Matematik ve Kuantum Fiziği

F. Müge SAKAR

Batman Üniversitesi; İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, 72060, Batman, Türkiye

Ali YILMAZ

Batman Üniversitesi; Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü, 72060, Batman, Türkiye

Özet

Matematik, Fizikte yoğun uygulama alanı olan bir bilim dalıdır. Kuantum fiziği ise, matematiği yoğun kullanan fizik teorilerinden biridir. Bu makalenin amacı, kuantum fiziğinin matematik üzerinden nasıl inşa edildiğini, matematik okuyucusuna takdim etmektir.

Anahtar Kelimeler: Kuantum, matematik, dalga fonksiyonu, baz fonksiyonları, harmonikfonksiyonlar

Abstract

Mathematics is a discipline with intensive applications in Physics. Quantum Physics is one of physical theories usingintensive mathematics as well. The aim of this paper is to present the construction of quantum physics through mathematics to mathematicians.

Key Words: Quantum, Mathematics, wave function, base functions, harmonic functions.

Giriş

Galileo matematiğin doğanın kendi yasalarını belirttiği dil olduğunu söyler. Gerçekten de doğa canlı ve cansız maddeden yapılmıştır. Cansız madde atom altı parçacıklar, atom ve moleküller tarzında organize olurken; canlı madde atom altı parçacıklar, atom, molekül, makro molekül, hücre, organ ve sistem tarzında düzenlenmiştir. Bütün bu düzenlenişin her aşamasında hızlar, kuvvetler, yer değiştirmeler, değişik hareket türleri vs. gibi dinamikler süreçleri yönetir. Söz konusu süreçlerle ilgili temel denklemler tümüyle matematiksel ifadelerle anlatılır. Örneğin evrensel çekim yasası: “iki cisim birbirlerini kütlelerinin çarpımıyla doğru orantılı ve aralarındaki mesafenin karesiyle ters orantılı olarak çeker” tarzında bir ifade ile betimlenir. Bu ifadenin matematik dili $F= G.m_1.m_2/r^2$ tarzındadır[1]. Bu makalenin amacı bu dilin kullanım alanlarından birini matematik okuyucusuna tanıtmaktır.

Matematiğin fizikteki işlevi temel yasaların dili olmaktan çok öte ve çok daha karmaşıktır. Bu makalede bunun ayrıntılarına girmeyeceğiz. Ancak matematiğin fizikteki bazı yoğun kullanım alanlarını belirtmekte yine de yarar vardır. Lagrange ve Hamilton formalizmi, Klasik mekanikte [2,3]; Kısmi diferansiyel denklemler, hidrodinamik, göksel mekanik, sürekli alanlar mekaniği, esneklik teorisi, akustik, termodinamik, elektrik, manyetizma ve aerodinamik alanlarda[4]; lineer cebrin matematiksel alanı, işlemcilerin spektral teorisi, işlemci cebri ve daha genel olarak fonksiyonel analiz, Kuantum fiziği ve atomik ve moleküler fizik alanında[5]; Grup teorisi, Görelilik ve Kuantum Görelilik Teorileri alanında kullanılır. Faz geçişleri teorisi, kombinatorik, matematikselergodik teori ve olasılık teorisinin bazı bölümleri ile istatistik fizik yakından ilişkilidir[6].

Fizik maddeyi ve kâinat yasalarını, ilk paragrafta bir örneği verilen ifadeler üzerinden anlatsaydı; canlı ve cansız maddeyi ve de kâinatı anlamak için vardığımız seviyeye ulaşamazdık. Vardığımız seviyenin matematiğin başarısı olduğunu söylemek abartı olmaz. Diğer yandan sadece fizik teorileri üzerinden matematiği yorumlarsak, Matematiğin Fizik teorilerini inanılmaz bir sanat eseri gibi ördüğünü söyleyebiliriz. Bu söylemi, Kuantum teorisinin matematik üzerinden nasıl oluşturulduğunu anlatarak ifade edeceğiz. Konunun dışında olan okuyucuların kolaylığı için, kuantumu ve onun matematik dilini sade halde sunmaya çalışacağız.

KUANTUM MEKANİĞİNİN DOĞMASI

19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başında Klasik Fizik ile izah edilemeyen birçok problem ortaya çıktı. Siyah cismin enerji soğurması, fotoelektrik olay, Compton olayı ve Hidrojen Atomunun spektrumları açıklanmaya çalışılırken, ışığın enerji paketlerinden ibaret olduğu anlaşıldı. Her bir enerji paketinin değerinin $\hbar w$ ile ifade edilebileceği ortaya kondu.

Atom altı parçacıkların enerjilerinin kuantumlu oluşunun anlaşılması fizikte bir devrimdir. Diğer taraftan Heisenberg birbiri ile eşlenik olan iki niceliğin aynı anda kesin bir doğrulukla ölçülemeyeceğini ortaya koymuştur. Örneğin, konum ile konumun eşleniği olan momentum aynı anda sıfır hata ile ölçülemez. Konum ölçerken yapılan hata Δx, momentum ölçerken yapılan hata Δp ise

$$\Delta x.\Delta p \geq \hbar$$

olarak verilir. Benzer olarak enerjinin eşleniği zamandır. Zaman ve Enerji ölçümleri içinde

$$\Delta E.\Delta t \geq \hbar$$

olmaktadır. Görüldüğü üzere gerek enerjinin kuantumlu olma olgusunda ve gerekse belirsizlik prensibinde $\hbar$ dediğimiz parametre ortaya çıkar. $\hbar$ açısal momentum boyutunda olup, en küçük açısal momentumu ifade etmektedir ($\hbar$=1,054×10^{-34} Joule.s). Bir parçacığın açısal momentumu $\hbar$ ile mukayese edilebilir düzeyde ise (L~$\hbar$), o parçacık kuantum fiziği ile işleme sokulur. Eğer bir cismin açısal momentumu L>>$\hbar$ ise bu cismin durumu klasik fizik ile ifade edilir.

Klasik Fizik ile açıklanamayan olayların çözülmesine yönelik çalışmalar yapılırken, maddenin dalga tabiatının da bulunduğu düşüncesi De Broglie tarafından ortaya atıldı. Kısa bir süre sonra da elektronların dalga tabiatı, Young deneyinden (kırınım ve girişim olaylarının gözlenmesinden) ortaya kondu. Bu buluş modern kuantum teorisinin doğmasına ve gelişmesine yol açtı.

HARMONİK FONKSİYONLAR VE KUANTUM FİZİĞİ

Eğer parçacıkların bir dalga özelliği varsa, bunları temsil eden bir dalga fonksiyonu ve bu fonksiyonun sağladığı bir de dalga denklemi olmalıdır. Bu tip parçacıkları temsil eden dalga fonksiyonu $\psi(x,t)$ sembolü ile gösterilir. $\psi(x,t)$ fonksiyonu, reel kısmı harmonik fonksiyon olan sonsuz tane bitişik k dalga sayılı düzlem dalgaların üst üste gelmesinden oluşturulur. Bir tek düzlem dalga

$$\Psi(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)} \quad (1)$$

şeklindedir[7,8]. Burada A dalganın genliği ve ω =2πf ise dalganın açısal frekansını belirlemektedir.Bu düzlem dalga x yönünde ilerleyen bir dalgadır. Uzayın her yerinde mevcut olduğundan parçacığı temsil etmez. Bu durumda parçacığı temsil eden dalga

$$\psi(x,t) = \int \phi(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \qquad (2)$$

şeklinde bir dalga paketi ile elde edilir[7,8]. Paket yerellik özelliğine sahiptir ve mutlaka harmonik olması gerekmez. Söz konusu dalga paketinin zamana göre 1. türevini ve konuma göre ikinci türevini alırsak iki işlemin birbirine eşit olduğunu görürüz. Buradan,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) \qquad (3)$$

şeklinde hem zamana hem de konuma bağlı olan bir eşitlik elde edilir. Dalga denklemini sağlayan $\psi(x,t)$ fonksiyonunu, daha sonradan göreceğimiz olasılık yorumu gereği

$$\psi(x,t) = U(\mathrm{x}).\mathrm{T}(t) \qquad (4)$$

şeklinde alınmalıdır [7,8]. (4) ve (3) ile verilen denklemlerden, biri zamana diğeri konuma bağlı, iki denklem elde edilir. Zamana bağlı denklemin çözümü

$$T(\mathrm{t}) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}ET} \qquad (5)$$

şeklindedir. Konuma bağlı denklem ise,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\mathrm{U}(x) = E\,\mathrm{U}(x) \qquad (6)$$

olur. (6) denklemine Özdeğer Denklemi de denir. Bu denklem parçacığın E_1 enerjisi için U_1 çözümü, E_2 enerjisi için U_2 çözümü, E_3 enerjisi için U_3 çözümü, … , E_n enerjisi için U_n çözümlerini verir. Buradaki yorum, parçacığın n tane kesikli enerjisinin olduğu varsayılarak yapılmıştır. Eğer parçacığın enerji seviyeleri sürekli ise sonsuz tane de çözüm var demektir. Biz burada, parçacığın enerji seviyelerinin kesikli olduğunu varsayarak, kuantum mekaniğini kuracağız.

ÖZDURUMLAR VE GENEL DALGA FONKSİYONU

Özdeğer denkleminin çözümlerinden $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, ..., \mathrm{U}_n$ dalga fonksiyonlarını elde edeceğimizi söylemiştik. Aslında

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]=H \tag{7}$$

Hamiltoniyen ile temsil edilirse (6) denklemi de

$$HU_n = E_n U_n \tag{8}$$

şeklini alır. (8) ile verilen denklemde her E ' ye karşılık bir U ' nun bulunabileceği açıktır. Bu durumu enerji seviyeleri diyagramında aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{array}{l} E_n ---------- U_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ E_3 ---------- U_3 \\ E_2 ---------- U_2 \\ E_1 ---------- U_1 \end{array} \tag{9}$$

Buradaki her bir E değerine özenerji, her bir U değerine özdurum veya özfonksiyon denir. Öz fonksiyonlar bazı durumlarda harmonik fonksiyonlar olabilmektedir.

Bir temel parçacığın enerjisini sonsuz kez ölçtüğümüzde, her zaman E_1 değerini buluyorsak, bu tanecik hep U_1 özdurumundadır. Yani genel dalga fonksiyonu $\psi = U_1$ olur. Aynı taneciğin enerjisini sonsuz kere ölçtüğümüzde, her defasında E_2 enerjisini buluyorsak, tanecik U_2 özdurumundadır. Genel dalga fonksiyonu da $\psi = U_2$ olur. Benzer yorumlar $E_1, E_2, E_3, ... E_n$ durumları için de yapılabilir. Ancak parçacığın enerjisini ölçtüğümüzde, bu enerjiyi bazen E_1 bazen E_2 ve bazen de E_n buluyorsak sistem özdurumda değildir. Bu durumda genel dalga fonksiyonu Dirac notasyonunda[7,8,9]

$$|\psi> = c_1|\psi_1> + c_2|\psi_2> + c_3|\psi_3> + ... + c_n|\psi_n> \tag{10}$$

şeklinde olur.

(10) ile verilen denklem kuantum fiziğinin nasıl kurulacağı konusundaki temel bilgileri içermektedir. (9) ve (10) denkleminde yer alan $|\psi_1>, |\psi_2>, ,...,|\psi_n>$ özfonksiyonları baz vektörleridir. $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ katsayıları kompleks sayılardır. Ek olarak $|c_1|^2$ taneciğin U_1 durumunda bulunma olasılığı, $|c_2|^2$ taneciğin U_2 durumunda bulunma olasılığı,…, $|c_n|^2$ taneciğin U_n durumunda bulunma olasılığını ifade eder.

Şimdi bu baz vektörlerini, n-boyutlu Öklid uzayındaki vektör kurulumu ile karşılaştıralım. n-boyutlu reel uzayda $e_1, e_2, e_3, ...e_n$ birim vektör iken; kuantum fiziğinin inşası için kurduğumuz uzayda $|U_1>, |U_2>, ..., |U_n>$ vektörleri birim vektör rolünü oynamaktadır. Bu ise $|\psi> \to \vec{A}$ duruma karşılık gelmekte ve vektör bileşenleri arasında $(e_1 \to c_1,\ e_2 \to c_2,\ e_3 \to c_3 ... e_n \to c_n)$ türünden bir eşleşme olmaktadır.

DEĞİŞİK OPERATÖRLERİN ÖZ FONKSİYONLARI VE KUANTUM MEKANİĞİ

Klasik fizikte biz yer vektörünü, lineer momentumu, açısal momentumu, hızı ve enerjiyi doğrudan doğruya ölçeriz ve sonsuz doğrulukta ölçtüğümüzü kabul ederiz. Kuantum mekaniğinde durum böyle değildir. Öncelikle nicelikler arasında bir karşılık gelme ilkesi vardır. Bu ilkeye göre, klasik fizikte niceliklere kuantum fiziğinde operatör karşılık gelir. Bu durum

$$\begin{array}{ccc} \underline{Klasik \quad Fizik} & & \underline{Kuantum \quad Fiziği} \\ X & \rightarrow & X_{op} \\ P & \rightarrow & P_{op} \\ L & \rightarrow & L_{op} \\ V & \rightarrow & V_{op} \\ E & \rightarrow & \mathrm{H}_{op} \end{array} \tag{11}$$

şeklinde yazılır.

Operatör ne işe yarar? sorusuna cevap arayalım. Operatör bir duruma uygulanınca onu başka bir duruma dönüştürür. Örneğin bunu bir A operatörü için gösterelim.

$$\mathrm{A}\ |\psi> = |\psi> \tag{12}$$

A operatörü bir durumu başka bir duruma götürmüştür. Operatörler bazen de durumu değiştirmeyebilirler. Örneğin, (8) denklemindeki H operatörü U' ya uygulanınca $H|U>=E|U>$ olur. Yani operatör durumu aynı bırakır.

Biz kuantum fiziğinin H operatörünün öz değerlerinden hareketle kurulabileceğini, (7)'den (10)'a kadar verilen denklemlerden ve daha önce verdiğimiz açıklamalardan biliyoruz. H operatörünün öz değerlerinden kurulan uzaya X uzayı denir. Mademki $X, P, L, ..., H$ gibi birçok fiziksel operatör vardır. Kuantum fiziğini başka operatörlerin özfonksiyonlarından da elde edebiliriz. Örneğin, P operatörünün özfonksiyonları P uzayını kurar.

$$H|U_p>=p|U_p> \tag{13}$$

şeklindedir. Bu durumda genel dalga fonksiyonu;

$$|\Phi>= \mathrm{a}_1|\mathrm{U}\mathrm{p}_1>+\mathrm{a}_2|\mathrm{U}\mathrm{p}_2> +\mathrm{a}_3|\mathrm{U}\mathrm{p}_3>+ \ldots\ldots+\mathrm{a}_n|\mathrm{U}\mathrm{p}_n> \tag{14}$$

şeklindedir. Aslında p 'nin sürekli değerler aldığını ve U_p (Baz vektörlerin) de sürekli olduğunu önemle not edelim. Kuantum fiziğini diğer operatörlerin öz fonksiyonlarından da oluşturabiliriz. Örneğin açısal momentum operatörü ya da parite operatörü kullanılarak da, kuantum mekaniği inşa edilebilir.

KUANTUM FİZİĞİNDE ÖLÇME VE MATEMATİK

Kuantum fiziğindeki ölçmeler, istatistik ölçmelere benzerlik arz eder. Örneğin klasik fizikte bir dağın uzunluğunu ölçelim. Ölçüm sayımız 1000 olsun.

$$50 \to X_1,\, 125 \to X_2,\, 200 \to X_3,\, 300 \to X_4,\, 250 \to X_5,\, 75 \to X_6$$

olarak bulunmuşsa,

$$\overline{X} = \frac{50}{1000}X_1 + \frac{125}{1000}X_2 + \frac{200}{1000}X_3 + \frac{300}{1000}X_4 + \frac{250}{1000}X_5 + \frac{75}{1000}X_6 \qquad (15)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \frac{50}{1000} &= P_1 = X_1\text{'}i \;\; bulma \;\; olasılığı \\ \frac{125}{1000} &= P_2 = X_2\text{'}i \;\; bulma \;\; olasılığı \\ \frac{200}{1000} &= P_3 = X_3\text{'}i \;\; bulma \;\; olasılığı \\ &\vdots \\ \frac{75}{1000} &= P_6 = X_6\text{'}i \;\; bulma \;\; olasılığı \end{aligned}$$

olur. Kuantum fiziğinde ψ durumundaki bir sistemin enerjisi, H operatörünün beklenen değer ile ifade edilir. Beklenen değer aşağıdaki gibidir.

$$E = \underbrace{<\psi|H|\psi>}_{Dirac\;\; Gösterimi} = \underbrace{\int \psi^* H \psi dz}_{Schrödinger\;\; Gösterimi} \qquad (16)$$

Bir örnek olarak enerji hesabını yapalım.

$$\begin{aligned} &\psi \to |\psi> = C_1|U_1> + C_2|U_2> + \ldots + C_n|U_n> \\ &\psi^* \to <\psi| = C_1^* <U_1| + C_2^* <U_2| + \ldots + C_n^* <U_n| \end{aligned} \qquad (17)$$

$$<U_i|U_j> = \begin{matrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{matrix}$$

şeklinde yazılır. Ya da daha kısa olarak,

$$\psi \rightarrow |\psi> = \sum_{i=1}^{n} C_i |\psi_i>$$
$$\psi^* \rightarrow <\psi| = \sum_{j=1}^{n} C_j^* <\psi_j|$$

olarak yazılır. Buradan

$$<\psi|H|\psi> = \sum_{j=1}^{n} C_j^* <U_j| H \sum_{i=1}^{n} C_i |U_i>$$

$$= \sum_i \sum_j C_i C_j^* <U_j \underbrace{|H|U_i>}_{E_i|U_i>}$$

$$= \sum_i \sum_j C_i C_j^* E_i \underbrace{<U_i|U_j>}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_i C_i C_i^* E_i = \sum_i |C_i|^2 E_i$$

$$\begin{aligned} &= |C_1|^2 E_1 + |C_2|^2 E_2 + \ldots + |C_n|^2 E_n \\ &= P_1 E_1 + P_2 E_2 + \ldots + P_n E_n \end{aligned} \tag{18}$$

yazılır. (18) denklemi (15) denkleminin benzeridir. Buradaki $|C_1|^2$ sisteminin E_1 enerjisinde bulunma olasılığıdır ya da U_1 durumunda bulunma olasılığıdır. Benzer olarak $|C_n|^2$ sisteminin E_n enerjisinde ya da U_n enerjisinde bulunma olasılığıdır.

Enerjiyi momentum uzayında ölçmeye kalkarsak,

$$<\Phi|\mathrm{H}|\Phi> \;\; = <\psi|\mathrm{H}|\psi> = \mathrm{E} \tag{19}$$

bulunur. (19) denkleminin benzerleri $\ell, \wp, X, \mathrm{P}$ operatörleri için de geçerlidir. Yani P operatörünün P uzayında ölçülen değeri ile X uzayında ölçülen değeri aynıdır. Keza L operatörünün P uzayında ölçülen değeri ile X uzayında ölçülen değeri aynıdır. Bu nedenle biz kuantum fiziğini herhangi bir operatörün öz fonksiyonlarını baz seçerek inşa edebiliriz.

HARMONİK SALINICI

Denge konumu etrafında harmonik salınımlar yapan bir parçacığın hareketi, fiziğin en temel problemlerinden birini oluşturur. Salınıcı problemine iki farklı şekilde yaklaşılabilir. Bir yöntem, Schrödinger diferansiyel denklemini doğrudan çözmektir. Diğer bir yöntem ise, salınıcı hamiltonyeni bir takım operatörler cinsinden yazılır ve operatör cebiri yardımıyla sonuca varılır. Burada diferansiyel denklem çözümü verilecektir[10].

Problemin [10] nolu referanstaki çözüm yöntemini, biraz kısaltarak, sunalım. Kütlesi m olan ve dengeden uzaklaşma mesafesine (x) bağlılığı $F=-kx$ şeklinde olan bir kuvvetin etkisinde hareket eden bir parçacık ele alalım. Bu sistemin toplam enerjisi

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

olarak yazılabilir. Burada $\omega=\sqrt{k/m}$ açısal frekanstır. Kuantal çözümü bulmak üzere Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x)$$

şeklinde yazılır.ρ= αx dönüşümü altında ve gereken işlemlerden sonra, bu denklemden

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2}+(\lambda-\rho^2)\psi=0$$

şeklindeki boyutsuz Schrödinger denklemi olarak yazılabilir.

DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bir fikir edinmek üzere $\rho\to\pm\infty$ limit değerlerinde ψ çözümünün davranışına bakalım. Bu ρ değerleri için λ terimi küçük kalacağından önemsenmeyebilir ve yaklaşık denklem

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2}+\rho^2\psi=0$$

olur. Bu denklemin çözümü $\psi \cong e^{-\rho^2/2}$olur.

Sonlu ρ değerleri için de bu asimptotik davranışı gösteren çözümler bulabilmek amacıyla

$$\psi(\rho) = e^{-\rho^2/2}u(\rho)$$

şeklindeki çözümlere bakalım. Bu çözümü boyutsuz Schrödinger denkleminde kullanmak üzere

$$\frac{d\psi}{d\rho} = (u' - \rho u)e^{-\rho^2/2}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} = [u'' - 2\rho u' + (\rho^2 - 1)u]e^{-\rho^2/2}$$

ifadeleri hesaplanırsa, yeni $u(\rho)$ fonksiyonunun sağlayacağı denklem

$$u'' - 2\rho u' + (\lambda - 1)u = 0 \tag{20}$$

olur. Bu denklem *kuvvet serisi* veya *Frobenius yöntemi* ile çözülebilir. Bunun için, $u(\rho)$

$$u(\rho) = c_0 + c_1\rho + c_2\rho^2 + c_3\rho^3 + ... = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\rho^m$$

şeklinde bir kuvvet serisi olarak yazılır. Bu serinin birinci ve ikinci türevleri alınarak (20) denkleminde yerlerine konulursa ve aynı ρ^m kuvvetlerinin katsayıları bir araya toplanırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2)(m+1)c_{m+2} - 2mc_m + (\lambda - 1)c_m]\rho^m = 0$$

eşitliği elde edilir, Buradan c_m katsayıları arasında

$$c_{m+2} = \frac{2m + 1 - \lambda}{(m+1)(m+2)}c_m$$

şeklinde bir rekürans (tekrarlama) bağıntısı elde edilir.c_0 ve c_1 katsayılarına dayalı olarak hesaplayacağımız katsayılar yardımıyla, sonsuz terimli $u(\rho)$ fonksiyonunu bulabiliriz. Bulunan bu sonsuz terimli seri çözümünün bir dalga fonksiyonu olabilmesi için yakınsak olması gerekir. Buradaki yakınsaklığı inceleyebilmek için aşağıdaki yolu izleyelim. Ardışık katsayıların oranı olan c_{m+2}/c_m ifadesi için

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+2}}{c_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1-\lambda}{(m+1)(m+2)}\to\frac{2}{m}$$

yakınsaması olur. Bu serinin asimptotik davranışı, seri açılımı

$$e^{\rho^2}=1+\rho^2+\frac{\rho^4}{2!}+...=\sum_{m\,çift}\frac{\rho^m}{(m/2)!}$$

şeklinde olan e^{ρ^2} fonksiyonunun asimptotik davranışına benzerdir. Zira bu yeni serinin katsayılarının asimtotik davranışı da

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+2}}{c_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m/2)!}{(m/2+1)!}=\frac{1}{m/2+1}\to\frac{2}{m}$$

şeklinde yakınsar. $u(\rho)$ ile seçilen serinim sonsuzdaki davranışları benzerdir.Buradan ψ dalga fonksiyonu sonsuzda

$$\psi=e^{-\rho^2/2}u(\rho)\to e^{-\rho^2/2}\times e^{\rho^2}\to e^{+\rho^2/2}$$

gibi davranacak, yani ıraksak olacaktır. O halde sonsuz terimli seri çözümü kabul edilemez.

Doğru bir ifade bulmak için u(ρ) serisinin c_m katsayılarını veren ifadeye tekrar bakalım:

$$c_{m+2}=\frac{2m+1-\lambda}{(m+1)(m+2)}c_m$$

m indisi 0,1,2,…gibi artmakta iken, öyle bir $m=n$ değerine geldiğimizde pay sıfır olursa, seri bu ρ^n değerinde biter, çünkü bu c_n değerinden itibaren $c_{n+2}=c_{n+4}=...=0$ olacak demektir. Böylece $u(\rho)$ çözümleri birer polinom olurlar.

Bunun gerçekleşmesi için, belli bir n tamsayı değerinde

$$2n+1-\lambda=0$$

olmalıdır. λ katsayısının tanımı gereği

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (n=0,1,2,...)$$

olur. Böylece, seri çözümlerinin dalga fonksiyonu olabilme koşulunu sağlamasını isteyerek, enerji özdeğerlerini bulmuş oluyoruz. Artık dalga fonksiyonlarını bulabiliriz. Önce $u_n(\rho)=\sum_{m=1}^{n} c_m\rho^m$ polinomlarını oluşturmak üzere c_m katsayılarını bulalım. Rekürans bağıntısı yazılırsa

$$c_{m+2}=\frac{2(m-n)}{(m+1)(m+2)}c_m$$

Bu katsayıları hesaplarken c_0 ve c_1 serbestçe seçilebilir. Özel olarak, $c_0=1$ ve $c_1=0$ değerleri seçilirse çift çözümler, $c_0=0$ ve $c_1=2$ değerleri seçilirse tek çözümler olmak üzere, matematikte bilinen özel polinomlar ailesinden *Hermite polinomları* $H_n(\rho)$ elde edilir.

$$u_n(\rho)=H_n(\rho)$$

İlk birkaç Hermite polinomunu

$$H_0(\rho)=1$$
$$H_1(\rho)=2\rho$$
$$H_2(\rho)=4\rho^2-2$$
$$H_3(\rho)=8\rho^3-12\rho.$$

olarak açık yazabiliriz. Bu polinomlar, baz fonksiyonları olmaktadır.

Sonuç olarak,bu makale ile matematiğin Fiziğe uygulanınca somutlaştığı ve kuantum fiziğinin de tamamen matematik temeller üzerine yükseldiği ortaya konmuştur. Matematik ile fizik arasındaki kopmaz ilişki, genç matematik ve fizik öğrencileri için, basit bir anlatımla sergilenmiştir. Bu örnek esas alınarak, genç matematikçilerin fizik alanından ve genç fizikçilerinden matematik alanından konu seçme potansiyelleri arttırılmaya çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

[1]Sir Isaac Newton, 1687. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1713 and 1726.

[2]Arnol'd V. I., 1989. Mathematical Methods of ClassicalMechanics, Springer-Verlag, ISBN 0-387-96890-3

[3] Vinogradov A.M., Kupershmidt B.A., 1981.*The structure of Hamiltonian mechanics* (DJVU), London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 60, London: Cambridge Univ

[4] Arnold Sommerfeld, 1949.Partial differential equations in Physics,Elsevier, ISBN: 978-0-12-654658-3

[5] Lang Serge, 1987. Linearalgebra, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-96412-6

[6]Wu-Ki Tung, GroupTheory in Physics, (Michigan State University, USA)ISBN: 978-9971-966-57-7

[7]Schiff Leonard I.,1968. Quantum mechanics (third ed.), London: McGraw-Hill

[8]Stephen Gasiorowicz, Quantum Physics, Third Edition ISBN-13: 978-0471057000

[9] PAM Dirac, 1939. "A new notation for quantum mechanics". Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (3): 416–418. doi:10.1017/S0305004100021162

[10] Bekir Karaoğlu, 2008. Kuantum Mekaniğine Giriş, 6.baskı, Seçkin Yayıncılık