

**ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN İRRASYONEL SAYILARA
İLİŞKİN GÖRÜŞLERİ: NİTEL BİR ARAŞTIRMA**

Mustafa OBAY*-Lokman IRMAK**

Öz

Bu araştırma ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara ilişkin görüşlerini belirlemeye yönelik nitel bir araştırmadır. Araştırma, ortaokulda görev yapmakta olan matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara ilişkin algılarını belirleme amacı taşımaktadır. Yapılan bu araştırmada fenomenolojik desen kullanılmıştır. Araştırmaya halen ortaokulda matematik öğretmenliği görevini ifa etmekte olan 31 öğretmen dâhil olmuştur. Veri toplama aracı olarak on sorudan oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmış, görüşmeler yüz yüze veya çevrimiçi görüşmeler şeklinde yürütülmüştür. Verilerin çözümlenmesinde içerik analizine başvurulmuştur. Araştırma sonucunda katılımcıların irrasyonel sayılara ilişkin istenen düzeyde bir deneyime sahip olmadıkları, bunun sonucunda irrasyonel sayılara ilişkin yeterli bir farkındalığa sahip olmadıkları görülmüştür. Özellikle gündelik yaşam sürecinde irrasyonel sayılarla yeterli bir düzeyde karşılaşmayan öğretmenlerin bu sayılara ilişkin algıları ve kavramsal farkındalıklarının yetersiz olduğu görülmüştür. Buna göre günlük yaşamda daha hassas hesaplamalar için anahtar bir rol oynayan irrasyonel sayıların öneminin yeterli düzeyde kavranmadığı kanısı oluşmuştur. Bu durum öğretmenlerin hizmet öncesi eğitimlerinde olduğu gibi hizmet sürecinde de irrasyonel sayılara ilişkin beklenen kazanımlarının gözden geçirilmesi gerektiği kanaatine yol açmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sayılar, İrrasyonel sayılar, Öğretmen deneyimi.

Secondary School Math Teachers' Views on Irrational Numbers: A Qualitative Study

Abstract

This research is a qualitative study to determine the views of middle school mathematics teachers on irrational numbers. The research aims to determine the perceptions of middle school mathematics teachers about irrational numbers. Phenomenological design was used in this research. The study included 31 teachers who are currently working as mathematics teachers in secondary schools. A semi-structured interview form consisting of ten questions was used as a data collection tool, and interviews were conducted as face-to-face or online interviews. Content analysis was used to analyze the data. As a result of the research, it was seen that the participants did not have a desired level of experience with irrational numbers and as a result, they did not have sufficient awareness of irrational numbers. In particular, it was observed that the perceptions and conceptual awareness of teachers who did not encounter irrational numbers at a sufficient level in daily life were inadequate. Accordingly, it was concluded that the importance of irrational numbers, which play a key role for more precise calculations in daily life, was not sufficiently understood. This situation led to the conclusion that teachers' expected gains related to irrational numbers should be revised during their service period as well as in their pre-service Education.

Keywords: Numbers, Irrational numbers, Teacher experience.

1. Giriş

Matematik, bilen bilmeyen herkesin hayatı boyunca farkında olarak veya olmayarak kullandığı temel disiplinlerin başında gelmektedir. İnsanlar matematiği varlıkları sayma, nesnelere ölçme ve

* Corresponding author, Asst. Prof. Dr. Siirt University, Faculty of Education, Department of Mathematics Education, Siirt, mustafa.obay@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2537-9438>

** Ministry of National Education, Batman, Turkey, irmak-lokman@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6228-944X>

cisimleri sıralama gibi temel işlevler için kullanır (Güler, 2017). Bunun yanında matematik hem bireylerin hem de toplumların düşünce sistemlerinde meydana getirdiği analitik düşünme, çıkarımda bulunma ve değerlendirme süreçlerine katkısından dolayı medeniyetlerin sağlam ve köklü felsefi temeller üzerine inşa edilmesinde önemli bir yere sahiptir (Çoban & Yenilmez, 2020). Bu özelliklerinden dolayı sayıların ilmi olarak kabul edilen matematik insanlık tarihi boyunca tüm medeniyetler tarafından ilgiyle uğraşmış ve geliştirilerek sonraki medeniyetlere aktarılmıştır.

Matematik yapısı gereği soyut derslerden biri kabul edilmekte ve anlaşılması güç olarak görülmektedir. Bundan dolayı matematik dersi öğrenciler için sevilmeyen derslerin başında gelmektedir. Bu açıdan matematiğin öğretilmesinde yeni yöntemlerin araştırılması bitmeyen bir perspektife sahiptir. Matematik öğretim programı incelendiğinde matematik dersinin ortaokulda; “Sayılar ve İşlemler, Cebir, Geometri ve Ölçme, Veri İşleme ve Olasılık” olmak üzere beş temel öğrenme alanına ayrıldığı görülmektedir (MEB, 2018). NCTM’e (National Council of Teacher of Mathematics) (2000) göre günümüzde temel matematik eğitimi, sayıların ve işlemlerin anlaşılması ve sayı duyusunun gelişimi üzerinde biçimlenmesi gerektiği şeklindedir. Bu açıdan okullarda öğretim programının önemli bir kısmı sayı kavramına odaklanmıştır (Sirotic & Zazkis, 2007).

Kaminski’ye (2002) göre matematik yapma süreci sayılarla başlamaktadır ve matematiğin anlaşılması da öncelikle sayılarla gerçekleşmektedir. Matematiğin birçok alanında olduğu gibi temel öğrenme alanı olan “sayılar ve işlemler” alanında da doğası gereği çeşitli zorluklar ve engeller mevcuttur. Bu temel öğrenme alanı içerisinde öğrencilerin öğrenmekte zorluk yaşadıkları kavramlardan biri irrasyonel sayılardır. Sirotic ve Zazkis’e (2007) göre irrasyonel sayıların anlaşılması reel sayıların anlaşılması için bir temel teşkil etmektedir. Ancak irrasyonel sayıların kavranması diğer sayılara nazaran kolay olmamaktadır. Bu durum matematik öğretiminde bir takım anlama zorlukları yaratmaktadır. Elbette matematik öğretimini zorlaştıran başka nedenler de vardır, bunlardan ikisi kavram yanlışları ve ön yargılar olarak gösterilebilir. Bunların yanında sayılar sistemini oluşturan doğal, rasyonel, irrasyonel ve reel sayı kavramlarının öğretiminde sadece teknik bilgilere ve tanımlamalara ağırlık verilmesi de matematik öğretimine mâni olan engellerin diğer bir boyutudur (Çiftçi vd., 2015). Bu durum kavram tanımının biliniyor olmasının kavramsal bilgiye ulaşmada yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bu açıdan kavramsal anlama için hem kavramın matematiksel tanımının iyi bilinmesi hem de kavramın tanımı ve özellikleri ile farklı bağlamlar arasındaki ilişkilerin kurulabilmesi gerekmektedir (Çevikbaş & Argün, 2017).

Sayılarla ilişkili olarak en çok sorun yaşanan konulardan birinin irrasyonel sayılar olduğu ifade edilmektedir (Ercire vd., 2016). İlk olarak ortaokul öğretim programında sekizinci sınıfta karşımıza çıkmakta olan irrasyonel sayılar, sadece rasyonel sayılar üzerinden tanımsal olarak ifade edilmekte ve birkaç örnekle geçiştirilmektedir. İrrasyonel sayıların sadece birkaç örnekle geçiştirilmesinden dolayı öğrenme güçlüğüne yaşadığı sayı sistemlerinin başında gelmektedir (Fischbein vd., 1995). Aynı çalışmada Fischbein vd. (1995), irrasyonel sayı kavramının tarihsel ve psikolojik nedenlerden dolayı iki büyüklüğün kıyaslanamayacağı ve irrasyonel sayıların sonsuzluk kavramı gibi iki büyük sezgisel engelle karşı karşıya kaldığı konusunu araştırmıştır. Bu açıdan karmaşık bir olgu olarak algılanan irrasyonel sayılarla tarih boyunca birçok matematikçi ilgilenmiştir (Baki, 2014). Durumun karmaşıklık içermesinin doğal bir sonucu olarak irrasyonel sayıların öğrenciler tarafından da anlaşılması ve anlamlandırılmaması yadırganmamalıdır. Hatta öğrencilerden önce öğretmenler tarafından anlamlandırılması, içselleştirilmesi ve bu kavramın karşılığının bulunması gerekmektedir. Haliyle öğretmenin anlamlandırmada ve içselleştirmede sorun yaşadığı bir kavramı öğrencilere sağlıklı aktarması çok mümkün görünmemektedir. Çünkü bir kavramı bilmek sadece kavramın adını bilmek, tanımını yapmak ve birkaç örnek vermek değildir (Ercire vd., 2016). Bir kavramı bilmek o kavramı anlamlandırmak, o kavramın birden çok kavramla ilişkisini kurabilmek ve anlayabilmektir.

İrrasyonel sayılar ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde irrasyonel sayıları kavramada ve anlamlandırmada öğretmen adaylarının da bazı sorunlar yaşadıkları görülmektedir. Çevikbaş ve Argün (2017), yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin birçoğunun rasyonel ve irrasyonel sayılar konularında kavram bilgilerinin eksik ya da hatalı olduğunu belirlemişlerdir. Ayrıca katılımcıların, rasyonel ve irrasyonel sayıları birbirinden ayırt etmede yeterince başarılı olmadıkları ifade edilmiştir. Benzer şekilde Güler (2017), tarafından yapılan matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılarla ilgili kavramsal anlayışlarını incelediği çalışmada öğretmenlerin irrasyonel sayılar konusunda bilgilerinin yetersiz olduğu ayrıca kavram yanlışlarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Adıgüzel (2013), çalışmasında 8.sınıf öğrencileri ve matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılar ile ilgili bilgi eksiklikleri olduğunu belirtmiş ayrıca irrasyonel sayılar kümesinin sonsuzluk bilgisi gerektirmesinden dolayı zor kavrandığını belirtmiştir. Çiftçi vd. (2015), çalışmalarında matematik öğretmeni adaylarının bir sayının irrasyonelliğinin gösterimi noktasında sınırlı sayıda yol kullandıkları ve irrasyonel sayıların gösterimi ile ilgili farklı çözüm yollarını tercih ettiklerini belirlemişlerdir. Zazkis ve Sirotic (2004), yapmış oldukları çalışmada katılımcıların büyük çoğunluğu irrasyonellerin sonsuz ve tekrarlanmayan kısmı hakkında ondalık gösterimleri dikkate alarak açıklama yaptıkları tespit edilmiştir. Sonuç olarak, katılımcıların sezgileri ile formal bilgileri arasında tutarsızlıklar olduğunu görülmüştür. Güven vd. (2013) ilköğretim matematik öğretmen adayları üzerinde yapmış oldukları çalışmada katılımcıların önemli bir kısmının irrasyonel sayıları istenen düzeyde ifade edemediklerini belirtmekle birlikte özellikle üniversiteye yeni başlayan öğretmen adaylarının bilgilerinin çok yetersiz olduğunu belirtmişlerdir. Uçar'ın (2016) öğretmen adaylarının rasyonel sayıları genellikle kesir gösterimi ile irrasyonel sayıları ise kök temsili ile ilişkilendirdikleri yönündeki tespiti benzer bir sonucu ortaya koymaktır.

İrrasyonel sayıların öğretimindeki bu zorluklardan ötürü bazı öğretim önerileri doğal olarak ileri sürülmüştür. Horzum (2016) yapmış olduğu çalışmada sunduğu öneriye göre görsel modellerin kullanılması "*sonlu veya tekrar eden sonsuz ondalık basamaklı temsiller*", irrasyonel sayılar için ise "*tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller*" tanımı ile rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları sezdirilerek öğretilir. Bu açıdan sezgisel bir anlam yapısının oluşumu önemli ölçüde öğrenme deneyimi ile ilişkili görülebilir.

Popovic'in (2015) belirlemesine göre matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıları öğretirken doğrudan tanımlamaya başvurmadan yapacakları öğretimin başarılı olacağı şeklindedir. Ayrıca bu konuda uygulamada kullanılacak bazı yöntemlerin örneğin spiral çizme uygulamalarının öğrenciler için pozitif sonuçlar doğurduğu bildirilmiştir (Levis, 2007). Benzer şekilde Coffey (2001) yapmış olduğu çalışmada cebir ve geometrinin birleştirilmesi uygulamalarının irrasyonel sayıların kavranmasında öğrencilere bir perspektif sağladığını belirtmiştir. Bu araştırma kapsamında ise araştırmacılar açısından en çok göze çarpan olgunun deneyim olduğu varsayılmaktadır. Bu açıdan deney veya uygulamalar yapmanın öğrenmede deneyim açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Deneyime ilişkin olarak Dewey (2011) deneyim temeli üzerinde kurulu bir eğitim anlayışının daha sonraki deneyimleri de üretken ve yaratıcı bir şekilde desteklemesi gerektiğini belirtmektedir. Bununla beraber deneyim edinme sürecinde kullanılacak materyalin bireylerin ihtiyaç ve kapasitelerine uygun seçilmesi gerektiği, aksi halde bireylerin kendilerini bu materyale uyumlu hale getirmede başarısız olacaklarını, bu durumda deneyimin eğitici olma özelliğini kaybetmesine yol açacağını belirtmektedir. Bu açıdan ortaokul matematik öğretim programında kullanılan soyut materyaller olması irrasyonel sayılara yönelik bu deneyimin istenen şekilde sonuçlanmayacağı ve önemli öğrenme boşlukları yaratacağı sonucuna ulaşılmaktadır. Uçar'a (2016) göre bu durum irrasyonel sayılara ilişkin öğretmen adaylarının tanım ve formel bilgilerinden ziyade geçmiş deneyimlerine göre karar vermeleri neden olmaktadır. Ancak burada ifade edilen deneyim günlük yaşam deneyimlerinden ziyade öğretmen adaylarının okul sürecinde yaşadıkları yetersiz ve uygulama içermeyen deneyimlerdir.

Araştırmanın amacı ve gerekçesi İrrasyonel sayılar konusuna ilişkin ilgili literatür ele alındığında bu sayıların öğretimi konusunda önemli bazı sorunların devam ettiği görülmüştür. Buna ek olarak araştırmayı yapan araştırmacıların deneyim ve informal gözlemlerine dayalı olarak irrasyonel sayılara ilişkin öğretmenler arasında önemli bir önyargı olduğu sezilenmiştir. Bu durumda mevcut çalışmalara ek bir katkı sunması amacıyla bu çalışma, irrasyonel sayıların öğretimi ile ilgili sorunların giderilmesinde bir katkı sunabileceği gibi aynı zamanda bu durumun matematik eğitimi açısından da önem taşıyacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmanın temel amacı ortaokul matemaik öğretmenlerinin irrasyonel sayılar hakkındaki görüşlerini ortaya koymaktır. Temel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılar hakkındaki algıları nasıldır ve nelerden etkilenmektedir?
2. Ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılarla ilgili deneyimleri nelerdir?
3. Ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara yönelik neler hissetmektedirler?
4. Ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıların günlük yaşamda kullanımını ve gerekliliği hakkında neler düşünmektedirler?

2. Yöntem

2.1. Araştırma Deseni

Bu araştırma fenomenolojik (olgubilim) desende yürütülmüş nitel bir çalışmadır. Fenomonolojik çalışmada araştırmacı odaklandığı temel nokta bir fenomen/olay/kavram ile ilgili araştırmasına katılan bütün bireylerin ortak deneyimlerinin ne ifade ettiği (Güler vd., 2013). Fenomonolojik araştırmanın temel amacı bir fenomen ile ilgi kişisel tecrübeleri evrensel bir esasın gerçeğin tanımlanmasına indirgenmesidir (Creswell & Tashakkori 2007). Burada veri kaynakları araştırmanın odaklandığı olguyu yaşayan ve bu olguyu dışa vurabilecek veya yansıtabilecek bireyler ya da gruplardır (Yıldırım & Şimşek, 2011). İrrasyonel sayıların öğretimi üzerinde yapılan birçok çalışma olmasına rağmen sahada deneyimlerinin yer aldığı çok fazla araştırma bulunmamaktadır. Spesifik bir konu özelinde çalışmanın da beklentisiyle bir taraftan çalışmaya derinlik katmak öte taraftan katılımcıların kendi deneyimlerine odaklanmak amacıyla bu yöntem ve desenin uygun olacağına karar verilmiştir.

2.2. Evren ve Örneklem/Çalışma Grubu

Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme tekniği esas alınarak katılımcılar oluşturulmuştur. Ölçüt örnekleme; örneklemin problemle ilgili olarak belirlenen niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesnelere ya da durumlardan oluşturulmasıdır (Büyüköztürk, 2012). Ölçüt olarak matematik öğretmeni olmak, kamu okulu ortaokul kademesinde aktif görev yapıyor olmak yer almıştır. Bu bağlamda araştırmaya katılımcı bulmak amacıyla Güneydoğu Anadolu Bölgesinde bir ilin ortaokul matematik öğretmenleri ile ön görüşmeler yapılmış bu görüşmeler sonucunda katılmak isteyen öğretmenlerin gönüllülük temelinde rızaları alınmıştır. Çalışmada toplam 31 öğretmen yer almıştır. 31 öğretmen ile sınırlı kalınmasında veri doygunluğu esas alınmıştır. Nitel araştırmalarda katılımcı sayısının belirlenmesinde araştırmacının görüşmeler doğrultusunda verilerin tekrara bindiğine, veri doygunluğuna erişildiğine kanaat getirmesi belirleyicidir (Glesne, 2013).

2.3. Araştırma süreci

Çalışmalar sonucunda geçirilen görüşme formu araştırmaya gönüllü katılan öğretmenlere görüşmeler yoluyla yöneltilmiştir. Yüzyüze görüşme imkanı olan öğretmenlerle yüz yüze görüşülmüş, diğer öğretmenlerle de çevrimiçi görüşme yapılmıştır. Yüz yüze görüşme sayısı 20, çevrimiçi görüşme

sayısı 11 dir. Görüşmeler ortalama 30 dakika sürmüştür, en uzun görüşme 35 dakika en kısa görüşme ise 25 dakika sürmüştür. Katılımcılarla yapılan görüşmeler kaydedilmiş ardından bu kayıtlar transkript edilerek analiz edilmeye hazır duruma getirilmiştir.

2.4. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada veri toplama aracı geliştirilmeden önce matematik alanında uzman iki öğretim elemanı ile görüş alışverişinde bulunulmuş ardından görüşme sorularının hazırlanması için ilgili literatür gözden geçirilmiştir. Bu sürecin sonucunda toplam 13 soruluk yarı yapılandırılmış bir görüşme formu oluşturulmuştur. Elde edilen form için hem görüş alınan uzmanlara hem de araştırma yöntemleri konusunda uzman olan toplam dört öğretim üyesine danışılmıştır. Formun ilk hali toplamda 13 soru iken yapılan görüşme ve değerlendirmeler sonucunda görüşme formunda olması gereken soru sayısı 11'e düşürülmüştür. Bu süreç sonucunda elde edilen form öğretmenlere görüşmeler yoluyla sunulmuştur.

2.5. Verilerin Analizi

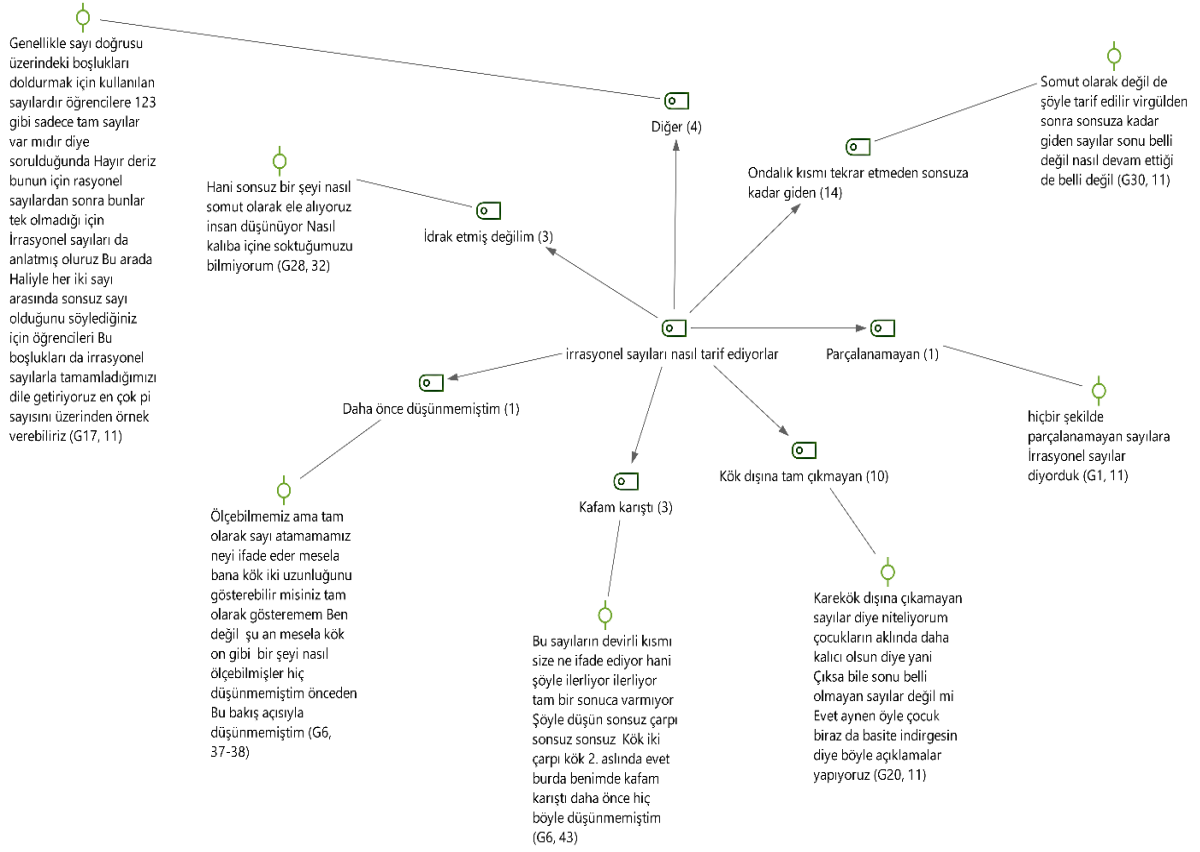
Bu araştırmada verilerin çözümlenmesi için içerik analizi yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2011). Verilerin doğru bir şekilde yansıtmak amacıyla içerik analizinde kullanılan bir bilgisayar programından yararlanılmıştır. Veri analizinde güvenilirliği sağlamak amacıyla başlangıçta dört görüşme yapılmış ve bu görüşmelerin ses kayıtları ile birlikte transkriptleri araştırmacılar tarafından tartışılmıştır. Yapılan tartışmalar sonucundan anlam kayıpları ve anlam kaymalarının en aza indirgenmesi için soruların doğru bir şekilde ifade edilmeleri ve katılımcılar tarafından istenilen şekilde anlaşılması için gerekli önlemlerin nasıl alınacağı konusunda uzlaşmaya varılmıştır. Kodlama sürecinde araştırmacılarından birinin nitel araştırma geçmişi yeni olduğu için kodlama sürecine dahil olmaması ancak elde edilen sonuçların verilerle tutarlılığını yansız bir gözle karşılaştırması karar bağlanmıştır. Ayrıca elde edilen verilerin analizi sonucunda bazı görüşlerin doğruluğunun teyidi için katılımcılara yeniden sorulmasını sağlamıştır. bu şekilde araştırmanın güvenilirliği ve geçerliği için çaba sarfedilmiştir. Ek olarak işlem sürecinde ayrıntılar paylaşarak ve elde edilen bulgularda doğrudan alıntılar yaparak güvenilirlik ve geçerlik desteklenmiştir. Verilerin analizinde kodlamaya bağlı olarak kategoriler elde edilmiş ve bunlar sınıflandırılmıştır. Bulguların daha iyi anlaşılması için veri şemalarının kullanılmasının uygun olduğuna karar verilmiştir.

2.6. Araştırma Etiği

Araştırma sürecinde etik ilkelere olabildiğince riayet edilmiştir. Bu konuda katılımcıların talebi olan araştırma sonucundan haberdar olma sözü yerine getirilmiş, yayına hazırlanma sürecinde katılımcıların sordukları sonuçlar hakkında bilgi verilmiştir (Etik Kurulu Kararı Tarih ve Sayısı: 03.03.2023-4369).

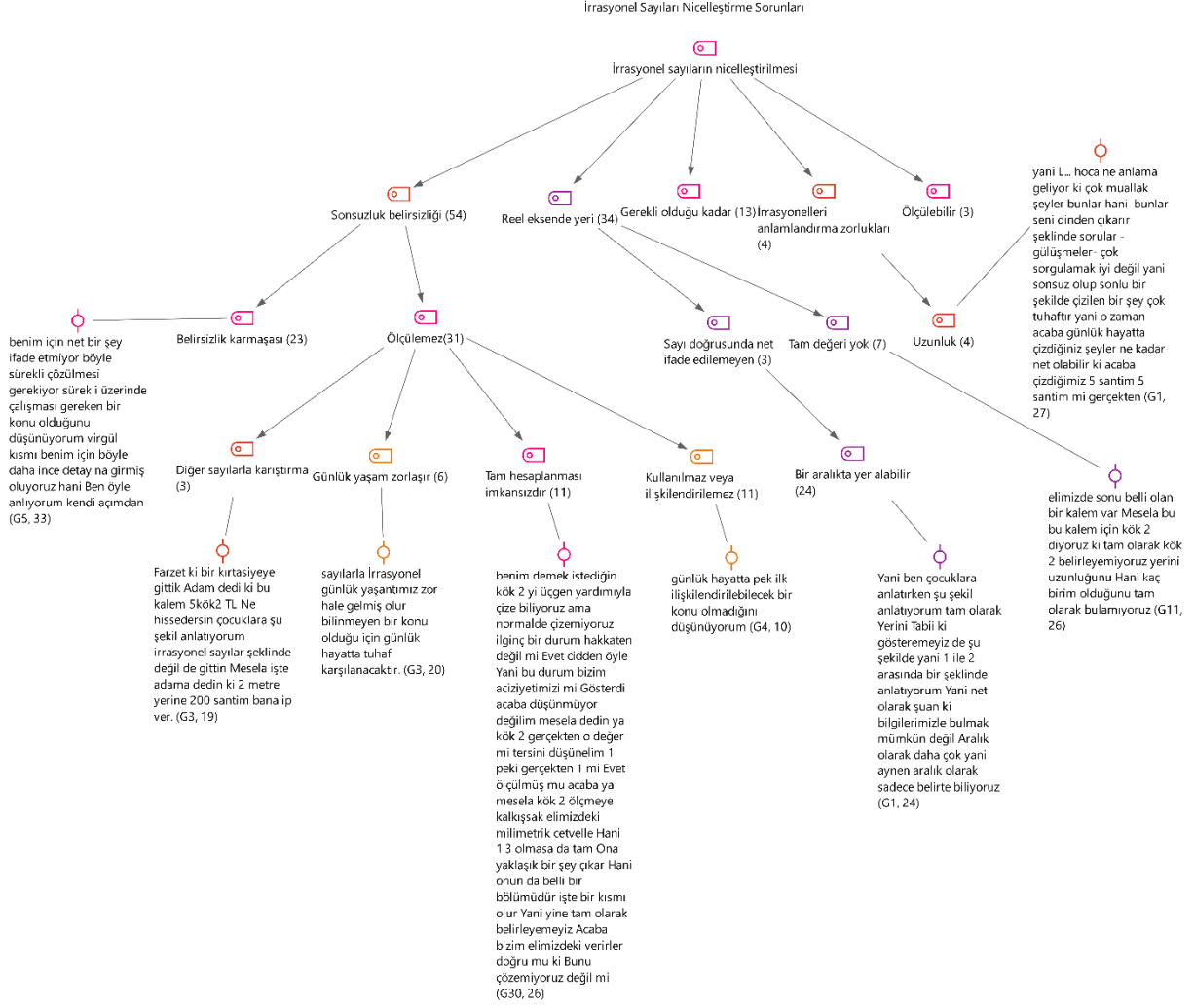
3. Bulgular

Araştırmanın bu kısmında elde edilen bulgular ve bunlara yönelik yorumlar yer almaktadır. Bulgular ve doğrudan alıntılar aynı şekil içinde verilmiştir. Araştırma sürecinde önemsenen olgulardan biri katılımcıların rasyonel sayıları nasıl tarif ettikleridir. Burada ifade edilen tarifin tanımlamadan daha geniş bir kavram olduğu görülmelidir. Şekil 1'de katılımcıların irrasyonel sayıları tarif etme türlerine göre sınıflandırılması görülmektedir.



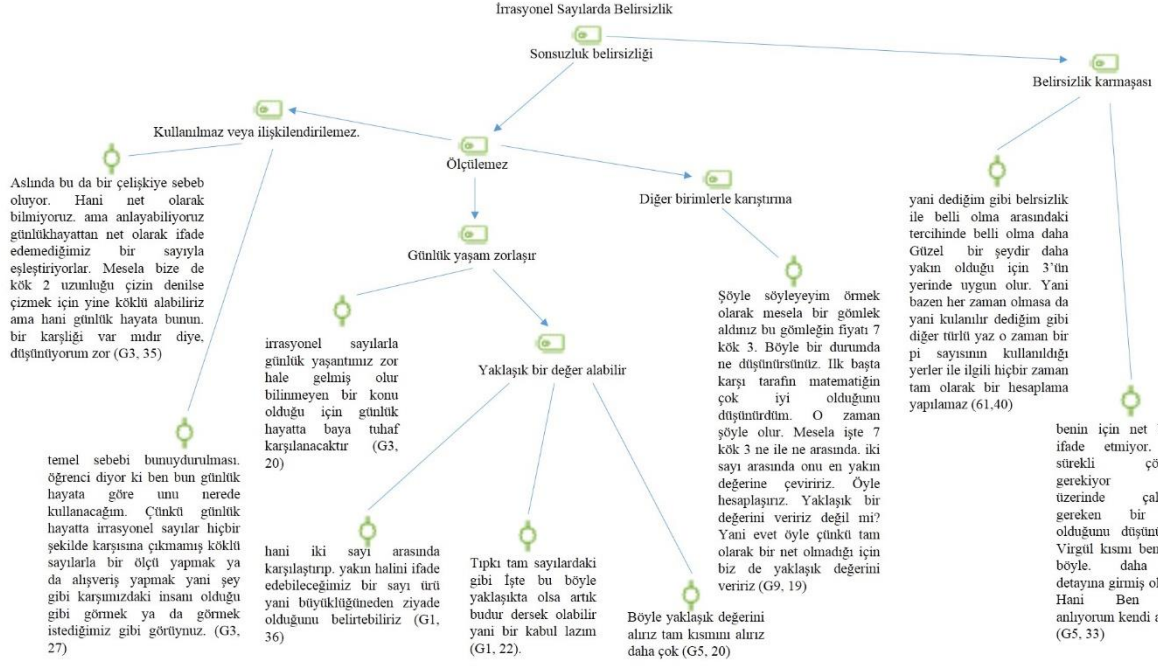
Şekil 1. Katılımcıların irrasyonel sayıları nasıl tarif ettiklerine ilişkin bulgular

Şekil 1’de katılımcıların irrasyonel sayıları tarif etmedeki görüşleri görülmektedir. Araştırmada kasıtlı olarak nasıl tanımlarsınız şeklinde sorulmayan bu soru temel olarak matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıları tam olarak nasıl algıladıklarını belirlemek ve bunu bir başkasına ifade etmek istediklerinde nasıl tasvir edebilecekleri üzerinde durulmuştur. Buna göre katılımcıların ağırlıklı olarak uzlaşıya vardıkları bir tarif durumu olmadığı görülmektedir. Bununla beraber “ondalıklı kısmının tekrar etmeden sonsuza kadar gitmesi” ve “kök dışına tam çıkmayan” sayılar olarak ifade edildiği görülmüş ve bunun bir sayısal çoğunluğa karşılık geldiği görülmektedir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken diğer görüşler de önem taşımaktadır. Özellikle “idrak edilmemesi” ve “sayı doğrusu üzerinde boşlukları doldurmak için kullanılan” sayılar şeklinde ifade edilmesi bu örneklem kapsamında da olsa irrasyonel sayılara ilişkin yeterli düzeyde bir öğretmen algısı olmadığı çıkarımına yol açmaktadır.

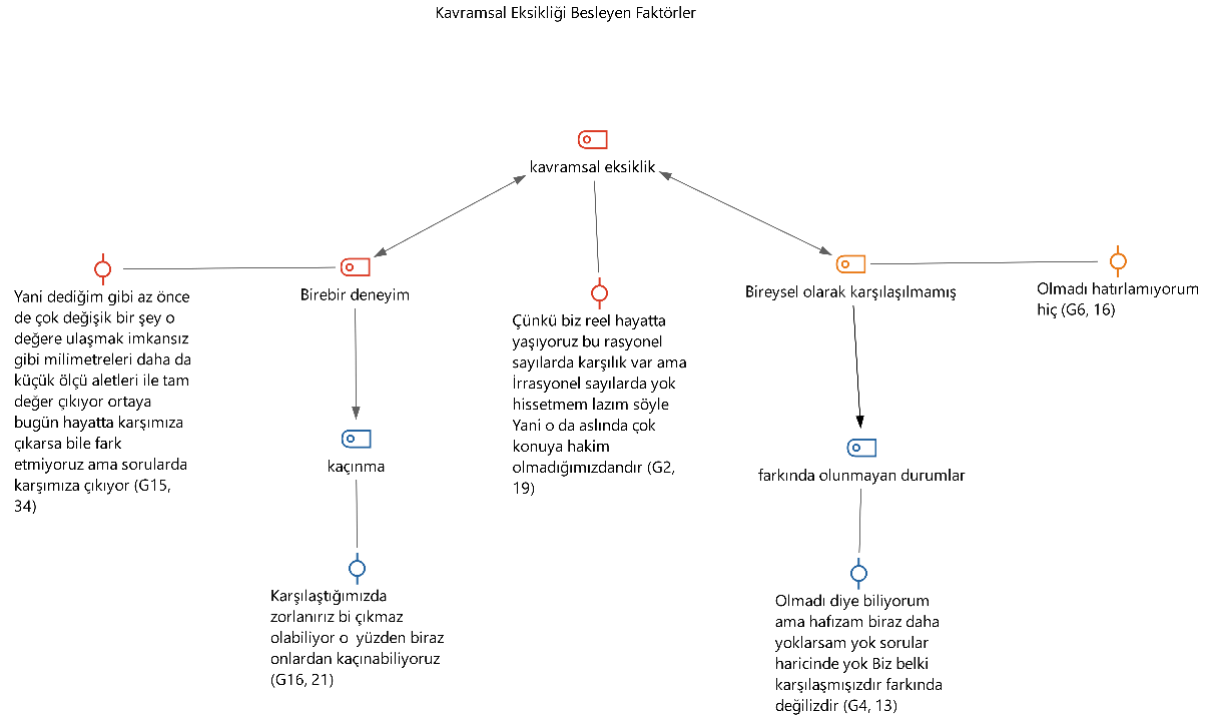


Şekil 1. Katılımcıların irrasyonel sayıları nicelleştirme sorunlarına ilişkin bulgular

Şekil 2’de katılımcıların irrasyonel sayıları nicelleştirme sorunları görülmektedir. Elde edilen bulgulara göre katılımcıların irrasyonel sayıları nicel bir değer olarak görmekte zorlandıkları, bu sayıları bir sayı olarak görmekten ziyade daha çok sembol nitelikli bir algıya sahip olduklarını görmek mümkündür. En önemli değerlendirmelerden biri olarak günlük yaşamı zorlaştıracağı sonucudur. Bunu gizil olarak barındıran ölçülebilirlik sorunu, belirsizlik durumları ve günlük yaşamda kullanılamaz olduğu ifadeleridir. Böyle bir durumda irrasyonel sayıların günlük yaşamda kullanılması neredeyse imkânsız bir duruma geçmesi ve hassas hesaplamaların gerektiği yerlerde kullanılamayacağı anlamı çıkacağıdır.

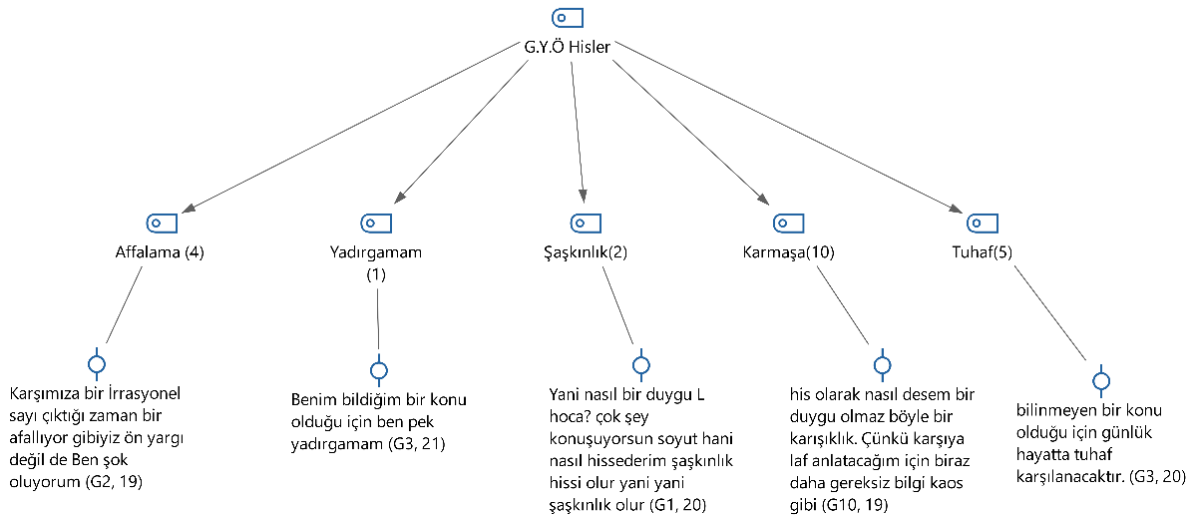


Şekil 3'te katılımcıların irrasyonel sayıların belirsizliğine ilişkin görüşleri ele alınmaktadır. Bu araştırma kapsamında en dikkat çekici noktalardan biri olan irrasyonel sayıların belirsizliği olgusudur. Buna göre katılımcıların tamamında olmasa bile belli oranda bu belirsizlik olgusu mevcuttur. Özellikle sonsuzluk belirsizliği olarak adlandırdıkları durum kısaca “sonsuz bir değer sayı doğrusunda nasıl ifade edilebilir? Kafam karıştı”, “belirsiz olduğu için tam değeri ölçülemez” buna bağlı olarak “günlük yaşam zorlaştır” gibi ifadeler bu durumu açıklar niteliktedir. Ayrıca bu sonsuz (ondalık kısmın tekrarsız) devam etmesi bir belirsizlik karmaşası yarattığı da ulaşılan sonuçlardır.



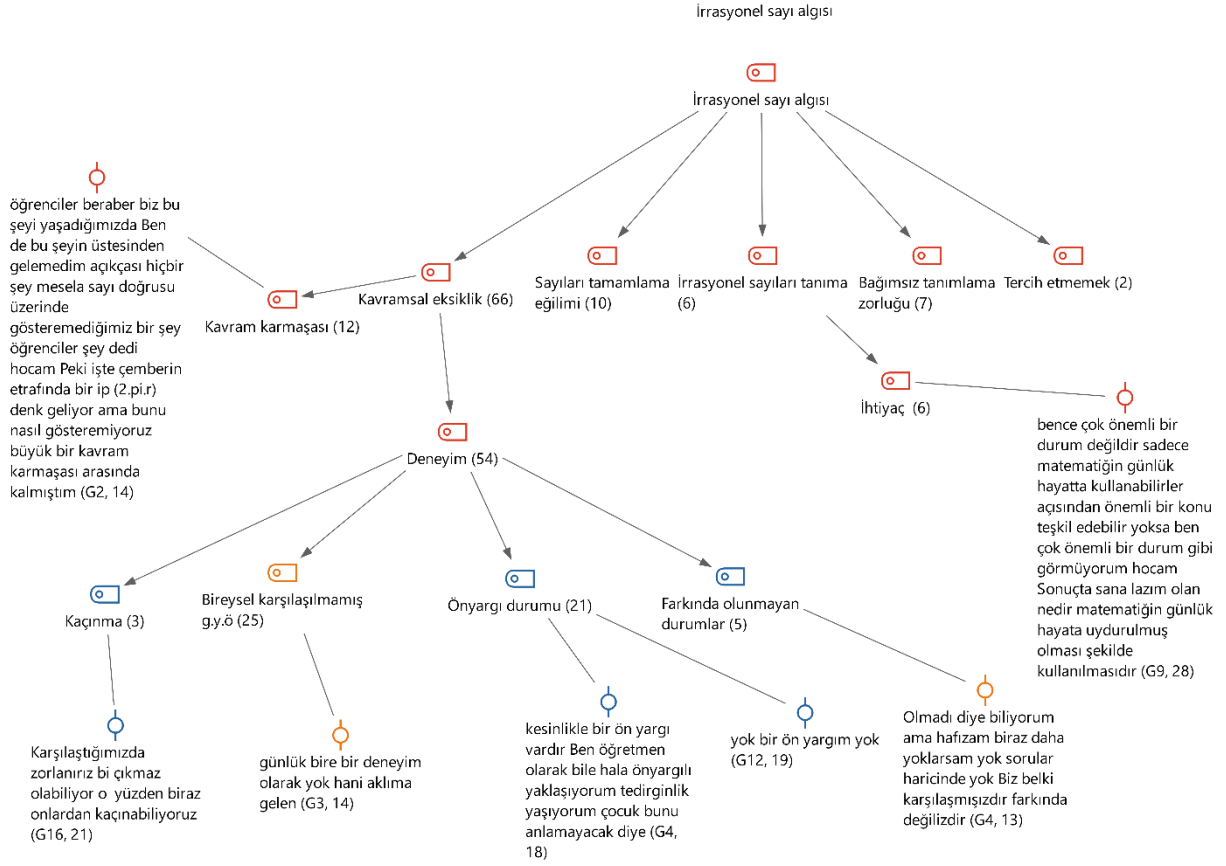
Şekil 4'te ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılarda kavramsal olarak bir eksikliğe sahip olduğu ve bunun nedenleri görülmektedir. Buna göre ortaokul matematik öğretmenlerinin kavramsal eksiklerini besleyen temel olgunun deneyim eksikliği olduğu görülmektedir. Özellikle birebir deneyimin yetersizliği bu konuya yönelik kavramsal öğrenmeyi destekleyecek ortamların oluşmasını negatif etkilediği görülmektedir. Ayrıca konuya ilişkin başkalarının karşılaştığı ancak matematik öğretmenine yansımaları olmayan “bireysel olarak karşılaşılmamış” durumlar da deneyim eksikliği durumunun oluşmasını desteklemektedir. Böyle ortamların var olmayışı esas olarak bu sayıların kullanılmasını gerektiren elverişli ortamların ortaya çıkması gibi durumlarda “farkında olunmayan durumlar’ın” oluşmasına, birebir deneyimlerin ortaya çıkma durumlarında ise “kaçınma” davranışına yol açtığı görülmektedir.

Ortaokul Matematik Öğretmenleri G.Y.Ö. Ne His etmektedirler



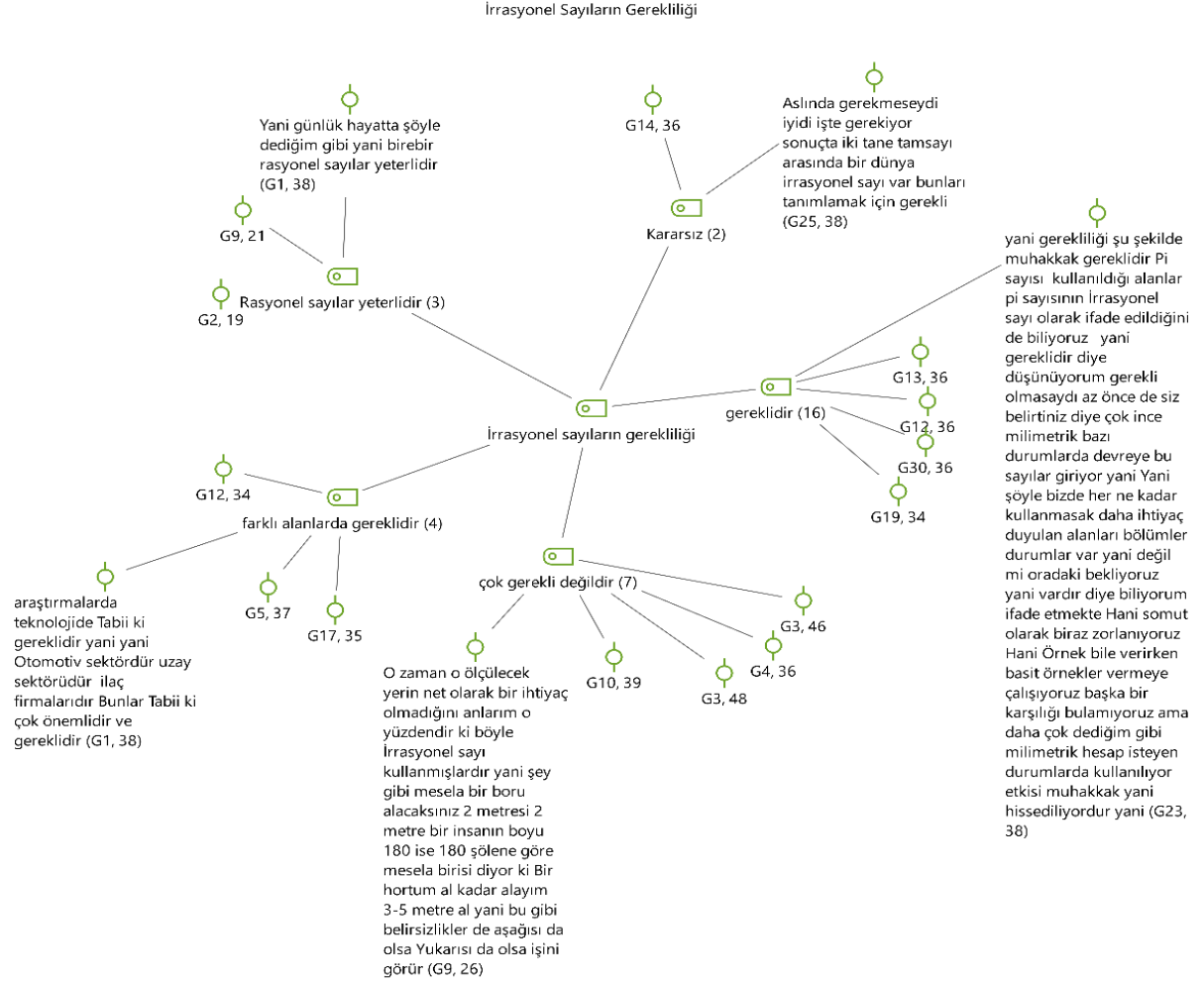
Şekil 4. Ortaokul matematik öğretmenlerinin Günlük Yaşam Örneklerinde (GYÖ) ne his ettiklerine ilişkin bulgular

Şekil 5'te ortaokul matematik öğretmenlerinin günlük yaşamda irrasyonel sayılarla karşılaşma durumunda ne hissedeceklerine ilişkin görüşlerini ifade eden şema görülmektedir. Bu durum ele alındığında gerçekte hemen hemen hiç karşılaşmadıkları bir durum göz önüne alınmaktadır. Çünkü ilgili öğretmenlerin bu yönlü bir deneyimleri olmadığı görüşmelerde ifade edilmiştir. Buna göre karşılaşma durumlarında ise bir karmaşa yaşayacaklarını, bu durumu tuhaf karşılayacaklarını veya affalama yaşayacaklarını ifade etmişlerdir. Bu durum esas olarak irrasyonel sayılara ilişkin katılımcıların içinde buldukları duyuşsal durumu özetlemektedir.



Şekil 5. Katılımcıların genel olarak irrasyonel sayıları algılama tiplerini gösteren şematik duruma ilişkin bulgular

Şekil 6 ortaokul matematik öğretmenlerinin genel olarak irrasyonel sayı algısını göstermektedir. Buna göre ağırlıklı olarak irrasyonel sayılara yönelik kavramsal bir eksiklik olduğu ve bunun oluşmasını destekleyen deneysel bir yetersizlik olduğu ayrıca deneyimi etkileyen ana unsur olan bireysel olarak irrasyonel sayılarla karşılaşmamış olmasının yanında ağırlıklı bir önyargı durumunun varlığı da kendini göstermektedir. Ayrıca irrasyonel sayılara ilişkin yeterli düzeyde bir kavramsal şemanın eksikliği bu sayılara yönelik öğretmenlerin zihninde bir kavram karmaşasını oluşturduğu da ayrıca görülmektedir. İrrasyonel sayılara yönelik algının biçimlenmesini etkileyen ve nedensel olarak izi sürülebilen diğer bir durumun irrasyonel sayıları teşhis etme veya tanımadır. Bu durumu günlük yaşamda destekleyen negatif durumun da ihtiyaç olduğu görülmektedir.



Şekil 6. Katılımcıların irrasyonel sayıların günlük yaşamda gerekliğine yönelik görüşleri

Şekil 7’de ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıların günlük yaşamda gerekliğine ilişkin görüşlerinin şeması görülmektedir. Buna göre genel olarak irrasyonel sayıların gerekli olduğu kanısı hâkim olsa da diğer görüşlere yönelik ifadelerin gerek sayısal olarak gerekse de içerik olarak taşımış oldukları anlamlar göz ardı edilemeyecek bir durum arz etmektedir. Bu duruma uygun olarak ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıların gerekliğine ilişkin yeterli bir inanca sahip oldukları tam olarak ifade edilemez. Günlük yaşamda kullanımı açısından bu durum esas olarak yaklaşık değerler taşımasından, rasyonel sayıların ihtiyaçları gidermekte yeterli olmasından veya konuya ilişkin kararsız olmalarından kaynaklandığı görülmektedir. Bir diğer unsurun farklı alanlarda gerekli olduğunun ifade edilmesidir ki bu konulara ilişkin görüşmeler boyunca öğretmenlerin kulaktan dolma bilgilere sahip olduğu esas olarak uygulamada nasıl kullanıldığına yönelik herhangi bir bilgiye sahip olmadıkları görülmüştür.

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırma problemlerinin dahilinde ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara yönelik yaklaşımlarını belirlemek için öncelikle onların irrasyonel sayıları nasıl tarif ettiklerine odaklanmanın esas olarak irrasyonel sayıları zihinlerinde nasıl canlandırdıklarına ilişkin önemli fikirler verebileceği düşünülmüştür. Bununla birlikte, öğretmenlerin kendileri ilgili içerik bilgisine sahip değilse, öğrencilerde anlayışa ulaşmak olası değildir (Sirotic & Zaskis, 2007). Bu yaklaşıma başvurulmasının nedeni, genelde insanların formel tanımları başka bireylere transfer ederken ek bilgilendirme yaparak vermek istedikleri mesajları netleştirmek istemeleridir. Günlük yaşamda da

sıklıkla karşımıza çıkan bu durum anlam inşasında belirleyici bir role sahiptir. Çünkü olayı kavramaya çalışan birey olay etrafında dönen bir takım anlam parçalarını birleştirerek kendi anlam yapısını oluşturmaya çalışacaktır. Bunun yanında Güven vd. (2013) yapmış oldukları çalışmada öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin güçlü bir tanıma sahip olmadıkları ayrıca Çevikbaş ve Argün'ün (2017) belirlemelerine göre de kavramın tanımının bilinmesi kavramsal bilginin oluşturulması için yeterli gelmediğini belirtmişlerdir. Bu açıdan bakıldığında katılımcıların irrasyonel sayılara ilişkin kendi tarifleri ve tasvirleri öğrencilerin zihinlerinde de bir şemasını oluşturmada etkili olacaktır. Orta okul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayıları tarif etme biçimleri ele alındığında net bir ifade kullanmak mümkün olmasa da genel olarak irrasyonel sayıları köklü sayılarla ilişkilendirmenin yanında ondalık sayılar türünden ifade etme eğilimlerinin ağır bastığı görülmüştür. Bu durum esas olarak Horzum'un (2016) da belirtmiş olduğu tanımlama ve tarifin çok uzağında değildir. Ancak araştırma kapsamında karşılaşılan "kafam karıştı" veya "daha önce düşünmemiştim" biçimindeki ifadelerinin irrasyonel sayılara ilişkin istenen düzeyde bir algının var olmadığını ve bunun doğal olarak öğrencileri de benzer şekilde etkileyeceğini görmek zor değildir. Bu araştırma kapsamı ile sınırlı dahi olsa katılımcıların bu konuya "çekinik" yaklaştığına dair ip uçları barındırmaktadır. Bu durum Adıgüzel'in (2013) araştırmasında *bulguladığı öğretmen adaylarının çoğunun irrasyonel sayılar ile ilgili bilgilerinin ezbere dayalı kalıplaşmış bilgiler olduğu ve bu nedenle farklı yorum gerektiren durumlarda başarısız kalmaları* ifadesi ile tutarlı görülmektedir. Böyle bir durum ise sayı kavramının okul ve günlük yaşamda kullanımında bazı eksiklikler içermekte olduğunu görmemizi sağlamaktadır.

Yürütülen bu araştırma kapsamında katılımcıların irrasyonel sayıları nasıl nicelleştirdikleri konusu belirleyicidir. Burada söz konusu ifade genel olarak matematikte nesnelere nitelikleri ile değil daha çok nicel yönlerine odaklandığımız kabul görecektir. Varlıkları nicelleştirme sürecinde kullandığımız nesnelere olan sayılar açısından irrasyonel yapılara hangi bakış açısı ile sayısallaştırma ve diğer sayılarla olan ilişkileri belirleme önem taşıyacaktır. Araştırma kapsamında katılımcıların irrasyonel nicelleştirme süreci ele alındığında önemli görülebilecek ipuçlarına ulaşıldığı düşünülmektedir. En önemli kavramsal durumlardan birinin "sonsuzluk belirsizliği" kavramı olduğu görülebilir. Çoğunlukla bir kafa karışıklığının yaşandığı durum "sonsuz bir sayıyı nasıl sayı doğrusunda gösterebiliriz" sorunsalıdır. Bu durum elbette öğretmenlerin bazı kavramsal eksikliklerine dayandırılabilir, örneğin sınırlılık kavramına bu araştırma kapsamında hiç rastlanmamıştır. Bu açıdan "öğrencilerin bir sayının var olduğuna dair güvenceden, bu sayıya istenildiği kadar ondalık basamakla yaklaşabileceğimizi bilmeye, bu sayının değerinin bir dizinin sınırı olduğunu bilmeye geçişini sağlayacak öğrenme deneyimlerini hazırlamaya yönelik bir ilk yaklaşım" (González-Martín et al., 2014) belirlemesi ile tutarlı görülmektedir. Ancak reelde yaşanan bu kavramsal eksiklik durumunun etkilerini göz ardı edemeyeceğimiz kadar önemli olduğu düşünülmektedir. Bu durum genelde katılımcıların irrasyonel sayıları anlamlandırmada önemli zorluklar yaşadıklarını da beraberinde getirmektedir. İfade edilen bu olgu Ozan ve Narlı'nın (2018) sonsuzluk kavramına ilişkin belirlemeleriyle uyusmaktadır. Özellikle irrasyonel sayıların ölçülemez olarak nitelendirilmesi, kullanılması imkânsız ve çok zor bir yapı ile karşı karşıya olduğumuzu gösterir bir durumdur. Böyle bir durumda irrasyonel sayılara yönelik bir sayı duyusunun oluşması çok zor ve bunun günlük yaşamda kullanılmasını da imkânsız hale getirmektedir. Oluşacak böyle bir önyargının ise bu durumda olan öğretmenlerden ders alacak öğrencilerde kalıcı bir takım olumsuz etkileri olacağını, gelecekte de bu öğrencilerin irrasyonel sayıları kullanma eğilimini önemli ölçüde engelleyeceğini göstermektedir. Bu durum Çevikbaş ve Argün'ün (2017) belirlemiş oldukları katılımcıların irrasyonel sayılar kümesinin kardinalitesini belirlemede gösterdikleri yetersizlik durumu ile ilgili sonuçlarla tutarlı görülmektedir. Kısaca irrasyonel nicelleştirme sürecinden önemli belirsizlik durumlarının olduğunu bu araştırma kapsamında söylemek mümkündür.

İrrasyonel sayılara ilişkin katılımcıların algılarını belirlemek amacıyla yapılan, yukarıda belirtilenlere ek ayrıntılı analizlerde, mikro düzeyde belirleyici faktörleri değerlendirme sürecinde irrasyonel sayılara ilişkin bir belirsizlik karmaşası yaşandığını göstermektedir. Bunun ana kaynağının ondaklı olarak devretmeyen bir yapıda sonsuz küçük olarak uzayan bir yapıyı anlamlandırmaktan kaynaklandığı düşünülmektedir. Bazı katılımcıların bu durumu kafa karıştırıcı olarak değerlendirdikleri yukarıda da belirtilmiştir. Dolayısı ile ölçülemez kavramının kendiliğinden geliştiği ve buna paralel olarak günlük yaşam ile ilişkilendirilmeyi zorlaştırdığı, günlük yaşamda uzlaşmayı zorlaştırdığı algısını ortaya çıkardığı sonucunun elde edildiğini görmekteyiz. Bu durum irrasyonel sayılardan uzaklaşma eğilimi doğurduğunu buna bağlı olarak hassas hesaplamayı gerektiren durumlarda da daha kaba hesapların tercih edilme zorunluluğunu örtük olarak taşıdığını görmemizi gerektirmektedir. Bu durumu besleyen esas önemli olgunun kavramsal eksikliği besleyen bazı durumların varlığı ile ilişkili olduğu düşünülmüştür. Bu durum kapsamında yapılan ayrıntılı analizlerde birebir deneyimin yaşanmaması olması katılımcıların bu durumdan uzaklaşmalarına yol açmış olduğu, bunun yanında bir tanıklık olarak bireysel karşılaşma durumlarının olmaması da bu durumu önemli ölçüde beslediği görülmüştür. Elbette bu durumun kendi içinde “kaçınma” gibi birtakım davranışları beslediğini ve bu davranışların da doğal olarak bu kavramlar hakkında araştırma ve öğrenmeyi sekteye uğrattığı düşünülmektedir. İrrasyonel sayılara ilişkin bu yaklaşım günlük yaşamda yaşantıda teşhis etmeyi zorlaştırdığı ve buna bağlı olarak karşılaşma durumlarında bile farkında olamama durumunu beslediği görülmüştür. Bazı öğretmenlerin bir alışverişteki fiyatları (kalem, defter gibi örnekler verilmiştir) irrasyonel olarak tarif edilmesi durumunda yaşanacak zorluklardan bahsetmeleri de tam olarak günlük yaşamda irrasyonel sayıların karşılaşma olasılığının yüksek olduğu yerler konusunda da bir deneyime sahip olmadıklarına işaret etmektedir.

Katılımcıların irrasyonel sayılara ilişkin algılarını belirleyen faktörlerden bir tanesinin irrasyonel sayılarla günlük yaşamda karşılaşma durumlarında ne gibi hisler taşıyabileceğine ilişkin tanımlamalarıdır. Bu durum öğretmenlerin konuya ilişkin düşünceleri açısından önemli bazı ipuçlarını taşıdığı görülmektedir. Örneğin bazı katılımcıların bir “affalama” yaşayabileceğini, diğer bazı öğretmenlerin “karmaşa”, “şaşkınlık”, “tuhaf” karşılayacaklarını belirtmeleri esas itibari ile irrasyonel sayı deneyimlerinin çok az olduğu ve bu duruma ilişkin de yeterli düzeyde bir sezgiye sahip olmadıklarını düşündürmektedir.

Bu araştırma kapsamında bir bütün olarak ele alacak olursak, ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara ilişkin algılarını belirleyen temel bazı başlıklar olduğunu söylemek mümkündür. Buna göre katılımcıların irrasyonel sayılara ilişkin yeterli düzeyde bir kavramsal şemaya sahip olmadıkları ve var olan şemanın da kavramsal bir karmaşa barındırdığını söylemek zorlanmış bir ifade olmayacaktır. Genelde kavramsal eksikliği besleyen faktörlerden biri, bireyin eğitim sürecini günlük yaşam pratiği ile güçlendirememesi olarak kabul edilmektedir. Burada görülmesi gereken temel olgunun maruz kalma ve maruz kalma sürecinde bireyin almış olduğu tutumun belirleyiciliğidir. Genelde bireyin kendi deneyimlerini yorumlama ve karşılaştıkları problemleri çözme yaklaşımı, problemler karşısında hangi bilgilere ihtiyaç duyduğunu belirlemesi ve bu bilgileri nasıl kullanacağına ilişkin yaklaşımı önemli olacaktır. Bu araştırma kapsamında katılımcıların günlük yaşam örneklerine yaklaşımlarında irrasyonel sayılara ilişkin yeterli bir seçici algıya sahip olmadıkları hatta önemli ölçüde ihmal ettiği görülmektedir. Yapılan analizlerde önyargı durumu bir bütün olarak ele alınmıştır. Önyargılı olduğunu belirten katılımcıların yanında ön yargılı olmadığını belirten katılımcıların olduğu görülmektedir. Ancak önyargılı olmadığını belirten katılımcıların ifade etmiş olduğu “şaşkınlık”, “tuhaf”, “karmaşa”, “şoke olmak” gibi ifadelerin de temelde bir önyargı durumuna işaret ettiği değerlendirilebilir. Bu açıdan bazı katılımcıların ifade ettiği “gerek bende gerekse diğer öğretmenlerde mutlaka bir önyargı vardır” ifadesi anlamlı olarak ele alınabilir.

Bu araştırma ulaşılmış olduğu bir diğer bulgu, katılımcıların algısını oluşturan etkenlerden biri olarak ihtiyaç hissetmeme duyuşsal yargı veya kararıdır. Yukarıda da belirtildiği gibi matematiği kullanarak hassas hesaplamaların yapılmasını önemli ölçüde etkileyecek olan bu durum her şeyden önce matematik öğretmenlerinin bu konuya yaklaşımları ile yakından ilgili olacaktır. Bu araştırma kapsamında bazı katılımcıların irrasyonel sayıları bağımsız tanımlama sorunu yüzünden kullanımda sorunlar olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum Uçar (2016) belirlemesine uygun düşmektedir. Yani irrasyonel sayıları rasyonel sayılar gibi tanımlayamamak onların kullanımını da olumsuz etkilemektedir. Bunun gibi bazı katılımcıların da irrasyonel sayıları rasyonel sayılara tamamlama eğiliminde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durum ilk bakışta bazı hassas hesaplamalar için bir anahtar kavram olduğu kabul edilebilir, ancak bu durumu ifade eden katılımcıların daha çok tam sayılara yuvarlama şeklinde ifade ettikleri görülmüştür. Bu duruma benzer olarak bazı katılımcıların ise irrasyonel sayıları genelde tercih etmedikleri belirttikleri görülmüştür.

Bu araştırmada elde sonuçlar kapsamında katılımcılara göre irrasyonel sayıların gerekliliği sorulması bir ihtiyaç olduğu görülmüştür. Bu kapsamda katılımcıların vermiş oldukları cevaplar analiz edildiğinde gerekli olduğu sayısal olarak baskın görülmektedir. Ancak diğer başlıklarla birlikte ele alındığında bunun dengeleyici bir rol oynadığı görülmektedir. Diğer başlıklarda kısaca kararsızlık, mecburiyet ve matematik öğretimi dışında kalan alanlarda gerekli olduğu tahmini ileri sürülmüştür. Bu noktada birer matematik öğretmeni olmanın yarattığı bir etkiyle gerekliliğin belirtilmiş olduğu düşüncesi doğmuştur. Çünkü günlük yaşamda matematiğin kullanımına yönelik ciddi bir belirsizlik olduğu yukarıda belirtilmiştir.

Tüm bu değerlendirmelerin ışığında ve bu araştırma kapsamında genel bir kanı olarak ortaokul matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara ilişkin yeterli bir bakış açısına sahip olmalarına ilişkin ciddi şüpheler vardır. Bu durumun öğrencilere yönelik olarak benzer etkiler yapması muhtemeldir. En önemli olgulardan biri matematikte temel olgulardan biri olan sayılara yönelik bu türden bir tutumun varlığı matematik yapma kaygısını da etkileyebileceği gerçeğinin göz önünde bulundurulması gerekliliğidir. Öğretmenlerin algılarında bu türden çekincelerin varlığı öğrencilerin zihinlerinde seviye veya sınıflar ilerledikçe matematiğin daha da zorlaşacağı kaygısını büyüteceği, bunun sonucunda matematiğin anlaşılması zor bir disiplin olduğu algısının oluşmasına etki edeceği tahmin edilebilir. Bu durumun aşılabilmesi için öncelikli olarak ortaokul matematik öğretmenlerinin bu türden eksikliklerinin hizmet içi kurslarla giderilmesi gerekliliği olduğu düşünülmektedir. Özellikle ölçmede kullanılacak yöntemlerin geliştirilmesi ve bunun günlük yaşam deneyimleri ile birleştirilmesi olumlu sonuçlar doğurabileceği düşünülmektedir.

5. Kaynakça

Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanlışları* (Tez No. 328692) [Doktora Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the learning of mathematics*, 7(2), 18-23.

Millî Eğitim Bakanlığı (2018). Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar). MEB.

Baki, A. (2014). *Matematik tarihi ve felsefesi*. Pegem Akademi.

- Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(2), 529-550.
- Büyüköztürk, Ş. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Pegem Akademi.
- Coffey, M. E. (2001). Irrational numbers on the number line: Perfectly placed. *The Mathematics Teacher*, 94(6), 453.
- Creswell, J. W., & Tashakkori, A. (2007). Differing perspectives on mixed methods research. *Journal of mixed methods research*, 1(4), 303-308.
- Çevikbaş, M., & Argün, Z. (2017). Geleceğin matematik öğretmenlerinin rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusundaki bilgileri. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 551-581.
- Çiftçi, Z., Akgün, L., & Soylu, Y. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(1), 341-356.
- Çoban, K., & Yenilmez, K. (2020). Sekizinci sınıf öğrencilerinin eşitsizlikler konusunda karşılaştıkları güçlüklerin incelenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi Eğitim Dergisi*, 5(1), 40-56.
- Dewey, J. (2011). *Eğitim ve deneyim*. ODTÜ.
- Ercire, Y. E., Narlı, S., & Aksoy, E. (2016). İrrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik öğrenme güçlükleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(2), 417-439.
- Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational studies in mathematics*, 29(1), 29-44.
- Giannakoulis, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education (pp. 416-425). Department of Education, University of Cyprus.
- Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş* (Çev. Ed. A. Ersoy & Yalçınoğlu). Anı.
- González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & Maschietto, M. (2014). *Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: Cases from the study of Calculus and proof*. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117-134. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918347>

- Güven, B., Çekmez, E., & Karatas, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS*, 21(5), 401-416.
<http://dx.doi.org/10.1080/10511970903256928>
- Güler, A., Halıcıoğlu, B. M., & Taşkın, S. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin.
- Güler, G. (2017). Matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara yönelik kavram bilgilerinin incelenmesi. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, 8(2), 186-215.
- Horzum, T. (2016). Irrasyonel sayıların öğretimi için görsel model önerisi: e ve π sayıları. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 1(1), 42-57.
- Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 133-149.
- Lewis, L. D. (2007). Irrational numbers can in-spiral you. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(8), 442-446.
- Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concept when building on informal knowledge. *Journal for Research Mathematics Education*, 26(5), 422-441.
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277-289.
- NCTM (2000). Principles and Standards for school mathematics Reston, Va. NCTM.
- Ozan, Pala., & Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12(2), 136-166.
- Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulty in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(1), 39-46.
- Popovic, G. (2015). Irrational numbers, square roots, and quadratic equations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(8), 468-474.
- Sbaragli, S. (2006). Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 5(2), 49-76.
- Shinno, Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: Epistemological considerations of irrational numbers. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185-192).
- Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 49-76.

- Temel, H., & Erođlu, A. O. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırmaları üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 22(3), 1263.
- Uçar, Z. T. (2016). Ortaokul Matematik öğretmeni adaylarının reel sayıları kavrayışlarında temsillerin rolü. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 24(3), 1149-1164.
- Voskoglou, M., & Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 301-336.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin.
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation, in *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, Vol. 4, (pp. 497–505).