

MATEMATİK EĞİTİMİNDE GÖRSELLEŞTİRME YAKLAŞIMI

Ahmet IŞIK*

Alper C. KONYALIOĞLU**

Özet

Bu çalışmada, matematik eğitiminde kullanılan görselleştirme yaklaşımının matematik öğretimi üzerine etkileri tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Matematik eğitimi, matematik öğretimi, görselleştirme yaklaşımı*

VISUALIZATION APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

The effects of visualization approach have been discussed in mathematics education, in this study.

Key Words: *Mathematics education, mathematics teaching, visualization approach*

Giriş

Matematik eğitimi üzerine yapılan çalışmalarda, genel olarak matematiğin soyut yapısından kaynaklanan öğrenme zorluğunun eğitim-öğretim süreci içerisinde giderilebilmesi için en uygun yolların bulunması ve bu yönde yapılan çalışmalarla, öğrencilerin matematikte başarılı olmalarının ve matematiğe karşı pozitif tutum geliştirmelerinin sağlanması amaçlanmaktadır. Bundan hareketle matematik eğitimi araştırmalarında, üst düzeyde bilişsel etkinliklerin yapılmasını gerektiren, zihinde

* Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü
Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı. isik@atauni.edu.tr

** Yrd.Doç.Dr., Atatürk Üniv, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Bölümü
Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı.

yapılandırılması ve bir anlam verilebilmesi oldukça zor olan matematikteki soyut kavramların daha kolay ve kalıcı öğrenilebilmesine yönelik olarak öğrenme kuramlarından hareketle, bu soyut kavramların mümkün olduğunca somutlaştırılmasının gerektiği üzerinde durulmuş ve görselleştirme yaklaşımının bir araç olarak göz önüne alınabileceği ifade edilmiştir.

Görselleştirmenin bir yaklaşım olarak matematik eğitimcilerinin uğraş alanına girmesi matematikteki kavramların tarihi köklerinin ele alınmasıyla başlamış, daha sonra geniş çizim ve görselleştirme imkanları sunan bilgisayar teknolojisinin ortaya çıkmasıyla görselleştirme matematik eğitimi ile ilgilenen bir çok araştırmacının ilgi alanı olmuştur(Konyalıoğlu, 2003).

Görselleştirme yaklaşımı ile ilgilenen matematik eğitimcileri görselleştirmeyi çeşitli şekillerde tanımlamışlardır:

Zimmermann ve Cunningham (1991), görselleştirmeyi; “ister elle çizili, ister bilgisayarla çizili olsun matematikteki kavram, prensip ya da problemlerin geometrik veya grafik görüntülerinin oluşturulması ya da kullanım süreci” olarak tanımlamışlardır.

Schnotz vd.(1995) görselleştirmeyi; “görsel modelin zihinsel bir yapıya dönüşüm süreci” olarak tanımlamışlardır.

Zazkis vd.(1996) görselleştirmeyi, “bireyin içsel bir kavram ile duyular yoluyla kazandıkları arasında güçlü bir bağ kurma eylemi” olarak tanımlanabileceğini belirtmişlerdir. Bu görselleştirme sürecinin; bireyin dış dünyada algıladığı bir obje ya da olayı zihninde canlandırması veya bir karton, bir karatahta ya da bilgisayar kullanarak zihninde canlandığı bir yapının fiziksel dünyaya aktarılması şeklinde olabileceğini belirtmişlerdir.

Dolayısıyla görselleştirme eylemi, dıştan içe dönük ya da ters yönde bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Aynı zamanda görselleştirme, şekil ve zihin arasında birey tarafından kurulan bir bağlantıdır(Zazkis vd 1996).

Basit bir ifade ile soyut kavramların somut ya da yarı-somut yapılarla ifade edilmesi olan görselleştirme yaklaşımında temel amaç ise; geometrik kavram ve modellerden hareketle öğrencinin ilgisini çekerek çeşitli aksiyom sistemlerinin ve çeşitli uzayların varlığını sezdirmek, bireye

soyutlama alışkanlığı kazandırarak bu yolla zihinsel bağımsızlığını ve üretkenliğini geliştirmek, anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlamaktır(Konyalıoğlu, 2003).

Ersöy vd (1991). matematiğin bilinen anlamda deneylik (laboratuvar) olmayan bir bilim olduğunu, ne var ki matematik konu ve problemlerini kolay anlayabilmek ve anlatabilmek için genellikle şekil kullanılabileceğini ve burada temelde öğrenciden beklenen şeyin şekil ya da çizimlerden bağımsız bir metin üretmesi olduğunu ve bu ürünün ortaya çıkmasında sezginin temel dayanağının çizimler olduğunun unutulmaması gerektiğini belirtmektedirler.

Bir bakıma görselleştirme “deney dünyası” ile “düşünme ve akıl yürütme dünyası” arasında bir köprü olarak ifade edilebilir (Konyalıoğlu, 2003).

Grafikler, diyagramlar ve çeşitli geometrik şekil ya da modeller, düşüncelerin, fikirlerin ve soyut kavramların görselleştirilmesinde bir araçtır. Bunlar vasıtasıyla insan düşüncesi, dış dünya ile soyut kavramlar arasında ilişki kurar. Yani, cebirsel yapıların geometrik ifadelerle sunulması, öğrencilere bir fiziksel modelden hareketle mantıki teorinin nasıl kurulduğunu göstermeye yardım eder (Konyalıoğlu, 2003). Sfard (1994), matematikçilerin şemaları düşüncelerini geliştirme ve iletişim kurma aracı olarak kullandıklarını belirtmektedir. Polya(1957), problem çözmeye başarılı olmak için, kendi matematiksel tecrübelerine dayalı olarak buluşsal öneriler listesi hazırlamış ve bu öneriler arasında öğrencilere özellikle şekil çizmeyi tavsiye etmiştir. Polya (1957), şekillerin yalnızca geometri konularıyla sınırlı olmadığını üzerinde özellikle durmuştur. Polya (1957), problem geometri problemi olmasa bile şekil çizmenin mümkün olduğuna ve bu yolun zorlanması gereğine ve ayrıca geometrik olmayan herhangi bir problem için geometrik tasvir oluşturmanın çözüm için önemli bir aşama olduğuna inandığını söylemektedir. Hacısalihoğlu (1998), öğrenmenin bir algılama işi olduğunu ve matematikte dokunma, işitme ve görme (yazma, söyleme ve çizme) gibi üç önemli duyu organı kanalıyla daha kuvvetli

algılanmanın sağlanacağını ve matematikte kavram, çizim ve ispatların öğrencinin düşünce sisteminin gelişmesine yardım edeceğini belirtmiştir. Ersoy vd (1991) matematikte ispat biçimlerini esinlendiren ve bir problemin çözümünde izlenecek yolun sezilmesini sağlayan şeyin öncelikle şekiller olduğunu belirtmişlerdir. Soyut kavramlarla ilgili şekiller çizmek özellikle zihinde bir yoruma sebep olur. Öğrenciler somut ya da şekilsel algıladıkları soyut kavramları sınıflandırmak, sıralamak ve şematize etmek suretiyle bilgiyi iyi ve kalıcı bir şekilde öğrenebilirler (Konyalıoğlu, 2003).

Matematiğin çeşitli alanlarında görselleştirmenin önemi ile ilgili çok sayıda araştırma yapılmıştır. Halmos (1987), matematikte daha ileri bilgi düzeyine sahip olunabilmesi için matematikçinin görselleştirme yeteneği ile doğması gerektiğini belirtmektedir. Goldenberg (1987) *“...uygun görsel temsillerin, cebir derslerinde, öğrencilerinin başa çıkmak zorunda oldukları sembol sistemini anlamlandırmaya yardımcı olduğunu ve bu yolla sistemin öğrenimini teşvik ettiğini düşünmek teorik olarak makuldür”* şeklinde bir ifadeye bulunmuştur. Ben-Chaim vd (1989) ise; *“Tecrübelerimizde gördük ki ortaokul öğrencileri ve hatta anaokulu öğretmenleri, daha soyut cebirsel genelleştirmeleri anlayabilmelerinden önce, problemlere somut ve yarı-somut temsiller yoluyla yaklaşan tecrübelere ihtiyaç duymaktadırlar”* şeklinde bir yorumda bulunmuşlardır. Soyut yapı ve kavramların geometrik modeller yardımıyla görselleştirilmesi, bu kavramların öğretilmesi ve öğrenilmesinde bir uyarı ve motivasyon görevi üstlenebilir. Görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin kendi iç yapılarında matematiksel kavramlarla ilgili özel anlamlar kurmalarına imkan verebilir ve böylelikle matematikte belli aşamalar kat etmelerini sağlayabilir. Ayrıca görselleştirmenin önemi, hem kavramı soyutlamada alt yapı teşkil etmesi hem de kavramın inşa sürecinin anlaşılmasındaki mantıki yardımından kaynaklanabilir ve yine görselleştirmenin matematikte, öğrencilerin soyut bir kavram veya sistemi somut ya da yarı-somut bir ortama dönüştürebilme ya da tersine somut ya da yarı-somut ortamdaki kavram veya sistemi soyuta çevirebilme yeteneklerini de geliştirebilir (Konyalıoğlu, 2003).

Görselleştirmenin matematik öğreniminde tamamen pozitif bir faktör olduğunu öngören bu kanaat, kaçınılmaz bir sonuç değildir. Görselleştirmenin matematikteki rolü çokça tartışılmıştır. Birçok araştırmacı ve yazar matematiksel kavramların resimli ve zihni temsillerinin teşvik edilmesinin lehinde ve aleyhinde görüş beyan etmiştir. Bunların bazıları bu tür bir görselleştirmenin matematik öğreniminde kavramayı, kendine güveni ve yaratıcılığı kolaylaştıracağına inanmaktadırlar (Dirks 1980, Goldenberg 1987, Bennett 1988, Willis ve Fuson 1988, Clements ve Campo 1989, Ben Chaim vd 1989, Thomas 1992, Kaljumagi 1992, Karsai vd 2002, Konyalıoğlu vd 2003). Yine bazıları, görsel düşünmenin öğrencilere matematik uygulamalarında alternatif ve güçlü bir kaynak olabileceğini, bunun matematik üzerine düşünmek için yeni yollar açacağını savunmakla birlikte görselleştirmenin ve görsel mantık yürütmenin matematik öğrenimi için önemli olduğunu ifade etmektedirler (Rival 1987, Tall 1991, Barwise ve Etchemendy 1991, Zimmermann ve Cunningham 1991). Başka bir grup ise; bir resmin temsil ettiği, sadece bir durum içeren bir senaryonun sınırlı etkisi sebebiyle, görselleştirmeye fazla bel bağlamanın matematiksel düşüncüyü engelleyebileceğini savunmaktadır (Poage ve Poage 1977, Vinner ve Hershkowitz 1980). Yine bazı araştırmacılar çalışmalarında, matematikteki görselleştirmeye karşı çoktan beri var olan bir önyargıyı ele almışlardır (Eisenberg ve Dreyfus 1986, Goldin 1987, Lean ve Clements 1981, Presmeg 1986, Rival 1987). Barwise ve Etchemendy (1991) bu konuda şu şekilde bir ifadeye bulunmuşlardır; "*Görsel imajların insanın bilişsel faaliyetlerindeki açık önemine rağmen, görsel temsil matematiğin hem teorisinde hem de pratiğinde ikinci sınıf bir vatandaş olarak kalmaktadır. Bilhassa bize diyagramların ve grafiklerin temsil formlarının kullanımını zaruri hale getiren delillere yan gözle bakmamız öğretilmiştir ve biz de bu hor görüşü öğrencilerimize aktarıyoruz*". Eisenberg ve Dreyfus (1986) şekillerin kullanımına yönelik olumsuz düşüncelerin, eğitimciler arasında bulunmaya meyilettiğini, fakat gerçekte matematiği kendi çalışmalarında bir araç olarak kullanan profesyonel matematikçiler arasında

pek görülmediğine işaret etmektedirler. Şekillerin hor görülmesinin sebebinin, şekle dayanan bir delilin ne güçlü ne de geçerli olduğu şeklindeki köklü bir felsefi inanç olarak görünmekte olduğunu belirten Eisenberg ve Dreyfus (1986), matematiğin görsel olmadığı yönünde köklü bir inanç olduğuna işaret etmekte ve şunu söylemektedirler "*Akademik topluluk içerisinde, eğer bu matematik görüşünü devam ettirdiği için suçlanacak birileri varsa onlar biziz*". Cunningham (1991) matematikte görselleştirmeye karşı bu ön yargının olması ile ilgili olarak; "*19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında sembolik, formal matematikte elde edilen kayda değer başarı, matematikçileri tamamen sembolik çalışmaya yönlentmiş ve matematiğe yönelik görsel yaklaşımları gözden düşürmeye sevk etmiştir*" şekilde bir ifade de bulunmaktadır. Tall (1991) ise, görselleştirmeyi yalanlamanın ya da reddetmenin matematiksel fikirlerin büyük çoğunluğunun köklerini yalanlamak olacağını, çünkü matematikteki konuların gelişiminin ilk dönemlerinde, görselleştirmenin bu fikirlerin temel kaynağı olduğunu belirtmiştir.

Her ne kadar soyut ve karmaşık olursa olsun, görselleştirilebildiği müddetçe matematikteki soyut bilgilerin ve kavramların anlamlı ve kalıcı öğrenilmesi ve öğretilmesi mümkün olabileceği söylenebilir. Matematiğin soyut yapısı görselleştirmeye dayalı aydınlanma ışığında kolay, anlaşılır ve sevilir hale gelecektir.

Matematik öğretim yöntemleri ve teknikleri veya stratejileri üzerine çalışan bir çok matematikçi, görüldüğü üzere matematik öğretiminde somutlaştırma veya görselleştirme yaklaşımı hakkında farklı görüş bildirmişlerdir. Geçmişten bu güne bakıldığında matematik öğretiminde hatalar yapılmış, hatta kavram yanlışlarına düşülmüştür. Matematik öğretiminde görselleştirme yaklaşımının fazla yararlı olmadığını savunanlara dikkat edilirse alternatif bir öğretim yöntemi de genelde önerememişlerdir. Çünkü bu görüşe sahip olan matematikçiler n-boyutlu uzaylarda $n > 3$ olması halinde görselleştirme metodunun uygulanabilir olmadığını

düşünmektedirler. Doğrusu budur, fakat kavramlarda soyutlamanın zorunlu olduğu gerçeği unutulmamalıdır.

Kabaca kavramın tanımının “nesnelerin insan zihninde olgunlaşması” şeklinde olduğu düşünülürse, matematiksel kavramların soyutlanmasının uzayların boyut kavramından bağımsız olabileceği düşünülebilir. Örneğin $n=2$ için bir $v=(a,b)=a\vec{i}+b\vec{j}$, i ve j birim vektörlerdir. vektörünün grafiği istendiğinde öğrencilerin tamamına yakından doğru cevap alınabilirken, $n=3$ için $v=(a,b,c)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ şeklinde bir vektörün çizimi istendiğinde başarı oranının %30 lara düştüğü lineer cebir derslerinin işlenilişi sırasında görülmüştür. Bu da matematik öğretiminde görselleştirme yaklaşımı ile soyutlamanın daha iyi kavranabileceğini ifade eder.

Sonuç

Görselleştirmenin matematik eğitiminde kullanılmasının öğrencileri hem bilişsel hem de duyuşsal açıdan olumlu yönde etkileyebileceği açıktır. Bunun için, görselleştirmenin ilköğretimin ilk kademesinden başlanarak matematik eğitiminde kullanılması matematik eğitime yeni bir boyut kazandıracaktır. Görselleştirme, öğrencinin dikkatini çekmede, öğrenciyi güdülemede, öğrenmeyi somutlaştırarak anlamlı kılmada, öğrencinin kendi bilgilerini organize etmesinde ve kavramların somut ve soyut ifadelerinin ilişkilendirilmesinde yararlı bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır.

KAYNAKÇA

- Barwise, J. and Etchemendy, J., 1991. Visual information and valid reasoning. In W. Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 9-24, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Ben Chaim, D., Lapan, G. and Houang, R., 1989. The role of visualization in the middle school mathematics curriculum, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), 49-59

- Bennett, A., 1988. Visual thinking and number relationships, *Mathematics Teacher*, 81, 167-172.
- Clements, M. and Campo, G.,1989. Linking verbal knowledge, visual images and episodes for mathematical learning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 25-33.
- Cunningham, S.,1991. The visualization environment for mathematics education, In W. Zimmermann and S.Cunningham(Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, 67-76, *Mathematical Association of America*, Washington DC.
- Dirks, M., 1980. Say it with pictures, *Arithmetic Teacher*, 28 (3), 10-12.
- Eisenberg, T. and Dreyfus, T., 1986. On visual versus analytical thinking in mathematics. In C. Hoyles, R. Noss and R. Sutherland (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 153-158, *Institute of Education*, London, U.K.
- Ersoy, Y., Kaya, R., Aksu, M., Tezer, C., Demirbaş, M. ve Özdeş, A., 1991. *Matematik Öğretimi*, Anadolu Üniversitesi, Açık Öğretim Fakültesi Yayınları No. 113, 332-333, Eskişehir.
- Goldenberg, E., 1987. Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs, In J.Bergeron, N. Herscovics and C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 197-203, *University of Montreal*, Montreal, Canada.
- Goldin, G., 1987. Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In Claude Janvier (Ed.), *Problems in representation in the teaching and learning of mathematics*, 125-145, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Halmos, P., 1987. I want to be a mathematician, *The Mathematical Association of America*, Washington D.C.
- Kaljumagi, E., 1992. A teacher's exploration of personal computer animation for the mathematics classroom, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 11, 359-376.

- Karsai, J., Racz, E.V., Schwenk, A. and Kalus, N., 2002. Visualization and art in the mathematics classroom, IS-APMEF 2002, May 31-June , 2002, Pecs, Hungary.
- Konyalıoğlu, A.C., İpek, A.S. and Işık, A., 2003. On the teaching linear algebra at the University level: The role of visualization in the teaching vector spaces, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 7 (1), 59-67.
- Konyalıoğlu, A.C., 2003. Üniversite Düzeyinde Vektör Uzayları Konusundaki Kavramların Anlaşılmasında Görselleştirme Yaklaşımının Etkinliğinin İncelenmesi, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Poage, M. and Poage, E., 1977. Is one picture worth one thousand words? Arithmetic Teacher, 24, 408-414.
- Polya, G., 1957. How To Solve It, A New Aspect of Mathematical Method, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Presmeg, N., 1986. Visualisation and mathematical giftedness, Educational Studies in Mathematics, 17, 297-311.
- Rival, I. 1987. Picture Puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning, The Sciences, 27, 40-46.
- Schnotz, W., Zink, T. and Pfeiffer, M., 1995. Visualization in learning and instruction: Effect of graphic representation formats on the structure and application of knowledge, Research Report-5, Freidrich-Schiller Univesity of Jena.
- Sfard, A., 1994. Reification as the birthof metaphor, For the Learning of Mathematics,14, 44-55.
- Tall, D.,1991. Intituon and rigour: The role of visualization in the calculus, In W.Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 19, 105-119, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Thomas, D., 1992. Using computer visualization to motivate and support mathematical

dialogues, *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*, 11, 265-274.

Willis, G. and Fuson, K., 1988. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems, *Journal of Educational Psychology*, 80, 192-201.

Zazkis, R., Dubinsky, E. and Dautermann, J., 1996. Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.

Zimmermann, W. and Cunningham, S., 1991. Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W.Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-8, *Mathematical Association of America*, Washington DC., America.