SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
27-02-2017
Kabul/Accepted
01-06-2017

Doi
10.16984/saufenbilder.295208

Aynı tabanlı 2-çaprazlanmış modüller üzerinde tamlık

Koray Yılmaz*

ÖZ

Aynı tabanlı 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisinde herhangi bir **f** morfizmi alınarak geri çekmesi yardımıyla çekirdek ikili elde ettik. Ardından çekirdek ikilinin eş-eşitleyiciye sahip olduğunu gösterdik. Bu kategoride alınan her denklik bağıntısının etkili olduğu gösterilerek tam kategori şartları sağlanmıştır.
Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, Kategori, Tam Kategori

2-Crossed modules over same base

ABSTRACT

In the category of 2-Crossed modules over same base geven a morphism **f** , we obtain its kernell pair via pullback. Then showed that the kernell pair has a co-equaliser . The conditionsfor an exact category are satisfied by showing every equivalence relation in this category is effective.
Keywords: Category, Crossed Module, Exact Category

* Sorumlu Yazar / Corresponding Author
Dumlupınar University, Science and Art Faculty, Department of Mathematics,Kütahya
koray.yilmaz@dpu.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

İlk olarak 1949 yılında Whitehead [1] tarafından gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modül kavramı ilerleyen yıllarda cebir yapısına aktarılmış ve Lichtenbaum, Schlessinger [2]ve Gerstenhaber [3] farklı tanımlamalarla çaprazlanmış modüllerin cebir hali üzerine çalışmışlardır. Çaprazlanmış modüllerin cebir halleri üzerine Porter [4], Arvasi [5], Ulualan [6] çalışmaları mevcuttur.

2-çaprazlanmış modüller ilk olarak Conduche [7] tarafından homotopi 3-tip olarak tanımlanmış , değişmeli cebir hali Grandjean ve Vale [8] tarafından verilmiştir. Tam kategori kavramı 1971 yılında Barr [9] ve 1973 yılında Quillen [10]tarafından incelenmiş 1990 yılında Keller [11] eklemeli olmayan kategoriler için tam kategori tanımını vermiştir. Çalışmamızda 2-çaprazlanmış modüllerin aynı ön çaprazlanmış modül tabanı ile tam kategori olduğunu gösterdik.

1.1. Çaprazlanmış Modül (Crossed Module)

C ve R birer $\boldsymbol{k}$-cebir ve R nin C üzerine etkisi olsun. $\delta: C \to R$ $\boldsymbol{k}$-cebirlerin morfizmi olmak üzere eğer her $r \in R$ $c, c' \in C$ için

CM1. $\delta(r \cdot c) = r\delta(c)$
CM2. $c \cdot \delta(c') = cc'$

şartıda sağlanıyorsa (C, R, δ) üçlüsüne çaprazlanmış modül denir. [4]

(C, R, δ) ve (C', R', δ') iki çaprazlanmış modül olmak üzere, iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm her $r \in R$ ve her $c, c' \in C$ için,
$\psi(r \cdot c) = \varphi(r)\psi(c)$, $\delta'\psi = \varphi\,\delta$ eşitliklerini sağlayan $(\psi, \varphi): (C, R, \delta) \to (C', R', \delta')$ morfizmidir.

Objeleri (C, R, δ) ve morfizmleri yukarıdaki gibi tanımlı olan çaprazlanmış modüller kategorisini $\boldsymbol{XMOD}$ ile göstereceğiz. R sabit bir $\boldsymbol{k}$-cebir olmak üzere ilk bileşeni R cebiri olan tüm $\partial: C \to R$ şeklindeki çaprazlanmış modüllerin oluşturduğu kategoriyi $\boldsymbol{XMOD}_{/\boldsymbol{R}}$ şeklinde göstereceğiz.

1.2. 2-Çaprazlanmış Modül (2-Crossed Module)

Değişmeli cebirler üzerinde bir 2-çaprazlanmış modül, $_0$, C_1, C_2 birer k-cebir, C_1 ve C_2 birer C_0 −cebir morfizmi olmak üzere $\partial_2: C_2 \to C_1$, $\partial_1: C_1 \to C_0$ şeklinde C_0-cebirlerin bir kompleksinden oluşur. Burada C_0 kendi üzerine çarpma işlemi ile etki eder ayrıca C_1 cebirinin C_2 cebiri üzerine etkisi vardır ve $\partial_2: C_2 \to C_1$ bir çaprazlanmış modüldür. Bütün bu özellikler ile birlikte Peiffer Lifting dönüşümü olarak bilinen, C_0-bilineer fonksiyonu

$$\{\_,\_\}: C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_2$$

şeklinde bir dönüşüm vardır ve aşağıda verilen özellikleri her $x, x_1, x_2 \in C_2$, $y, y_0, y_1, y_2 \in C_1$ ve $z \in C_0$ için sağlar.

PL1. $\partial_2\{y_0, y_1\} = y_0y_1 - y_0 \cdot \partial_1(y_1)$
PL2. $\{\partial_2(x_1), \partial_2(x_2)\} = x_1x_2$
PL3. $\{y_0, y_1y_2\} = \{y_0y_1, y_2\} + \partial_1(y_2) \cdot \{y_0, y_1\}$
PL4. $\{y, \partial_2(x)\} + \{\partial_2(x), y\} = \partial_1(y) \cdot x$
PL5. $\{y_0, y_1\} \cdot z = \{y_0 \cdot z, y_1\} = \{y_0, y_1 \cdot z\}$

Bir 2-çaprazlanmış modülü $(C_2, C_1, C_0, \partial_2, \partial_1)$ şeklinde gösteririz.

$B := (B_2, B_1, B_0, \alpha_2, \alpha_1)$ ve $C: (C_2, C_1, C_0, \partial_2, \partial_1)$ iki 2-çaprazlanmış modül olmak üzere , C den B ye bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & C_0 \arrow[d, "f_0"'] \\ B_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & B_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & B_0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \arrow[r, "f_1 \times f_1"] \arrow[d, "\{\_,\_\}"'] & B_1 \times B_1 \arrow[d, "\{\_,\_\}'"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapan ve $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$f_1(c_0 \cdot c_1) = f_0(c_0) \cdot f_1(c_1)$$
$$f_2(c_0 \cdot c_2) = f_0(c_0) \cdot f_2(c_1)$$

şartlarını şağlayan (f_2, f_1, f_0) üçlüsüdür. Burada

$$\{\_,\_\}: C_1 \times C_1 \to C_2$$
$$\{\_,\_\}': B_1 \times B_1 \to B_2$$

Peiffer lifting dönüşümleridir. Böylece 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisi **X₂MOD** elde edilir. $\partial_1: C_1 \to R$ sabit bir ön çaprazlanmış modül olsun. İlk bileşeni ∂_1 ön çaprazlanmış modülü olan tüm 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisini $\mathbf{X_2MOD}_{/C\to R}$ ile gösterelim.

1.3. Çekirdek İkili ve Tam Kategori (Kernell Pair and Exact Category)

Tanım 1.3.1 $f: X \to Y$ ve $g: X \to Y$ dönüşümleri bir $\boldsymbol{C}$ kategorisinin morfizmleri olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (Q, h) ikilisine (f, g) ikilisinin eş-eşitleyicisi (coequaliser) denir.

i. Herhangi bir $f: Y \to Q$ morfizmi için, $hf = hg$ eşitliği vardır.

ii. $kf = kg$ özelliğindeki herhangi bir $k: Y \to Q'$ morfizmi için,

$uh = k$ olacak şekilde bir tek $u: Q \to Q'$ morfizmi vardır. [12]

Tanım 1.3.2 Bir **C** kategorisinde $f: A \to B$ ve $g: C \to B$ morfizmleri için $fp_2 = gp_1$ olmak üzere bir P' objesi için $fp'_2 = gp'_1$ olsun. Bu durumda $p_2\varepsilon = p'_2$, $p_1\varepsilon = p'_1$ eşitliklerini sağlayan $\varepsilon: P' \to P$ morfizmi tek ise (p_1, p_2) ikilisine f ile g morfizmlerinin geri çekmesi (pullback) denir. P objesine geri çekme objesi denir. Özel olarak g morfizmi yerine f morfizmi alınırsa (p_1, p_2) ikilisine f morfizminin çekirdek ikilisi (kernel pair) denir. [12]

Tanım 1.3.3 **C** herhangi bir kategori olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan **C** kategorisine tam kategori denir. [13]

T.K-1 Her morfizmin çekirdek ikilisi vardır ve bu çekirdek ikili eş-eşitleyiciye sahiptir.
T.K-2 Her denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.

2. $\mathbf{X_2MOD}_{/C\to R}$ KATEGORİSİNİN ÇEKİRDEK İKİLİSİ (KERNELL PAIR OF THE CATEGORY $\mathbf{X_2MOD}_{/C\to R}$)

$(A, C, R, \partial_2, \partial_1)$ ve $(B, C, R, \beta, \partial_1)$ 2-çaprazlanmış modülleri ve sırasıyla

$$\{\_,\_\}_A: C \times C \to A$$
$$\{\_,\_\}_B: C \times C \to B$$

Peiffer dönüşümleri verilsin.
$f: (A, C, R, \partial_2, \partial_1) \to (B, C, R, \beta, \partial_1)$ morfizminin çekirdek ikiliye sahip olduğunu gösterelim. Burada

$$A \times_B A = \{(a, a'): f(a) = f(a')\} \subset A \times A$$

olmak üzere $(A \times_B A, C, R, \delta, \partial_1)$ geri çekme obje adayımızdır.

Teorem 2.1 $\delta: A \times_B A \to C$ çaprazlanmış modül olur.

İspat. $(a_1, a_1'), (a_2, a_2') \in A \times_B A$ ve $c \in C$ olmak üzere

$$(a_1, a_1') + (a_2, a_2') = (a_1 + a_2, a_1' + a_2')$$
$$(a_1, a_1')(a_2, a_2') = (a_1a_2, a_1'a_2')$$
$$c \cdot (a_1, a_1') = (c \cdot a_1, c \cdot a_1')$$

işlemleri ile birlikte bir C-cebirdir.

$$\delta: A \times_B A \to C$$
$$(a, a') \mapsto \partial_2(a) = \partial_2(a')$$

olmak üzere her $(a, a') \in A \times_B A$ ve her $c \in C$ için

CM1. $\delta(c \cdot (a, a')) = \delta(c \cdot a, c \cdot a')$
$= \partial_2(c \cdot a)$
(∂_2 çaprazlanmış modül)
$= c\partial_2(a)$
$= c\delta(a, a')$

CM2. $\delta[(a_1, a_1')] \cdot (a_2, a_2') = \partial_2(a_1) \cdot (a_2, a_2')$
$= (\partial_2(a_1) \cdot a_2, \partial_2(a_1) \cdot a_2')$
$(\partial_2(a) = \partial_2(a'))$
$= (\partial_2(a_1) \cdot a_2, \partial_2(a_1') \cdot a_2')$
$= (a_1a_2, a_1'a_2')$
$= (a_1a_1', a_2a_2')$

Teorem 2.2 $(A \times_B A, C, R, \delta, \partial_1)$ nin 2-çaprazlanmış modül olur.

İspat. $A\times_B A$ kümesi

$$C\times(A\times_B A)\to A\times_B A$$
$$(c,(a,a'))\mapsto c.(a,a')=(c.a,c.a')$$

etkisi ile bir C-cebir olur ve

$$\{\_,\_\}:C\times C\to A\times_B A$$
$$(c,c')\mapsto(\{c,c'\}_A,\{c,c'\}_A)$$

Peiffer lifting dönüşümü tanımlanabilir. Ayrıca

$$(c\cdot a,c\cdot a')\in(A\times_B A)\Leftrightarrow f(c\cdot a)=f(c\cdot a')$$
$$(f\ \text{2-çaprazlanmış modül morfizmi})$$
$$\Leftrightarrow cf(a)=cf(a')$$

olduğundan etki iyi tanımlıdır.

PL1. Her $c,c'\in C$ için

$$\begin{aligned}\delta\{c,c'\} &= \delta(\{c,c'\}_A,\{c,c'\}_A)\\ &\quad(\delta\ \text{tanımından})\\ &= \partial_2\{c,c'\}_A\\ &= cc'-\partial_1(c')\cdot c\end{aligned}$$

PL2. Her $(a,a'),(a_1,a_1')\in(A\times_B A)$ için,

$$\begin{aligned}&\{\delta(a,a'),\delta(a_1,a_1')\}\\ &=(\{\delta(a,a'),(\delta(a_1,a_1')\}_A,\{\delta(a,a'),(\delta(a_1,a_1')\}_A)\\ &=(\{\partial_2(a),\partial_2(a_1)\}_A,\{\partial_2(a'),\partial_2(a_1')\}_A)\\ &=(aa_1,a'a_1')\\ &=(a,a')(a_1,a_1')\end{aligned}$$

PL3. $c,c_1,c_2\in C$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c_1c_2\}&=(\{c,c_1c_2\}_A,\{c,c_1c_2\}_A)\\ &=(\{c,c_1c_2\}_A+\partial_1c_2\{cc_1\}_A,\{c,c_1c_2\}_A+\\ &\quad\partial_1c_2\{cc_1\}_A)\\ &=(\{c,c_1c_2\}_A,\{c,c_1c_2\}_A)+\\ &\quad(\partial_1c_2\{cc_1\}_A,\partial_1c_2\{cc_1\}_A)\\ &=\{c,c_1c_2\}+\partial_1c_2(\{cc_1\}_A,\{cc_1\}_A)\\ &=\{c,c_1c_2\}+\partial_1c_2\cdot(\{cc_1\}\quad)\end{aligned}$$

PL4. c∈C ,(a,a′) ∈(A×BA) için,

$$\begin{aligned}&\{c,\delta(a,a')\}+\{\delta(a,a'),c\}\\ &=(\{c,\delta(a,a')\}_A,\{c,\delta(a,a')\}_A)\\ &\quad+(\{\delta(a,a'),c\}_A,\{\delta(a,a'),c\}_A)\\ &=(\{c,\partial_2(a)\}_A,\{c,\partial_2(a')\}_A)+\\ &\quad(\{\partial_2(a),c\}_A,\{\partial_2(a'),c\}_A)\\ &=(\{c,\partial_2(a)\}_A+\{\partial_2(a),c\}_A,\{c,\partial_2(a')\}_A\\ &\quad+\{\partial_2(a'),c\}_A)\\ &=(\partial_1(c)\cdot a,\partial_1(c)\cdot a')\\ &=\partial_1(c)\cdot(a,a')\end{aligned}$$

PL5. $r\in R$ ve $c,c_1\in C$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c_1\}\cdot r&=(\{c.c_1\},\{c.c_1\})\cdot r\\ &=(\{c.c_1\}\cdot r,\{c.c_1\}\cdot r)\\ &=(\{c.r,c_1\}_A,\{c.r,c_1\}_A)\\ &=\{c.r,c_1\}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}&=(\{cc_1\cdot r\}_A,\{cc_1\cdot r\}_A)\\ &=\{cc_1\cdot r\}\end{aligned}$$

Teorem 2.3
$(p_1,id_C,id_R),(p_2,id_C,id_R):(A\times_B A,C,R,\delta,\partial_1)\to(A,C,R,\partial_2,\partial_1)$ projeksiyon morfizmleri 2-çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat. $(a,a')\in(A\times_B A)$ ve $r\in R$, $c\in C$ için

$$\begin{aligned}\partial_2p_1(a,a')&=\partial_2(a)=\delta(a,a')\\ p_1(r\cdot(a,a'))&=p_1(r\cdot a,r\cdot a')=r\cdot a\\ &=id_R(r)\cdot p_1(a,a')\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıp p_1 morfizmi C nin etkisini korur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\{\_,\_\}_A\,(id_C\times id_C)\,(c,c')&=\{\_,\_\}_A(c,c')\\ &=\{c,c'\}_A\\ p_1\{\_,\_\}(c,c')=p_1\{c,c'&=p_1(\{c,c'\}_A,\{c,c'\}_A)\\ &=\{c,c'\}_A\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanacağından Böylece (p_1,id_C,id_R) morfizminin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu göstermiş olduk. Benzer şekilde (p_2,id_C,id_R) morfizminin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.4 Herhangi iki 2-çaprazlanmış modül morfizminin çekirdek ikilisi vardır.

İspat. (E,C,R,ϕ,∂_1) bir 2-çaprazlanmış modül , $\{\_,\_\}_E:C\times C\to E$ peiffer lifting dönüşümü olsun. Eğer

$$\begin{aligned}(p'_1,id_C,id_R),(p'_2,id_C,id_R)&:(E,C,R,\phi,\partial_1)\\ &\to(A,C,R,\partial_2,\partial_1)\end{aligned}$$

2-çaprazlanmış modül morfizmleri

$$\begin{aligned}&(f,id_C,id_R)(p_1,id_C,id_R)\\ &\quad=(f,id_C,id_R)(p_2,id_C,id_R)\end{aligned}$$

eşitliğini sağlıyorsa,

$$\begin{aligned}(h,id_C,id_R)&:(E,C,R,\phi,\partial_1)\\ &\to(A\times_B A,C,R,\delta,\partial_1)\end{aligned}$$

olmak üzere her $e\in E$ için

$$h(e) = (p_1{}'(e), p_2{}'(e))$$

şeklinde tanımlı ve

$$(p_1, id_C, id_R)(h, id_C, id_R) = (p_1{}', id_C, id_R)$$
$$(p_2, id_C, id_R)(h, id_C, id_R) = (p_2{}', id_C, id_R)$$

olacak şekilde bir tek 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

İlk olarak $(h, Id_C, id_R): (E, C, R, \phi, \partial_1) \to (A \times_B A, C, R, \delta, \partial_1)$ morfizminin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Burada $(p'_1, id_C, id_R): (E, C, R, \phi, \partial_1) \to (A, C, R, \partial_2, \partial_1)$ 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan $\partial_2\, p'_1 = \phi$ yazılabilir. Her $e \in E$ için,

$$\delta h(e) = \delta(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = \partial_2(p_1{}'(e)) = \phi(e)$$

Ayrıca her $r \in R$, her $e \in E$ için,

$$\delta h(e) = \delta(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = \partial_2(p_1{}'(e)) = \phi(e)$$

Ayrıca her $r \in R$, her $e \in E$ için,

$$h(r \cdot e) = \big(p_1{}'(r \cdot e), p_2{}'(r \cdot e)\big)$$
$$= (r \cdot p_1{}'(e), r \cdot p_2{}'(e))$$

(p'_1, p'_2 2-çaprazlanmış modül morfizmi)

$$= r \cdot (p_1{}'(e), p_2{}'(e))$$
$$= r \cdot h(e)$$

h morfizmi R cebirinin etkisini korur.
$c, c_1 \in C$ için,

$$\{\ ,\ \}id_C \times id_C(c, c_1) = \{\ ,\ \}(c, c_1)$$
$$= \{c, c_1\} = (\{c, c_1\}_A, \{c, c_1\}_A)$$

$$h\{\_,\_\}_E(c, c_1) = h\{c, c_1\}_E(p_1{}'\{c, c_1\}_E, p_2{}'\{c, c_1\}_E)$$

sağlanır.

$$p_1{}'\{c, c_1\}_E = \{c, c_1\}_A$$
$$p_2{}'\{c, c_1\}_E = \{c, c_1\}_A$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\{\_,\_\}id_C \times id_C = h\{\_,\_\}_E$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$(h, id_C, id_R): (E, C, R, \phi, \partial_1) \to (A \times_B A, C, R, \delta, \partial_1)$$

2-çaprazlanmış modül morfizmi olur. Her $e \in E$ için,

$$p_1 h(e) = p_1(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = p_1{}'(e)$$
$$p_2 h(e) = p_2(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = p_2{}'(e)$$

olduğundan

$$p_1 h(e) = p_1{}'(e) \quad \text{ve} \quad p_2 h(e) = p_2{}'(e)$$

elde edilir. Böylelikle;

$$(p_1, id_C, id_R)(h, id_C, id_R) = (p_1{}', id_C, id_R)$$
$$(p_2, id_C, id_R)(h, id_C, id_R) = (p_2{}', id_C, id_R)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi bu özellikteki h morfizminin tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki h' morfizmi h morfizmi ile aynı özellikte bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun.Yani ;

$$(h', id_C, id_R): (E, C, R, \phi, \partial_1) \to (A \times_B A, C, R, \delta, \partial_1)$$

morfizmi için

$$p_1 h'(e) = p_1(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = p_1{}'(e)$$
$$p_2 h'(e) = p_2(p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = p_2{}'(e)$$

eşitlikleri sağlansın.

$$h'(e) = (a, a')$$

olarak alalım. Böylelikle;

$$p_1{}'(e) = p_1{}'h'(e) = p_1(a, a') = a$$
$$p_2{}'(e) = p_2{}'h'(e) = p_2(a, a') = a'$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda her $e \in E$ için,

$$h'(e) = (a, a') = (p_1{}'(e), p_2{}'(e)) = h(e)$$

olacağından

$$h = h'$$

olur yani h morfizmi tektir. Sonuç olarak (p_1, id_C, id_R), (p_2, id_C, id_R) ikilisi (f, id_C, id_R) morfizmi için çekirdek ikilidir.

3. X_2MOD/C→R KATEGORİSİNİN TAMLIĞI (EXACTNESS OF THE CATEGORY X_2MOD/C→R)

Bir Bir önceki bölümde $f:(A,C,R,\partial_2,\partial_1)\rightarrow(B,C,R,\beta,\partial)$ 2-çaprazlanmış modül morfizmi için

$(p_1,id_C,id_R):(A\times_B A,C,R,\delta,\partial_1)\rightarrow(A,C,R,\partial_2,\partial_1)$, $p_1(a,a')=a$
$(p_2,id_C,id_R):(A\times_B A,C,R,\delta,\partial_1)\rightarrow(A,C,R,\partial_2,\partial_1)$, $p_2(a,a')=a'$

olmak üzere (p_1,id_C,id_R) ,(p_2,id_C,id_R) ikilisinin (f,id_C,id_R) morfizmi için çekirdek ikili olduğunu gösterdik . Şimdi tam kategori olma şartlarını göstrelim.

Teorem 3.1 $\boldsymbol{X_2Mod_{/C\rightarrow R}}$ kategorisinde her morfizmin çekirdek ikilisi eş-eşitleyiciye sahiptir.

İspat. Burada tam kategori olma aksiyomlarının ilkini göstereceğiz.

TK.1) İlk olarak (p_1,id_C,id_R) ,(p_2,id_C,id_R) ikilisini eş-eşitleyiciye sahip olduğunu gösterelim. (p_1,id_C,id_R) ,(p_2,id_C,id_R) ikilisini q morfizmi eş-eşitleyicisi ise $C_1=(C_1,C,R,\sigma,\partial_1)$ ve $C_2=(C_2,C,R,\sigma',\partial_1)$ iki 2-çaprazlanmış modül olmak üzere

$$p_1q=p_2q$$
$$p_1q'=p_2q'$$

eşitliklerinin sağlayan q ve q' morfizmleri var olduğunda yukarıdaki $q\phi=q'$ tek bir $\phi:C_1\rightarrow C_2$ olmasıdır.$x=(a,a')\in A\times_B A$ olmak üzere I , A cebirinin $p_1(x)-p_2(x)$ elemanlarıyla üretilen bir ideali olsun. A/I bölüm kümesini oluşturalım.

$c\in C_1$ ve $r\in R$ olmak üzere

$$C_1\times A/I\rightarrow A/I$$
$$(c,(a+I))\mapsto c\cdot a+I$$

etkisiyle birlikte A/I bölüm kümesinin bir C_1-cebir olduğu açıktır.

$p_1(x)-p_2(x)\in I$ için,

$$\begin{aligned}\partial_2(p_1(x)-p_2(x))&=\partial_2(a-a')\\&=\beta f(a-a')\\&=\beta[f(a)-f(a')]\end{aligned}$$

$(f(a)=f(a'))$

$$\begin{aligned}&=\beta(0_B)\\&=0_{C_1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\alpha:A/I\rightarrow C_1$$
$$a+I\mapsto\partial_2(a)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Şimdi $(A/I,C_1,R,\alpha,\partial_2)$ in 2-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\partial_1\alpha(a+I)=\partial_1(\partial_2(a))$$

olduğundan diyagram bir zincir kompleksdir.

$$\{\_,\_\}':C_1\times C_1\rightarrow A/I$$
$$(c,c')\mapsto\{c,c'\}'=q\{c,c'\}_A=\{c,c'\}_A+I$$

peiffer lifting dönüşümünü şeklinde tanımlayalım. Şimdi peiffer lifting aksiyomlarını sağlatalım.

PL1. Her $c,'c\in C_1$ için

$$\begin{aligned}\alpha\{c,c'\}'&=\alpha(\{c,c'\}+I)\\&=\partial_2\{c,c'\}_A\\&=c.c'-\partial_1(c)\cdot c'\end{aligned}$$

PL2. $a+I,a'+I\in A/I$ için,

$$\begin{aligned}&\{\alpha(a+I),\alpha(a'+I)\}'\\&=\{\alpha(a+I),\alpha(a'+I)\}+I\\&=\{\partial_2(a),\partial_2(a')\}+I\quad)\\&=aa'+I\\&=(a+I)(a'+I)\end{aligned}$$

PL3. $c,c_1,c_2\in C_1$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c_1.c_2\}'&=\{c,c_1.c_2\}+I\\&=(\{c,c_1.c_2\}_A+\partial_1c_2\{c,c_1\})+I\\&=\{c,c_1.c_2\}_A+I+\partial_1c_2\{c,c_1\}_A+I\\&=\{c,c_1.c_2\}'+\partial_1c_2\{c,c_1\}'\end{aligned}$$

PL4. $c\in C_1$ ve $x\in A/I$ için

$$\begin{aligned}&\{c,\alpha(a+I)\}'+\{\alpha(a+I),c\}'\\&=\{c,\partial_1(a)\}_A+I+\{\partial_1(a),c\}_A+I\\&=\{c,\partial_1(a)\}_A+\{\partial_1(a),c\}_A+I\\&=\partial_1(y)\cdot(a+I)\end{aligned}$$

PL5. $c,c_1\in C_1$ ve $r\in R$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c_1\}'\cdot r&=(\{c,c_1\}_A+I)\cdot r\\&=\{c,c_1\}_A\cdot r+I\\&=\{c\cdot r,c_1\}_A+I\end{aligned}$$

$$= \{c \cdot r, c_1\}'$$

veya

$$\begin{aligned}\{c, c_1\}' \cdot r &= (\{c, c_1\}_A + I) \cdot r \\ &= \{c, c_1\}_A \cdot r + I \\ &= \{c, c_1 \cdot r\}_A + I \\ &= \{c, c_1 \cdot r\}'\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}(q, id_{C_1}, id_R)&: (A, C_1, R, \partial_2, \partial_1) \\ &\rightarrow (A/I, C_1, R, \alpha, \partial_1) \\ a &\mapsto q(a) = a + I\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan morfizmin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

Her $a \in A$ için ,

$$\alpha q(a) = \alpha(a + I) = \partial_2(a)$$

eşitliği sağlandığından diyagram değişmelidir.
$a \in A$ ve $r \in R$ için ,

$$\begin{aligned}q(r \cdot a) &= r \cdot a + I \\ &= id_R(r) \cdot q(a)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $c, c_1, \in C_1$ olmak üzere

$$q\{\_,\_\}_A(c, c_1) = q\{c, c_1\}_A = \{c, c_1\}_A + I$$

$$\{\_,\_\}' id_{C_1} \times id_{C_1}(c, c_1) = \{\_,\_\}'(c, c_1) = \{c, c_1\}' = \{c, c_1\}_A + I$$

elde edilir. Her $(a, a') \in A \times_B A$ için,

$$\begin{aligned}qp_1(a, a') = qp_2(a, a') &\Leftrightarrow p_1(a, a') + I \\ &= p_2(a, a') + I \\ &\Leftrightarrow p_1(a, a') - p_2(a, a') \in I\end{aligned}$$

olup

$$qp_1 = qp_2$$

bulunur. Şimdi $(A', C_1, R, \alpha', \partial_1)$ başka bir 2-çaprazlanmış modül ve

$$\begin{aligned}(q', id_{C_1}, id_R)&: (A, C_1, R, \partial_2, \partial_1) \\ &\rightarrow (A', C_1, R, \alpha', \partial_1)\end{aligned}$$

morfizmi

$$\begin{aligned}&(q', id_{C_1}, id_R)(p_1, id_{C_1}, id_R) \\ &= (q', id_{C_1}, id_R)\, R)(p_2, id_{C_1}, id_R)\end{aligned}$$

özelliğini sağlayan bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda;

$$\{\_,\_\}_{A'}: C_1 \times C_1 \rightarrow A'$$

Peiffer lifting dönüşümü tanımlıdır ve q' morfizmi ile birlikte

i. $\alpha' q' = id_{C_1} \partial_2$

ii. Her $a \in A$ ve $c \in C_1$ için,

$$q'(c.a) = id_{C_1}(c).q'(a)$$

iii. $\{\_,\_\}_A{}' Id_{C_1 \times C_1} = q'\{\_,\_\}$

özellikleri sağlanır. Bu durumda ;

$$\alpha q = q'$$

olacak şekilde bir tek

$$\begin{aligned}(\phi, id_C, id_R)&: (A/I, C, R, \partial_2, \partial_1) \\ &\rightarrow (A', C, R, \alpha', \partial_1)\end{aligned}$$

2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Şimdi $\phi: A/I \rightarrow A'$ morfizmini tanımlayalım. Her $a + I \in A/I$ için, ϕ morfizmi

$$\phi(a + I) = q'(a)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda
$p_1(a, a') - p_2(a, a') \in I$ için,

$$\begin{aligned}&q'\big(p_1(a, a') - p_2(a, a')\big) \\ &= q' p_1(a, a') - q' p_2(a, a') \\ &= 0_{A'}\end{aligned}$$

olduğundan ϕ morfizmi iyi tanımlıdır. Şimdi ϕ morfizminin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $a + I \in A/I$ için,

$$\begin{aligned}\alpha' \phi(a + I) &= \alpha' q'(a) \\ &= \partial_2(a)\end{aligned}$$

(α tanımından)

$$= \alpha(a + I)$$

Her $r \in R$ ve $a + I \in A/I$ için,

$$\begin{aligned}\phi(r\cdot a+I)&=q'(r\cdot a)\\&=r\cdot q'(a)\\&=id_R(r)\cdot\phi(r.a+I)\end{aligned}$$

Her $c,c'\in C$ için,

$$\begin{aligned}\phi\{\_,\_\}'(c,c')&=\phi\{c,c'\}'\\&=\phi(\{c,c'\}_A+I)\\&=q'\{c,c'\}_A\\&=q'\{\_,\_\}_A\,(c,c')\\&=\{\_,\_\}_A.id_C\times id_C(c,c')\end{aligned}$$

olduğundan ϕ morfizmi 2-çaprazlanmış modül morfizmidir. Ayrıca ϕ morfizmi her $a\in A$ için,

$$\phi q(a)=\phi(a+I)=q'(a)$$

sağlanacağından ϕ morfizmi

$$\phi q=q'$$

özelliğini sağlayan tek morfizm olacaktır. Şimdi bunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned}(\phi',id_C,id_R)&:(A/I,C,R,\partial_2,\partial_1)\\&\to(A',C,R,\alpha',\partial_1)\end{aligned}$$

2-çaprazlanmış modül morfizmi ve

$$\phi'q=q'$$

olsun. Her $a+I\in A/I$ için ,

$$\begin{aligned}\phi'(a+I)=\phi'q(a)=q'(a)\\q'(a)=\phi q(a)=\phi(a+I)\end{aligned}$$

eşitlikleri her $a+I\in A/I$ için sağlandığından

$$\phi'=\phi$$

olur. Sonuç olarak $(A/I,C,R,\partial_2,\partial_1)$, (q,id_C,id_R) ikilisinin $((p_1,id_C,id_R),(p_2,id_C,id_R))$ çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisi olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.2 $\boldsymbol{X_2Mod_{/C\to R}}$ kategorisinde her denklik bağıntısı etkili (effective) bağıntıdır.

İspat. $u,v:(E,C,R,\partial,\partial_1)\to(A,C,R,\alpha,\partial_1)$ $\mathbf{X_2Mod}/_{\mathbf{C\to R}}$ kategorisinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu bağıntının etkili bağıntı olduğunu gösterelim.

$$[a]=\{b\in A:(a,b)\in E\}$$

olmak üzere $[a]$ denklik sınıflarının kümesi A/E olsun. Her $[a],[b]\in A/E$ için,

$$\begin{aligned}[a]+[b]=[a+b]\\ [a][b]=[ab]\end{aligned}$$

işlemleri ile $(A/E,+,.)$ bir halka olur. Ayrıca A/E,

$$\begin{aligned}&C\times A/E\to A/E\\&(c\cdot[a])\mapsto c\cdot[a]=[c\cdot a]\end{aligned}$$

etkisi ile birlikte bir C-cebirdir. σ morfizmini

$$\begin{aligned}\sigma:A/E&\to C\\ [a]&\mapsto\alpha[a]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. $u,v:(E,C,R,\partial,\partial_1)\to(A,C,R,\alpha,\partial_1)$ morfizmleri için

$$\alpha u=\alpha v$$

olduğundan σ morfizmi iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\{\_,\_\}^-&:C\times C\to A/E\\&(c,c')\mapsto\{c,c'\}^-=[\{c,c'\}_A]\end{aligned}$$

Peiffer lifting dönüşümü olmak üzere $(A/E,C,R,\sigma,\partial_1)$ yapısının 2-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. (Burada $\{\_,\_\}:C\times C\to A$ Peiffer lifting dönüşümüdür.

PL1. Her $c,c'\in C$ için,

$$\begin{aligned}\sigma\{c,c'\}^-&=\alpha[\{c,c'\}_A]\\&=\alpha\{c,c'\}\\&=c.c'-\partial_1(c')\cdot c\end{aligned}$$

PL2. Her $[a],[b]\in A/E$ için,

$$\begin{aligned}\{\sigma[a],\sigma[b]\}^-&=[\{\sigma[a],\sigma[b]\}_A]\\&=[\{\alpha[a],\alpha[b]\}_A]\\&=[ab]\\&=[a][b]\end{aligned}$$

PL3. Her $c,c',c''\in C$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c'c''\}^-&=[\{c,c'c''\}_A]\\&=\{c,c'c''\}_A+[\partial_1c''\{c,c'\}_A]\\&=\{c,c'c''\}_A+[\partial_1c''\{c,c'\}_A]\\&=\{c,c'c''\}_A{}^-+\partial_1c''[\{c,c'\}_A]\\&=\{c,c'.c''\}^-+\partial_1c''\cdot\{c,c'\}^-\end{aligned}$$

PL4. Her $c\in C$ ve her $[a]\in A/E$ için,

$$\begin{aligned}\{c,\sigma[a]\}^- + \{\sigma[a],c\}^- &= [\{c,\sigma[a]\}_A] + [\{\sigma[a],c\}_A] \\ &= [\{c,\alpha\,[a]\}_A + \{\,\alpha\,[a],c\}_A] \\ &= [\partial_1(c)a] \\ &= \partial_1(c)\cdot[a]\end{aligned}$$

PL5. Her $c,c' \in C$ ve her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}\{c,c'\}^- \cdot r &= [\{c,c'\}_A]\cdot r \\ &= [\{c,c'\}\cdot r] \\ &= [\{c\cdot r,c'\}] \\ &= \{c\cdot r,c'\}^-\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\{c,c'\}^- \cdot r &= [\{c,c'\}]\cdot r \\ &= [\{c,c'\}\cdot r] \\ &= [\{c,c'\cdot r\}] \\ &= \{c,c'\cdot r\}^-\end{aligned}$$

Şimdi q morfizminin 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $a \in A$ için,

$$\sigma q(a) = \sigma[a] = \alpha(a)$$

ve her $r \in R$, her $a \in A$ için,

$$q(r\cdot a) = [r\cdot a] = r\cdot[a] = Id_R(r)\cdot q(a)$$

olur. Her $c,c' \in C$ için,

$$\begin{aligned}q\{\_,\_\}(c,c') &= q\{c,c'\} \\ &= [\{c,c'\}_A] \\ &= \{c,c'\}^- \\ &= \{\_,\_\}^- id_C \times id_C\{c,c'\}\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından q morfizmi 2-çaprazlanmış modül morfizmi olur. A objesi üzerindeki denklik bağıntısının tanımından E , $A\times_C A$ kümesinin bir alt objesi olur.Yani;

$$E = \{(a,a') \colon q(a) = q(a')\}$$

olmak üzere

$$E \subset A\times_C A = \{(a,a')\colon \alpha(a) = \alpha(a')\}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(a,a') \in E &\Rightarrow q(a) = q(a') \\ &\Rightarrow [a] = [a'] \\ &\Rightarrow \sigma(a) = \sigma(a') \\ &\Rightarrow \alpha(a) = \alpha(a') \\ &\Rightarrow (a,a') \in A\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\alpha u = \alpha v$$

olduğundan her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}\alpha u(x) = \alpha v(x) &\Rightarrow (u(x),v(x)) \in E \\ &\Rightarrow (0,u(x)-v(x)) \in E\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned}(0,u(x)-v(x)) \in E &\Rightarrow [u(x)-v(x)] = [0] \\ &\Rightarrow q(u(x)-v(x)) = 0 \\ &\Rightarrow q(u(x)) = q(v(x)) \\ &\Rightarrow qu(x) = qv(x) \\ &\Rightarrow qu = qv\end{aligned}$$

Böylece (q,id_C,id_R),$((u,id_C,id_R),(v,id_C,id_R))$ ikilisinin eş-eşitleyicisidir. Şimdi $((u,id_C,id_R),(v,id_C,id_R))$ ikilisinin (q,id_C,id_R) morfizmi için çekirdek ikili olduğunu gösterelim. Her $d \in D$ için,

$$\begin{aligned}qu'(d) = qv'(d) &\Rightarrow [u'(d)] = [v'(d)] \\ &\Rightarrow (u'(d),v'(d)) \in E\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned}\theta\colon D &\to E \\ d &\mapsto (u'(d),v'(d))\end{aligned}$$

morfizmini tanımlayabiliriz. Şimdi θ morfizminin bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $d \in D$ için,

$$\begin{aligned}\partial\theta(d) &= \partial(u'(d),v'(d)) \\ &= \alpha u'(d) \\ &= \alpha v'(d) \\ &= \omega(d)\end{aligned}$$

Her $d \in D$ ve her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}\theta(r\cdot d) &= (u'(r\cdot d),v'(r\cdot d)) \\ &= r\cdot(u'(d),v'(d)) \\ &= id_R(r)\cdot\theta(d)\end{aligned}$$

Her c,c′∈C için,

$$\begin{aligned}\theta\{\_,\_\}_D(c,c') &= \theta\{c,c'\}_D \\ &= (u'\{c,c'\}_D, v'\{c,c'\}_D) \\ &= (\{c,c'\}_A,\{c,c'\}_A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\_,\_\}id_C \times id_C(c,c') &= \{\_\,,\_\}(c,c') \\ &= \{c,c'\} \\ &= (\{c,c'\}_A,\{c,c'\}_A)\end{aligned}$$

verilen diyagram değişmeli olduğundan θ morfizmi bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olur. Burada, $(u', id_C, id_R), (v', id_C, id_R): (D, C, R, \omega, \partial_1) \to (A, C, R, \alpha, \partial_1)$ morfizmlerinin 2-çaprazlanmış modül morfizmleri olduklarını gösterelim. Her $d \in D$ için,

$$\begin{aligned}\alpha u'(d) &= \alpha(u(\theta(d)))\\ &= \partial\theta(d)\\ &= \omega(d)\end{aligned}$$

her $d \in D$ ve her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}u'(r \cdot d) &= u(\theta(r \cdot d))\\ &= r \cdot u(\theta(d))\\ &= id_R(r) \cdot u'(d)\end{aligned}$$

olup v ve v' morfizmleri R nin etkisini korurlar. Her $c, c' \in C$ için,

$$\begin{aligned}u'\{\_,\_\}_D(c, c') &= u'\{c, c'\}_D\\ &= \{c, c'\}_A\\ &= \{\_,\_\}_A(c, c')\\ &= \{\_,\_\}_A id_C \times id_C(c, c')\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından u' morfizmi 2-çaprazlanmış modül morfizmi olur. Benzer şekilde v' morfizminin de 2-çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilebilir. Ayrıca her $d \in D$ için,

$$\begin{aligned}u\theta(d) &= u(u'(d), v'(d)) = u'(d)\\ v\theta(d) &= v(u'(d), v'(d)) = v'(d)\end{aligned}$$

Son olarak θ morfizminin tek olduğunu gösterelim. θ' morfizmi θ morfizmi ile aynı özelliklere sahip bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun ve

$$\begin{aligned}\theta' : D &\to E\\ d &\mapsto (a, b)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda;

$$\begin{aligned}u\theta' &= u'\\ v\theta' &= v'\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır ve her $d \in D$ için,

$$\begin{aligned}u'(d) &= u\theta'(d) = u(a, b) = a\\ v'(d) &= v\theta'(d) = v(a, b) = b\\ \theta'(d) &= (a, b) = (u'(d), v'(d)) = \theta(d)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $d \in D$ keyfi olduğundan

$$\theta = \theta'$$

olup θ tektir. Sonuç olarak $((u, id_C, id_R), (v, id_C, id_R))$ ikilisi $\mathbf{X_2Mod}/_{\mathbf{C\to R}}$ kategorisinde $(q, id_C, id_R): (A, C, R, \partial_2, \partial_1) \to (A/E, C, R, \sigma, \partial_1)$ morfizminin çekirdek ikilisidir.

Sonuç 3.3. $\mathbf{X_2Mod}/_{\mathbf{C\to R}}$ kategorisi tam kategoridir.

İspat. Teorem3.1 de $\boldsymbol{X_2Mod_{/C\to R}}$ kategorisindeki her morfizmin çekirdek ikilisinin olduğu ve bu çekirdek ikilinin eş-eşitleyiciye sahip olduğu , Teorem 3.2 de $\boldsymbol{X_2Mod_{/C\to R}}$ kategorisinde her denklik bağıntısının etkili olduğu gösterildiğinden $\boldsymbol{X_2Mod_{/C\to R}}$ kategorisi tamdır.

REFERENCES

[1] J. Whitehead, "Combinatorial Homotopy II, " *Bulletin American Mathematical Society,* no. 55, pp. 453-456, 1949.

[2] S. Lichtenbaum ve M. Schlessingger, "The contangent complex of a morphism, " *Trans. American Society,* no. 18, pp. 41-70, 1967.

[3] M. Gerstenhaber, "On the deformation of Rings and Algebras, " *Ann. math,* no. 84, 16 Ekim 1966.

[4] T. Porter, "Homology of Commutative Algebras and Invariant of Simis and Vasconceles, " *Journal of Algebra,* no. 99, pp. 458-465, 1986.

[5] Z. Arvasi, "Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutatve Algebras, " *Theory and Application of Categories,* cilt 3, no. 7, pp. 160-189, 1997.

[6] Z. Arvasi ve E. Ulualan, "Quadratic and 2-Crossed Modules of Algebras, " *Algebra Colloquium,* cilt 4, no. 14, pp. 669-686, 2007.

[7] D. Conduche, "Modules Croises Generalises de longeur 2, " *J.Pure app Algebra,* no. 34, pp. 155-178, 1984.

[8] A. R. Grandjean ve M. J. Vale, "2-Modules Cruzados on la Cohomologia de Andre Quillen, " *Memorias de la Reai Academia de Ciencias*, 1986.

[9] M. Barr, “Exact Categories and Categories of Sheaves, ” *Springer Lecture notes in math,* no. 236, pp. 1-120, 1971.

[10] D. Quillen, “Higher Algebraic K-Theory, ” *SLNM Springer Verlag ,* no. 341, pp. 85-147, 1973.

[11] B. Keller, “Chain Complexes and Stable Categories, ” *Manuscripta Math,* no. 67, pp. 379-417, 1990.

[12] S. Maclane , Categories for the Working Mathematician, New York: Springer Verlag, 1965.

[13] T. S. Blyth, Categories, Longman Sc&Tech, 1986.