in BW_{n,1-\alpha}\} \tag{6}$$

kümesini kapsayan en küçük konveks bölge β parametre vektörü için $1-\alpha$ güven düzeyli derinliklere dayalı dengeli bootstrap güven bölgesini oluşturmuş olur.

5. UYGULAMA

Bu kısımda, β parametre vektörü için 4. kısımda ifade edilen derinliklere dayalı dengeli bootstrap güven bölgeleri rasgele üretilmiş veriler kullanılarak örneklenecektir. Veriler 4. kısımda sözü edilen varsayımlar ın sağlanması ve karşılaştırma yapmak için elimizde mevcut bir güven bölgesinin bulunması amacıyla normal dağılımdan üretilmiştir. Örneklem yarı uzay derinlik hesaplamaları Rousseeuw ve Ruts(1996)'un iki boyutlu verilerde simpleks ve yarı uzay derinliklerini hesaplayan Fortran 77 ile yazılmış bilgisayar programı ile yapılmıştır. Uygulamaya konu olan

$$Y_{30\times1} = X_{30\times2}\beta + \varepsilon_{30\times1}$$

sabit terimsiz lineer modelinde, parametre vektörü $\beta' = [2,3]$, $\varepsilon_{30\times1} \sim N(0_{30\times1}, 4I_{30\times30})$ ve $X_{30\times2}$ matrisi

$$X'_{30\times2} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak tasarlanmıştır. Modele uygun rasgele veriler üretildiğinde Y rasgele vektörüne ait 30 gözlem değeri satır sırasıyla aşağıda olduğu gibi kaydedilmiştir:

0.2256	−5.0870	−7.4673	−7.7479	−5.5239	−2.3192	−0.4066	5.1270	5.8994	5.3272
−3.6824	−11.1002	−6.0582	−1.9188	−8.0180	12.8161	11.1646	3.0418	4.0158	−0.6830
2.8261	10.1482	8.9667	15.4556	12.1678	2.8221	4.8991	7.7122	2.1001	−6.5343

Bu verilerle parametre vektörünün enküçük kareler tahmini, $\hat{\beta}'_n = [1.7537, 3.2309]$ ve $\hat{\sigma}^2 = 8.2996$ olup

$$\hat{Y}_i = 1.7537 X_{1i} + 3.2309 X_{2i}, \; i = 1,2,3,\ldots,30$$

elde edilmiş ve artıklar $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ aşağıdaki gibi bulunmuştur:

0.5021	3.4050	4.2556	−1.0096	4.4453	−0.5655	−1.8838	0.4189	−0.5624	2.0963
1.3022	−2.8847	−6.0582	1.3121	−1.5562	1.3697	2.9491	−1.9428	2.2621	0.7942
−0.6813	3.4099	−1.0025	2.2555	3.6758	−3.9162	6.3763	2.7276	2.1001	−1.5497

Kısım 4'te sunulan bootstrap yöntemi kullanılarak (5)'deki gibi elde edilen 200 gerçekleşmesi olan $z_{30}^{1}, z_{30}^{2}, z_{30}^{3}, \ldots, z_{30}^{200}$ değerleri yarı uzay derinliğine göre $z_{30:1}^{b}, z_{30:2}^{b}, z_{30:3}^{b}, \ldots, z_{30:200}^{b}$ olarak sıralanıp

$$BW_{30,0.90} = \{z_{30:1}^{b}, z_{30:2}^{b}, z_{30:3}^{b}, \ldots, z_{30:180}^{b}\}$$

kümesi elde edilir.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1})^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.06996 & -0.02046 \\ -0.02046 & 0.07315 \end{bmatrix}$$

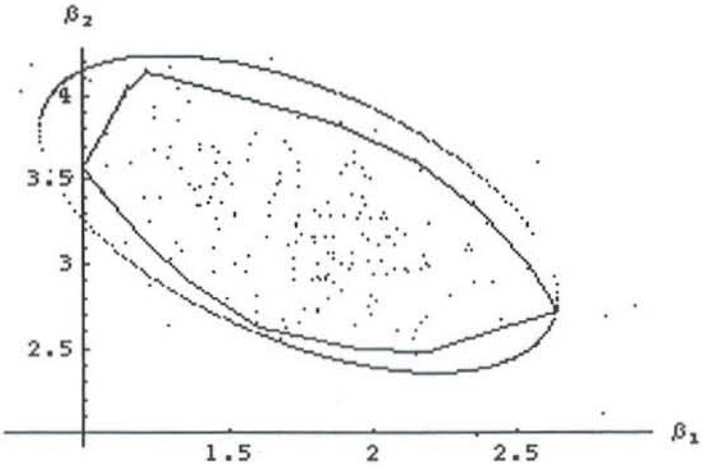
olmak üzere yaklaşık 0.90 güven düzeyli ve yarı uzay derinliğine dayalı bootstrap güven bölgesinin içinde bulunacak elemanlarının kümesi (6)' da olduğu gibi

$$BGB(\beta) = \{\hat{\beta}_n - n^{-\frac{1}{2}}\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}_n}^{\frac{1}{2}}\, w : w \in BW_{30,0.90}\}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu kümenin elemanlarını içeren en küçük konveks bölge bir çokgen olarak **Şekil 1.**'de sunulmuştur.

$BGB(\beta)$ kümesini içeren çokgen tam 0.90 güven düzeyli elips biçimli güven bölgesinin de içinde yer almıştır. Çokgenin dışında kalan 20 bootstrap tahmini 200 bootstrap tahmininin derinliklere göre derinliği en az olanlarıdır.

Elde edilen yaklaşık güven bölgesinin tam 0.90 güven düzeyli bölgenin içinde bir güven bölgesi olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum ayrıca incelenmeli ve genellemede bulunup bulunulamayacağı araştırılmalıdır.



Şekil 1. β için dağılıma bağlı olarak elde edilen 0.90 güven düzeyli güven bölgesi ve yarı uzay derinliğine dayalı $BGB(\beta)$ kümesini içeren enküçük konveks çokgen ile çizilen yaklaşık 0.90 güven düzeyli güven bölgesi.

KAYNAKLAR

DONOHO, L. DAVID and GASKO, M. (1992). Estimates Based on Halfspace Depth and Projected Outlyingness. *Ann. Statist.*, Vol. 20, No. 4, 1803-1827.

EFRON, B. (1982). The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans. SIAM,Philadelphia,PA, U.S.A

GRAYBILL, F. A. (1976). Theory and Application of the Linear Model. Duxbury Press, North Scituate, Mass., U.S.A..

HALL, P. (1992). The Bootstrap and Edgeworth Expansion. Springer-Verlag, New York, U.S.A..

LEHMANN, E. L. (1999). Elements of Large-Sample Theory. Springer-Verlag, New York, U.S.A..

LIU, R. Y. (1990). On a Notion of Data Depth Based on Random Simplicies. *Ann. Statist.,* Vol. 18, No. 1, 405-414.

LIU, REGINA Y., PARELIUS, JESSE M. and SINGH, K. (1999). Multivariate Analysis by Data Depth: Descriptive Statistics, Graphics and Inference. *Ann. Statist.*, Vol. 27, No. 3, 783-858.

QUMSIYEH, MAHER B. (1994). Bootstrapping and Empirical Edgeworth Expansions in Multiple Lineer Regression Models. *Communications in Statistics: Theory and Methods,* 23(11), 3227-3239.

ROUSSEEUW, PETER J. and RUTS, I. (1996). Bivariate Location Depth. *Appl. Statist.* Vol. 45, No.4, 516-526.

ROUSSEEUW, PETER J. and RUTS, I. (1999). The Depth Function of a Population Distribution. *Metrika,* 9, 213-244.

YEH, ARTHUR B. and SINGH, K. (1997). Balanced Confidence Regions Based on Tukey's Depth and the Bootstrap. *J. R. Statist. Soc.* B, Vol. 59, No. 3, 639-652.

ZUO, Y. and SERFLING, R. (2000). Structural Properties and Convergence Results for Contours of Sample Statistical Depth Functions. *Ann. Statist.,* Vol. 28, No. 2, 483-499.

Balanced Bootstrap Confidence Regions in Lineer Models Based on Half Space Depth

ABSTRACT

A balanced bootstrap confidence region has been studied and examplified for a linear model parameters by data depth a notion which have become increasingly used in multivariate data analysis in recent years.

Key Words : *Linear model, bootstrap, balanced confidence region, half space depth.*