

**(Araştırma Makalesi)****Genelleştirilmiş Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Septik B-spline Kolokasyon Metodu****Buse ARICAN\*<sup>1</sup>, Dursun IRK<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, 26040, Eskişehir, ORCID No : <http://orcid.org/0000-0001-8184-0930><sup>2</sup>Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 26040, Eskişehir, ORCID No : <http://orcid.org/0000-0002-3340-1578>**Anahtar Kelimeler:**Septik B-spline,  
Genelleştirilmiş lineer olmayan  
Schrödinger denklemi,  
Kolokasyon metodu

**Özet:** Bu çalışma, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger (GNLS) denkleminin yüksek doğruluklu sayısal çözümünü elde etmek içindir. Çalışmada iki farklı zaman parçalanması kullanılacaktır. İlk zaman parçalanması doğruluğu iki olan ve literatürde iyi bilinen Crank-Nicolson yöntemi, ikinci zaman parçalanması ise tek adımlı ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip yöntemdir. Zaman parçalanması için genel bir yöntem kullanıldıktan sonra konum parçalanması için ise septik B-spline fonksiyonların kullanıldığı kolokasyon yöntemi kullanılacaktır. Zaman ve konum parçalanması uygulandıktan sonra lineer olmayan bir denklem sistemi elde edilecektir. Denklem sistemi Matlab paket programı yardımıyla çözümlenirken öncelikle iç iterasyonlu bir lineerleştirme kullanılacak ve istenilen zamana kadarki çözümler iteratif olarak bulunacaktır. Son olarak solitary dalgasının yayılımı test problemi kullanılarak önerilen metotlar test edilecektir.

**(Research Article )****Septic B-spline Collocation Method for Numerical Solution of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation****Keywords:**Septic B-splines,  
Generalized nonlinear  
Schrödinger equation,  
Collocation method

**Abstract:** This study introduces to obtain high order accurate method for numerical solution of the generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equation. Two different time discretizations are used in the study. The first method is the well known Crank-Nicolson method with second order accuracy and the second method discretization is a one-step method with fourth order accuracy. After using a general method including two proposed time discretization methods for time discretization, the collocation method using septic B-spline functions will be used for space discretization. A non-linear system of equations will be obtained after applying time and space discretizations. While the equation system is being solved with the help of Matlab package program, firstly an inner iteration linearization will be used and the solutions up to the desired time will be found iteratively. Finally, the proposed methods are tested by using the solitary wave propagation test problem.

**1. GİRİŞ (INTRODUCTION)**

$i = \sqrt{-1}$ ,  $w$ ,  $x$  ve  $t$  ye bağlı kompleks değerli bir fonksiyon,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  ve  $q_4$  reel sabitler,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırayla konum ve zamana göre türevi göstermek üzere GNLS denklemi

$$iw_t + w_{xx} + q_1|w|^2w + q_2|w|^4w + iq_3(|w|^2)_xw + iq_4|w|^2w = 0 \quad (1)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer olmayan bir oluşum denklemdir. GNLS denklemi ilk kez, stoke dalgalarının modüler kararsızlık durumu yakınlardaki davranışını

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: busee.aricann@gmail.com

tanımlamak üzere [1] ve [2] numaralı çalışmalarda önerilmiştir. (1) denklemindeki reel sabitlerin özel değerlerinden türetilmiş en bilinen denklem

$$iw_t + w_{xx} + q_1|w|^2w = 0 \quad (2)$$

formunda olup kübik Schrödinger denklemi olarak adlandırılır ve akışkanlar mekaniğinde [3], lineer olmayan optiklerde [4] ve plazma fiziğinde [5] önemli uygulama alanlarına sahiptir. (1) formundaki GNLS denkleminin sayısal çözümü üzerinde de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. [6] çalışmasında, GNLS denkleminin sayısal çözümü pseudo-spectral split-step metodu kullanılarak araştırılmıştır. Yüksek mertebeden split-step Fourier yöntemini kullanarak GNLS denkleminin sayısal çözümü ise [7] çalışmasında yapılmıştır. [8] numaralı referansta verilen çalışmada ise GNLS denkleminin sayısal çözümü için kuintik B-spline kolokasyon metodu önerilmiştir.

Bu çalışmada, (1) formundaki GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} w(a, t) = w(b, t) = 0, t \geq 0 \\ w'(a, t) = w'(b, t) = 0, t \geq 0 \\ w''(a, t) = w''(b, t) = 0, t \geq 0 \end{aligned}$$

sınır şartları ve  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$w(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır. Bu çalışmada GNLS denkleminin yaklaşık çözümü araştırılırken zaman parçalanması için 2. mertebeden doğruluğa sahip Crank Nicolson ve konum parçalanması için Septik B-spline kolokasyon yöntemi ile zaman parçalanması için 4. mertebeden doğruluğa sahip yüksek doğruluklu tek adımlı bir yöntem ile konum parçalanması için yine aynı Septik B-spline kolokasyon yöntemi önerilmiştir. Zaman parçalanması için Crank Nicolson yönteminin önerildiği yöntem M1, 4. mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı zaman parçalanmasının önerildiği yöntem ise M2 olarak adlandırılmıştır.

## 2. ÖNERİLEN ALGORİTMANIN KURULUMU (CONSTRUCTION OF THE PROPOSED ALGORITHM)

Problemin sayısal çözümünde konum aralığı  $[a, b]$ , zaman aralığı  $[0, T]$ ,  $k$  zaman parçalanmasındaki adım uzunluğu,  $h$  konum parçalanmasındaki adım uzunluğu alınacaktır. Bu durumda

$$t_n = nk, (n = 0, \dots, T)$$

ve

$$x_m = a + mh, (m = 0, 1, \dots, N)$$

olmak üzere, zaman ve konum aralığının düzgün parçalanmaları sırasıyla

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

ve

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olacaktır. Konum ve zaman aralığı üzerinde  $w(x_m, t_n) = w_m^n$  ile  $(x_m, t_m)$  noktasındaki tam çözümü  $W_m^n$  ile de  $(x_m, t_n)$  noktasındaki yaklaşık çözüm gösterilecektir.

### 2.1. Zaman Parçalanması (Time Discretization)

(1) formundaki GNLS denkleminin sayısal çözümü için

$$w^{n+1} = w^n + \theta_1 w_t^{n+1} + \theta_2 w_t^n + \theta_3 w_{tt}^{n+1} + \theta_4 w_{tt}^n \quad (3)$$

formundaki zaman parçalanması kullanılacaktır. GNLS denkleminin sayısal çözümü için önerilen (3) formundaki yaklaşımda  $(n+1)$ . zaman adımındaki terimlerin  $n$ . zaman adımına göre Taylor seri açılımları yapılarak yerlerine yazılır ve

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = 0, \theta_4 = 0$$

seçimleri yapılırsa doğruluğu iki olan Crank Nicolson zaman ayrıştırması ve

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{12}, \theta_4 = \frac{k^2}{12}$$

seçimleri yapıldığında ise doğruluğu 4 olan yüksek doğruluklu zaman parçalanması elde edilir. (1) denklemi düzenlenirse

$$w_t = iw_{xx} + i(q_1 w \bar{w} + q_2 w^2 \bar{w}^2 - q_3 w \bar{w}_x)w - (q_3 w \bar{w} + q_4 w \bar{w}_x)w_x = 0 \quad (4)$$

yazılabilir. (4) denkleminin zamana göre türevi alınır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= iq_1 w \bar{w} + iq_2 w^2 \bar{w}^2 - q_3 w \bar{w}_x \\ \gamma_2 &= -(q_3 + q_4) w \bar{w}_x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -q_2^2 w^4 \bar{w}^4 - (4Iq_2q_4 + 6Iq_2q_3)w^3 \bar{w}^2 \bar{w}_x \\ &+ (2q_3^2 + 2q_3q_4)w^2 \bar{w} \bar{w}_{2x} + (q_3q_4 + 3q_3^2 - 2q_2)w^2 \bar{w}_x^2 \\ &- (2Iq_1q_4 + 4Iq_1q_3)w^2 \bar{w} \bar{w}_x - 2q_1q_2w^3 \bar{w}^3 - q_1^2w^2 \bar{w}^2 \\ \beta_2 &= -2I(2q_3 + q_4)w_x \bar{w}_x \\ &+ (-6q_2 + 3q_3^2 + 2q_4^2 + 5q_3q_4)w \bar{w}^2 w_x \\ &- 6Iq_2(q_4 + q_3)w^3 \bar{w}^3 \\ &+ (2q_4^2 - 12q_2 + 10q_3^2 + 10q_3q_4)w^2 \bar{w} \bar{w}_x \\ &- 4Iq_1(q_4 + q) \bar{w}^2 w^2 - 2q_1 \bar{w} w_x - 4q_1 w \bar{w}_x \\ &- 4Iq_3 w \bar{w}_{2x} \\ \beta_3 &= -4I(q_3 + q_4) \bar{w} w_x \\ &+ (2q_3q_4 + q_4^2 + 2q_3^2 - 6q_2)w^2 \bar{w}^2 \\ &- 4q_1 w \bar{w} - 2I(q_4 + 3q_3)w \bar{w}_x \\ \beta_4 &= -2I(q_3 + q_4)w \bar{w} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w_t &= \gamma_1 w + \gamma_2 w_x + iw_{xx}, \\ w_{tt} &= \beta_1 w + \beta_2 w_x + \beta_3 w_{2x} + \beta_4 w_{3x} - w_{4x} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda (1) denklemine (3) zaman parçalanması uygulandığında

$$\begin{aligned} & w^{n+1} - \theta_1(\gamma_1 w + \gamma_2 w_x + i w_{xx})^{n+1} \\ & - \theta_3(\beta_1 w + \beta_2 w_x + \beta_3 w_{2x} + \beta_4 w_{3x} - w_{4x})^{n+1} \\ & = \\ & w^n + \theta_2(\gamma_1 w + \gamma_2 w_x + i w_{xx})^n \\ & + \theta_4(\beta_1 w + \beta_2 w_x + \beta_3 w_{2x} + \beta_4 w_{3x} - w_{4x})^n \end{aligned}$$

elde edilir. Düzenleme yapıldığında ise

$$\begin{aligned} & (1 - \theta_1(\gamma_1)^{n+1} - \theta_3(\beta_1)^{n+1})w^{n+1} \\ & + (-\theta_1(\gamma_2)^{n+1} - \theta_3(\beta_2)^{n+1})(w_x)^{n+1} \\ & + (-\theta_1 i - \theta_3(\beta_3)^{n+1})(w_{2x})^{n+1} \\ & - \theta_3(\beta_4)^{n+1}(w_{3x})^{n+1} \\ & + \theta_3(w_{4x})^{n+1} = \\ & (1 + \theta_2(\gamma_1)^n + \theta_4(\beta_1)^n)w^n \\ & + (\theta_2(\gamma_2)^n + \theta_4(\beta_2)^n)(w_x)^n \\ & + (\theta_2 i + \theta_4(\beta_3)^n)(w_{2x})^n \\ & + \theta_4(\beta_4)^n(w_{3x})^n - \theta_4(w_{4x})^n \end{aligned} \quad (5)$$

bulunur.

### 2.1. Konum Parçalanması (Space Discretization)

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması üzerinde tanımlanan  $\varphi_m$  fonksiyonlar  $x_m$  noktasındaki septik B-spline fonksiyonlar

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_m] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_m] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_m] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_m] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (6)$$

ile gösterebilir.  $\varphi_m$  septik B-spline fonksiyonlar parçalı polinom fonksiyonlar olup  $\varphi_{-3}, \varphi_{-2}, \dots, \varphi_{N+2}, \varphi_{N+3}$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır. Septik B-spline kolokasyon metodunda, septik B-spline fonksiyonlar deneme fonksiyonları olarak kullanılarak  $w(x, t)$  çözümünü için

$$w(x, t) \approx Wx, t = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t) \quad (7)$$

formundaki yaklaşık çözüm araştırılır.  $\varphi_m(x)$  spline fonksiyonlar ve onun ilk altı türevi,  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır.  $x = x_m, m =$

$0, 1, \dots, N$  noktalarındaki  $w(x_m)$  ve ilk 6 türevi için yaklaşımlar (7) eşitliği ile (6) spline eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} W_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} \\ &+ 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ W'_m &= \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1}) \\ &+ (245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ W''_m &= \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1}) \\ &+ (-80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ W'''_m &= \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1}) \\ &+ (-19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ W^{(4)}_m &= \frac{840}{h^4} (\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m) \\ &+ (-9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\ W^{(5)}_m &= \frac{2520}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1}) \\ &+ (-4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ W^{(6)}_m &= \frac{5040}{h^6} (\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m) \\ &+ (15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (8)$$

olarak bulunur.  $m = 0, 1, 2, \dots, N$  için  $x = x_m$  noktalarındaki (5) denklemi

$$\begin{aligned} (\gamma_1)_m^{n+1} &= iq_1 w_m^{n+1} (\bar{w})_m^{n+1} + iq_2 (w^2)_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} \\ &- q_3 w_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ (\gamma_2)_m^{n+1} &= -(q_3 + q_4) w_m^{n+1} (\bar{w})_m^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\beta_1)_m^{n+1} &= -q_2^2 (w^4)_m^{n+1} (\bar{w}^4)_m^{n+1} \\ &- (4iq_2 q_4 + 6iq_2 q_3) (w^3)_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ &+ (2q_3^2 + 2q_3 q_4) (w^2)_m^{n+1} (\bar{w})_m^{n+1} (\bar{w}_{2x})_m^{n+1} \\ &+ (q_3 q_4 + 3q_3^2 - 2q_2) (w^2)_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ &+ (-2iq_1 q_4 - 4iq_1 q_3) (w^2)_m^{n+1} (\bar{w})_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ &- 2q_1 q_2 (w^3)_m^{n+1} (\bar{w}^3)_m^{n+1} - q_1^2 (w^2)_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} \\ (\beta_2)_m^{n+1} &= -2i(2q_3 + q_4) (w_x)_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ &+ (-6q_2 + 3q_3^2 + 2q_4^2 + 5q_3 q_4) w_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} (w_x)_m^{n+1} \\ &- 6iq_2 (q_4 + q_3) (w^3)_m^{n+1} (\bar{w}^3)_m^{n+1} \\ &+ (2q_4^2 - 12q_2 + 10q_3^2 + 10q_3 q_4) (w^2)_m^{n+1} \bar{w}_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ &- 4iq_1 (q_4 + q_3) (w^2)_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} \\ &- 2q_1 \bar{w}_m^{n+1} (w_x)_m^{n+1} - 4q_1 w_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} - 4lq_3 w_m^{n+1} (\bar{w}_{2x})_m^{n+1} \\ (\beta_3)_m^{n+1} &= -4i(q_3 + q_4) \bar{w}_m^{n+1} (w_x)_m^{n+1} \\ &+ (2q_3 q_4 + q_4^2 + 2q_3^2 - 6q_2) (w^2)_m^{n+1} (\bar{w}^2)_m^{n+1} \\ &- 4q_1 w_m^{n+1} \bar{w}_m^{n+1} - 2i(q_4 + 3q_3) w_m^{n+1} (\bar{w}_x)_m^{n+1} \\ (\beta_4)_m^{n+1} &= -2i(q_3 + q_4) w_m^{n+1} \bar{w}_m^{n+1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & (1 - \theta_1(\gamma_1)_m^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_m^{n+1}) w_m^{n+1} \\ & - (\theta_1(\gamma_2)_m^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_m^{n+1}) (w_x)_m^{n+1} \\ & - (\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_m^{n+1}) (w_{2x})_m^{n+1} \\ & - \theta_3(\beta_4)_m^{n+1} (w_{3x})_m^{n+1} \\ & + \theta_3 (w_{4x})_m^{n+1} = \\ & (1 + \theta_2(\gamma_1)_m^n + \theta_4(\beta_1)_m^n) w_m^n \\ & + (\theta_2(\gamma_2)_m^n + \theta_4(\beta_2)_m^n) (w_x)_m^n \\ & + (\theta_2 i + \theta_4(\beta_3)_m^n) (w_{2x})_m^n + \theta_4(\beta_4)_m^n (w_{3x})_m^n \\ & - \theta_4 (w_{4x})_m^n \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Elde edilen denkleme septik B-spline eşitlikleri uygulanırsa  $x = x_m$  noktalarındaki (6) denklemi

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= \left(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}\right) - \frac{7(-1)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(1)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(-1)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} + \theta_3 \frac{840(1)}{h^4} \\ \alpha_{m2} &= 120(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}) - \frac{7(-56)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(24)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(-8)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} \\ \alpha_{m3} &= 1191(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}) - \frac{7(-245)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(15)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(19)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} + \theta_3 \frac{840(-9)}{h^4} \\ \alpha_{m4} &= 2416(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}) - \frac{42(-80)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad + \theta_3 \frac{840(16)}{h^4} \\ \alpha_{m5} &= 1191(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}) - \frac{7(245)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(15)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(-19)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} + \theta_3 \frac{840(-9)}{h^4} \\ \alpha_{m6} &= 120(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}) - \frac{7(56)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(24)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(8)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} \\ \alpha_{m7} &= \left(1 - \theta_1(\gamma_1)_{m+1}^{n+1} - \theta_3(\beta_1)_{m+1}^{n+1}\right) - \frac{7(1)}{h}(\theta_1(\gamma_2)_{m+1}^{n+1} + \theta_3(\beta_2)_{m+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{42(1)}{h^2}(\theta_1 i + \theta_3(\beta_3)_{m+1}^{n+1}) - \theta_3 \frac{210(1)}{h^3}(\beta_4)_{m+1}^{n+1} + \theta_3 \frac{840(1)}{h^4} \\ B_m &= (1 + \theta_2(\gamma_1)_m^n + \theta_4(\beta_1)_m^n)w_m^n + (\theta_2(\gamma_2)_m^n + \theta_4(\beta_2)_m^n)(w_x)_m^n \\ &\quad + (\theta_2 i + \theta_4(\beta_3)_m^n)(w_{2x})_m^n + \theta_4(\beta_4)_m^n(w_{3x})_m^n - \theta_4(w_{4x})_m^n \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m4}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m6}\delta_{m+2}^{n+1} + \alpha_{m7}\delta_{m+3}^{n+1} = B_m \quad (9)$$

formunda yazılabilir. Elde edilen denklem sistemi  $N + 1$  denklem ve

$$\delta_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}$$

olmak üzere  $N + 7$  bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken ilave 5 denklem

$$\begin{aligned} w(a, t) &= w(b, t) = 0, \\ w_x(a, t) &= w_x(b, t) = 0 \\ w_{xx}(a, t) &= w_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned}$$

sınır şartlarından seçilebilir. Konum aralığının sol sınır şartlarından üçü ve konum aralığının sağ sınır şartlarından üçü kullanılırsa denklem sistemine ilave edilen 6 denklem ile toplam  $N + 7$  bilinmeyen  $N + 7$  denklemden oluşan bir sisteme ulaşılır. Denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle  $n = 0$  adımıdaki

$$(\delta_{-3}^n, \delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n, \delta_{N+3}^n)$$

başlangıç bilinmeyen vektörü

$$w(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şart ve septik B-spline eşitlikleri kullanılarak bulunur. Bunun için

$$\begin{aligned} \frac{7}{h} \left( -\delta_{-3}^0 - 56\delta_{-2}^0 - 245\delta_{-1}^0 \right) &= f'(x_0) \\ \frac{42}{h^2} \left( \delta_{-3}^0 + 24\delta_{-2}^0 + 15\delta_{-1}^0 - 80\delta_0^0 \right) &= f''(x_0) \\ \frac{210}{h^3} \left( -\delta_{-3}^0 - 8\delta_{-2}^0 + 19\delta_{-1}^0 \right) &= f'''(x_0) \\ \delta_{m-3}^0 + 120\delta_{m-2}^0 + 1191\delta_{m-1}^0 + 2416\delta_m^0 &= f(x_m), \\ &+ 1191\delta_{m+1}^0 + 120\delta_{m+2}^0 + \delta_{m+3}^0 \\ m &= 0, \dots, N \\ \frac{7}{h} \left( -\delta_{N-3}^0 - 56\delta_{N-2}^0 - 245\delta_{N-1}^0 \right) &= f'(x_N) \\ \frac{42}{h^2} \left( \delta_{N-3}^0 + 24\delta_{N-2}^0 + 15\delta_{N-1}^0 - 80\delta_N^0 \right) &= f''(x_N) \\ \frac{210}{h^3} \left( -\delta_{N-3}^0 - 8\delta_{N-2}^0 + 19\delta_{N-1}^0 \right) &= f'''(x_N) \end{aligned}$$

denklem sistemi çözümlerse

$$(\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörü bulunur. Başlangıç bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamandaki çözüm (9) denklem sisteminin çözülmesi ile bulunur. (9) denklem sistemi lineer olmayan bir denklem sistemi olduğundan çözüm için iç lineerleştirme yapılmıştır. Bunun için her bir zaman adımıda katsayılarda bulunan

$$(\delta_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1})$$

bilinmeyenleri yerine bir önceki zaman adımıdaki

$$(\delta_{-3}^n, \delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n, \delta_{N+3}^n)$$

değerler alınmış ve denklem sistemi çözülmüştür. Bir sonraki zaman adımına geçilmeden elde edilen sonuçlar tekrar aynı bilinmeyenlere atanmış ve bir iç iterasyon gerçekleştirilmiştir. Katsayılarda lineerliği bozan terimlere atanan değerler ile  $(n + 1)$ . zamanda bulunan değerler arasındaki mutlak farkların maksimum değeri istenen hata teriminden küçük kalana kadar işlemler devam ettirilmiştir. Bu çalışmada hata payı  $10^{-10}$  olarak seçilmiştir. İstenen hata payına ulaşıldığı zaman ise bir sonraki zaman adımına geçilmiştir.

### 3. SONUÇLAR (RESULTS)

Yöntemlerin doğruluğunun kontrolü için solitary dalgasının yayılımı test problemi kullanılacaktır. GNLS denklemi için korunum kanunları

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 dx, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |w_x|^2 - \frac{1}{2}(2q_3 + q_4)|w|^2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}q_1|w|^4 + \frac{1}{6}[q_3(2q_3 + q_4) - 2q_2]|w|^6 \right] dx, \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) - q_3|w|^4) dx$$

formundadır ve  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  sırasıyla kütle, enerji ve itme (impulse) korunumlarına karşılık gelmektedir [6]. Sayısal metotların doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından

$$L_{\infty} = \| |w| - |W| \|_{\infty} = \max_m | |w_m| - |W_m| |.$$

olarak verilen  $L_{\infty}$  hata normuyla incelenecektir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri bulunurken, belirli integraller konum aralığı üzerinde yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır. GNLS denkleminin çözümü  $q_1 = 1/2$ ,  $q_2 = -7/4$ ,  $q_3 = -1$ ,  $q_4 = -2$  seçimleri altında

$$\Phi(x, t) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{1}{2} \tanh(x - 2t - \bar{x}_0) \right] + x - \bar{x}_0$$

olmak üzere

$$w(x, t) = \left[ \frac{4}{4 + 3 \sinh^2(x - 2t - \bar{x}_0)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, t))$$

formunda bir solitary dalga çözümüne sahiptir [6,7]. Solitary dalga çözümü; genliği 1, hız 2, tepe noktası  $x = \bar{x}_0$  noktası olan bir solitary dalgasının soldan sağa doğru hareketini modeller. Çözümde  $t = 0$  alınarak solitary dalga test problemi için başlangıç şart

$$\Phi(x, 0) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{1}{2} \tanh(x - \bar{x}_0) \right] + x - \bar{x}_0$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = \left[ \frac{4}{4 + 3 \sinh^2(x - \bar{x}_0)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, 0))$$

formunda bulunabilir.

GNLS denklemi için problemdeki korunum sabitlerinin tam değerleri ise Matlab paket programıyla

$$I_1 = 2 \ln 3 \approx 2.1972246,$$

$$I_2 = -3/2 + 3.875 \ln 3 \approx 2.7571226,$$

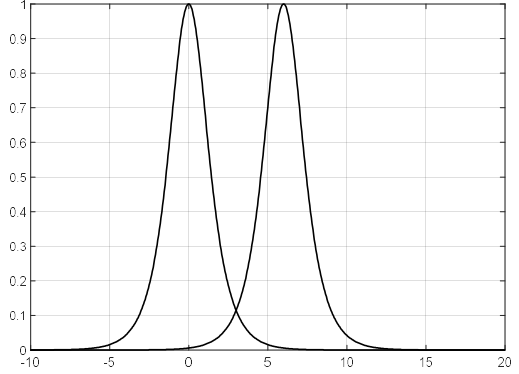
$$I_3 = 4 - 9 \ln 3 \approx -5.8875106,$$

olarak hesaplanabilir.

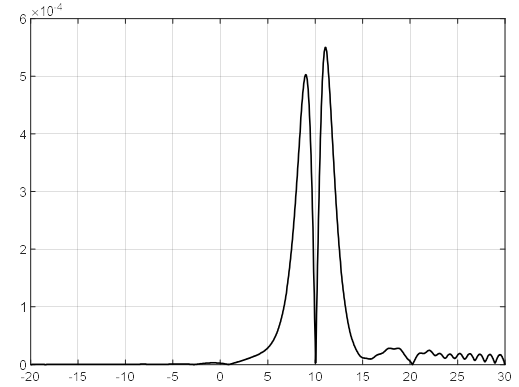
**Tablo 1.**  $h = 0.02$  için  $t = 5$  zamanındaki sonuçlar

M1 metodu				
k	$L_{\infty}$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.5	71.50	1.7615055	2.1375475	-3.9706516
0.25	36.98	2.1557156	2.6986432	-5.6961327
0.125	8.66	2.1966127	2.7567246	-5.8851427
0.0625	2.13	2.1971873	2.7570967	-5.8873656
0.03125	5.31	2.1972223	2.7571210	-5.8875015
M2 metodu				
k	$L_{\infty}$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.5	67.31	1.3681545	2.7281774	-4.1621117
0.25	6.90	2.1969062	2.7570932	-5.8868281
0.125	0.48	2.1972244	2.7571226	-5.8875101
0.0625	0.03	2.1972246	2.7571226	-5.8875106
0.03125	0.002	2.1972246	2.7571226	-5.8875106
Tam sonuç		2.1972246	2.7571226	-5.8875106

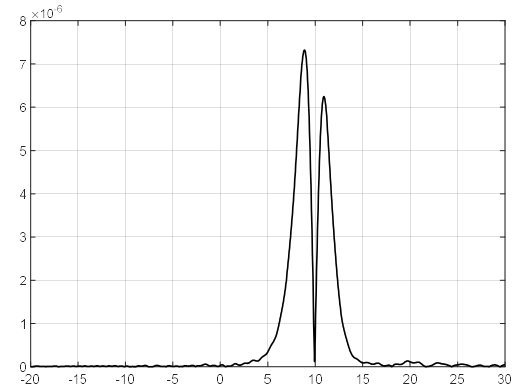
Program ilk olarak  $[a, b] = [-25, 35]$  konum aralığında  $\bar{x}_0 = 0$  seçimiyle  $t = 5$  zamanına kadar sabit  $h = 0.02$  konum aralık uzunluğu seçimi ile farklı  $k$  zaman artım uzunlukları için çalıştırılmıştır. Elde edilen hata normları ve korunum sabitleri Tablo 1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde yüksek doğruluklu zaman parçalanmasının kullanıldığı M2 metodunun oldukça iyi sonuçlar verdiği açıkça görülmektedir. Şekil 1 de  $t = 0$  ile  $t = 5$  zamanlarındaki dalgaların durumu, Şekil 2 ve Şekil 3 de ise önerilen her iki metot için mutlak hataların grafiği çizilmiştir.



Şekil 1:  $t=0$  ve  $t=5$  zamanında dalgaların durumu



Şekil 2: M1 için mutlak hata



Şekil 3: M2 için mutlak hata

$[a, b] = [-20, 60]$  konum aralığının eşit bölünme sayısı  $N = 512$  alınarak  $k = 0.05$  ve  $k = 0.01$  için  $\bar{x}_0 = 15$  seçimiyle  $t = 3$  zamanına kadar programlar çalıştırılmış ve elde edilen hata normları Tablo 2 de verilmiştir. Aynı tabloda kıyaslama yapmak için [8] numaralı referansta verilen çalışmada elde edilen sonuçlarda verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi M2 yöntemi M1 ve karşılaştırılan yöntemle göre daha iyi sonuçlar vermiştir.

**Tablo 2.**  $N = 512$  için  $t = 3$  zamanındaki sonuçlar

k	M1	M2	[8]
0.05	$8.63 \times 10^{-3}$	$3.68 \times 10^{-4}$	$9.6 \times 10^{-3}$
0.02	$3.32 \times 10^{-4}$	$3.27 \times 10^{-6}$	$3.0 \times 10^{-4}$

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ (DISCUSSION AND CONCLUSION)

Bu çalışmada GNLS denkleminin yaklaşık çözümü için doğrulukları iki ve dört olan iki zaman parçalanması ve konum parçalanması için septik B-spline kolokasyon yöntemi önerilmiştir. Her iki zaman parçalanması da tek adımlı yöntemlerdir. Zaman parçalanmalarına göre isimlendirilen iki yöntemin doğruluğunu test etmek için solitary dalgasının yayılımı test problemi kullanılmıştır. Test probleminde elde edilen sonuçlara göre dördüncü mertebeden zaman parçalanmasının kullanıldığı M2 metodunun GNLS denkleminin sayısal çözümü için oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

#### REFERANSLAR (REFERENCES)

- [1] Johnson, R.S., (1977), On the modulation of water waves in the neighbourhood of  $kh \approx 1.363$ , Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences 357(1689), 131-141.
- [2] Kakutani, T. and Michihiro, K., (1983), Marginal state of modulational instability-mode of Benjamin-Feir instability, Journal of Physical Society of Japan 52, 4129-4137.
- [3] Hasimoto, H. and Ono, H., (1972), Nonlinear modulation of gravity waves, Journal of Physical Society of Japan 33, 805--811.
- [4] Strauss, W.A., (1978), The non-linear Schrodinger equation, in Contemporary Developments in continuum Mechanics, edited by G. M. de la Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, NewYork, 452 p.
- [5] Lamb, G.L., (1980), Elements of soliton theory, John Wiley and Sons, 304 p.
- [6] Pathria, D. and Morris, J.L.I., (1990), Pseudo-spectral solution of nonlinear Schrödinger equation, Journal of Computational Physics 87, 108-125.
- [7] Muslu, G.M. and Erbay, H.A., (2005), Higher-order split-step Fourier schemes for the generalized nonlinear Schrödinger equation, Mathematics and Computers in Simulation 67, 581-595.

- [8] Irk D. and Dağ İ. (2011), Quintic B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation, Journal of the Franklin Institute, 358(2), 378-392.