İndirgenme Boyutu Üç Olan Fibonacci Simetrik Sayısal Yarıgruplarının Bir Sınıfı

Meral SÜER [*] ve Sedat İLHAN

[*] *Batman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,72060 Batman, Türkiye*

Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 21280 Diyarbakır, Türkiye

[*] meral.suer@batman.edu.tr, sedati@dicle.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, a, k, i pozitif tam sayı, $3|a,\ 3 < i < a$ ve $i, 3$ ün tam katı olmamak üzere, F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} Fibonacci sayıları için $F = \langle F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} \rangle$ şeklinde özelsimetrik Fibonacci sayısal yarıgrublarının bir sınıfını inceleyeceğiz ve bu sınıfta bazı sonuçlarvereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yarıgrup, Fibonacci Sayısal Yarıgrupları, Frobenius Sayısı,Fibonacci Sayıları.

A Class of Fibonacci Symmetric Numerical Semigroups with Three Embedding Dimension

Abstract

In this paper, we characterize a particular class of Fibonacci symmetric numerical semigroups in the form of $F = \langle F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} \rangle$ with F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} Fibonacci numbers where a, k, i is positive integers and, $3|a,\ 3 < i < a$ and 3 does not divide i. And we will give some results in this class.

KeyWords: Numerical Semigroup, Fibonacci Semigroups, Frobenius Number, Fibonacci numbers.

1. Giriş

$\mathbf{Z}$ ve $\boldsymbol{N}$ sırasıyla tamsayılar kümesi ve negatif olmayan tamsayılar kümesi olarak verilsin $S \subseteq \boldsymbol{N}$ olmak üzere $S, \boldsymbol{N}$ de "+" ile gösterilen toplama işlemine göre kapalı ve $0 \in S$ oluyorsa S ye *sayısal yarıgrup*adı verilir. $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ için$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_n$ olmak üzere,

$$S = \langle s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i n_i : n_i \in \boldsymbol{N} \right\}$$

şeklinde yazılabildiği ve

$$\#(\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{S}) < \infty \Leftrightarrow \boldsymbol{OBEB}\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\} = \mathbf{1}$$

olduğu bilinmektedir[1]. Burada $\#(A)$ ile A kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir.

$\boldsymbol{N}$ nin boştan farklı bir A alt kümesi verilsin. $(\boldsymbol{N}, +)$ nın A ile üretilen alt monoidi, başka bir ifadeyle $\boldsymbol{N}$ nin A kümesini kapsayan en küçük altkümesi $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Eğer S bir sayısal yarıgrup ve $S = \langle A \rangle$ ise A kümesi S nin bir *üreteçler sistemidir* denir. A nın S yi üreten özalt kümesi yoksa A kümesine S nin *minimal üreteç sistemi* denir. Her sayısal yarıgrubun minimal üreteç sisteminin tek olduğu ve üreteçler sisteminin sonlu elemana sahip olduğu bilinir [7]. Eğer $\{s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_n\}$, S nin minimal üreteç sistemi ise, S deki en küçük sayı olan s_1 sayısına *S nin katlılığı* denir ve $m(S)$ ile gösterilir. S nin minimal üreteç sisteminin eleman sayısına S nin *indirgenme boyutu* denir ve $e(S)$ ile gösterilir.

Bir S sayısal yarıgrubunda

$$g(S) = max\{x \in \boldsymbol{Z} : x \notin S\} \text{ ve } n(S) = \#(\{0,1, \ldots, g(S)\} \cap S)$$

sayılarına, sırasıyla, S sayısal yarıgrubunun *Frobenius* ve *belirteç sayısı* denir [7]. Bu durumda

$$S = \langle s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \rangle = \{0, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, g(S) + 1, \rightarrow \cdots\}$$

şeklinde yazılabilir ki burada $s_i < s_{i+1}, n = n(S)$ ve $" \rightarrow "$ sembolü $g(S) + 1$ sayısından sonraki bütün sayıların S sayısal yarıgrubunda olduğu anlamındadır [1].

$\boldsymbol{N} \backslash S$ nin elemanlarına S nin *boşlukları* denir ve bu elemanların kümesi $H(S)$ ile gösterilir. $H(S)$ kümesinin eleman sayısına S nin *genusu (cinsi)* denir ve $G(S)$ ile gösterilir [7].

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $G(S) + n(S) = g(S) + 1$ eşitliği mevcuttur. Her $x \in \boldsymbol{Z} \backslash S$ için $g(S) - x \in S$ oluyorsa S sayısal yarıgrubu *simetriktir* denir. Eğer $e(S) = 2$ yani $S = \langle s_1, s_2 \rangle$ ise S sayısal yarıgrubunun simetrik ve $g(S) = s_1 s_2 - s_1 s_2$ olduğu bilinmektedir [1]. Ayrıca, S sayısal yarıgrubu simetrik ise $n(S) = \frac{g(S)+1}{2}$ olur [2].

Öte yandan, $m \in S \backslash \{0\}$ için $Ap(S, m) = \{s \in S : s - m \notin S\}$ kümesine S nin m *ye göre Apery kümesi* olarak adlandırılır. Böylece $\#\big(Ap(S, m)\big) = m$ olup $g(S) = max\big(Ap(S, m)\big) - m$ bağıntısı mevcuttur.

$S = \langle s_1, s_2 \ldots, s_n \rangle$ayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda, $Ap(S, s_1) = \{s \in S : s - s_1 \notin S\}$ kümesi, S nin $(mods_1)$ e göre tam olarak bir elemanını kapsar. Özel olarak $Ap(S, s_1)$ kümesi $i = 0,1, \ldots, s_1 - 1$ için $(mods_1)$ ye göre i ye denk olan kalan sınıflarının her birindeki en küçük pozitif tamsayılardan oluşmaktadır [6].

$F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere, $n = 0,1,2, \ldots$ için $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ şeklinde tanımlanan F_n sayısına *n-inci Fibonacci sayısı* denir. Fibonacci sayılarından oluşan $\{F_n\}$ dizisine de *Fibonacci dizisi* adı verilir ve bu dizinin bazı elemanları aşağıdaki gibi yazılır.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	…

$S = \langle s_1, s_2 \ldots, s_n \rangle$ sayısal yarıgrubunda, $i = 1,2, \ldots, n$ için, s_i yerine F_i Fibonacci sayıları alınırsa, S ye *Fibonacci sayısal yarıgrubu* denir.Eğer $S = F$ alınırsa, bu Fibonacci sayısal yarıgrubu, $F = \langle F_1, F_2, \ldots, F_n \rangle$ olarak yazılır [3].

Bu çalışmada, indirgenme boyutu üç olan, yani Fibonacci sayı üçlüsü ile üretilen, Fibonacci simetrik sayısal yarıgrupların bir sınıfını ele alacağız ve bu sınıfta bazı sonuçları vereceğiz. Bu tür sayısal yarıgrupların daima simetrik olmayacağı açıktır. Örneğin, $F = \langle F_5, F_7, F_8 \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubu simetrik değildir. Ancak, $F = \langle F_6, F_8, F_9 \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubu simetriktir.

2. Simetrik FibonacciSayısal Yarıgrupları

2.1. Teorem: (Lucas Teoremi) m, n pozitif tam sayılar olmak üzere, F_m ve F_n Fibonacci sayıları verilsin. O zaman, $OBEB\{F_m, F_n\} = F_{OBEB(m,n)}$ şeklindedir [3].

2.2. Önerme: $m \neq 2$ için F_m, F_n ve F_k Fibonacci sayıları verilsin. O zaman,

a)$F_m | F_n \iff m|n$

b) $F_{n+k} = F_k\, F_{n+1} + F_{k-1} F_n$

c) $k > 1$ için $k < n$ ise $F_k < F_n$

d) F_{3k} çifttir.

ifadeleri doğrudur ([8], [5]).

2.3. Teorem: $a, b, c > 4$ ve F_a, F_b, F_c Fibonacci sayıları olmak üzere, $F = \langle F_a, F_b, F_c \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda = OBEB\{a, b\} \geq 3$ olmak üzere, $OBEB\{\lambda, c\} = 1$ yada 2 için $F_c \in \mathrm{F} = \langle \frac{F_a}{F_\lambda}, \frac{F_b}{F_\lambda} \rangle$ olmasıdır [8].

2.4. Sonuç: $a, b, c > 4$ ve F_a, F_b, F_c Fibonacci sayıları olmak üzere, $F = \langle F_a, F_b, F_c \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda = OBEB\{a, b\} \geq 3$ olmak üzere, $OBEB\{\lambda, c\} = 1$ yada 2 için $F_c\, F_\lambda > OKEK\{F_a, F_b\} - F_a - F_b$ olmasıdır [3].

2.5. Lemma: $S = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ simetrik sayısal yarıgrup olsun. O zaman, $e_1 = OKEK\{s_1, s_2\}$ ve $e_2 = s_3 \cdot OBEB\{s_1, s_2\}$ olmak üzere, S nin Frobenius sayısı $g(S) = e_1 + e_2 - \sum_{i=1}^{3} s_i$ ile bulunur [4].

2.6. Teorem: a, k, i pozitif tam sayı, $3|a$, $3 < i < a$ ve $i, 3$ ün tam katı olmamak üzere, F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} Fibonacci sayıları verilsin. O zaman $F = \langle F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubu simetriktir.

İspat: a, k, i pozitif tam sayı, $3|a$, $3 < i < a$ ve $i, 3$ ün tam katı olmamak üzere, F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} Fibonacci sayıları verilsin. $3|a$ ise $OBEB\{a, 3\} = 3$ olup $OBEB\{a, ak + 3\} = 3$ yazılır. Bu durumda, Teorem 2.1 den

$$OBEB\{F_a, F_{ak+3}\} = F_{OBEB\{a,ak+3\}} = F_3 = 2$$

bulunur. Öte yandan, a, k, i sayılarının seçiminden dolayı $OBEB\{F_3, F_{ak+i}\} = 1$ olacaktır, Teorem 2.1 ve Önerme 2.2 yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{ak+i} = F_{(ak+3)+(i-3)}$$

$$= F_{i-2} \cdot F_{ak+3} + F_{i-3} \cdot F_{ak+2}$$

$$= F_{i-2} \cdot F_{ak+3} + \frac{F_{i-3}}{2}(F_{ak+2} + F_{ak+2})$$

$$= F_{i-2} \cdot F_{ak+3} + \frac{F_{i-3}}{2}(F_{ak+1} + F_{ak} + F_{ak+2})$$

$$= F_{i-2} \cdot F_{ak+3} + \frac{F_{i-3}}{2}(F_{ak+3} + F_{ak})$$

$$= \left(\frac{2F_{i-2} + F_{i-3}}{2}\right) F_{ak+3} + \frac{F_{i-3}}{2} \cdot F_{ak}$$

$$(a|ak \Leftrightarrow F_a|F_{ak} \Leftrightarrow \exists\, y \in \mathbf{Z},\ y \cdot F_a = F_{ak})$$

$$= F_i \cdot \frac{F_{ak+3}}{2} + y \cdot F_{i-3} \cdot \frac{F_a}{2}$$

Bu durumda, $F_{ak+i} \in \langle \frac{F_a}{2}, \frac{F_{ak+3}}{2} \rangle$ yazarız. Dolayısıyla Teorem 2.3 ten $F = \langle F_a, F_{ak+3}, F_{ak+i} \rangle$ Fibonacci sayısal yarıgrubu simetrik olur.

2.7. Sonuç: F Fibonacci sayısal yarıgrubu Teorem 2.6 daki gibi verilsin. O zaman F nin Frobenius sayısı, $g(F) = \frac{F_a \cdot F_{ak+3}}{2} + F_{ak+i} - F_a - F_{ak+3}$ olur.

2.8. Sonuç: F Fibonacci sayısal yarıgrubu Teorem 2.6 daki gibi verilsin. O zaman

a) $n(F) = \frac{\frac{F_a \cdot F_{ak+3}}{2} + F_{ak+i} - F_a - F_{ak+3} + 1}{2}$

b) $G(F) = n(F)$

c) $Ap(F, F_a) = \left\{x \cdot F_{ak+i} + y \cdot F_{ak+3} : x = 0,1 \ ve \ y = 0,1,2, \dots, \frac{F_a}{2} - 1\right\}$

eşitliklerigeçerlidir.

2.9 Örnek: $a = 6, k = 1, i = 2$ için $F = \langle F_6, F_9, F_{11} \rangle = \langle 8,34,89 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. $OBEB\{F_6, F_9\} = F_3$, $OBEB\{F_3, F_{11}\} = 1, F_{11} \in \langle \frac{F_6}{F_3}, \frac{F_9}{F_3} \rangle = \langle 4,17 \rangle$ olup,

$H(F) = \{$1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,22,23,25,26,27,28,29,30,31,33,35, 36,37,38,39,41,43,44,45,46,47,49,51,52,53,54,55,57,59,60,61,62,63,65,67,69,70,71, 73,75,77,78,79,81,83,85,86,87,91,93,94,95,99,101,103,107,109,111,115,117,119, 125,127,133,135,141,143,149,151,159,167,175,183$\}$

bulunur. Öte yandan,

$$Ap(F, F_6) = Ap(F, 8) = \{0,34,68,89,102,123,157,191\},$$

$$g(F) = \frac{F_6 \cdot F_9}{2} + F_{11} - F_6 - F_9 = \frac{8 \cdot 34}{2} + 89 - 8 - 34 = 183,$$

$$n(F) = \frac{\frac{F_6 \cdot F_9}{2} + F_{11} - F_6 - F_9 + 1}{2} = \frac{\frac{8 \cdot 34}{2} + 89 - 8 - 34 + 1}{2} = 92$$

ve $G(F) = n(F) = 92$ olur.

Kaynaklar

[1]. Barucci, V.,Dobbs, D. E., Fontana, M. (1997). Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analyticalle İrreducible Local Domain. Memoirs of the Amer. Math. Soc.,*598*,13-25.

[2]. D'Anna, M.(1998). Type Sequences of Numerical Semigroups. *Semigroup Forum, 56,*1-31.

[3]. Fel, L.G. (2009). Symmetric Numerical Semigroups Generated By Fibonacci and LucasTriples. *İntegers 9, #A09*, 107-116.

[4]. Herzog, J. (1970). Generators and relations of Abelian semigroups and semigroups rings. *Manuscripta Math., 3,* 175-193.

[5]. İlhan, S. ve Kiper R.(2008). On The Frobenius of Lucas Numerical Semigroups. *Acta Üniversitatis Apulensis, 16,* 179-184.

[6]. Rosales, J.C. (2000). Numerical Semigroups with Apery Sets of Unique Expression. *Journal of Algebra, 226*, 479-487.

[7]. Rosales J.C. ve Garcia-Sanchez P.A. (2009). *Numerical Semigroups*. New York: Springer,181.

[8]. Sun, Z.H. (2009). Congruences for Fibonacci numbers. Erişim Tarihi: 24 Şubat 2009, http://www.hytc.cn/xsjl/szh.