

MATEMATİKSEL İNDÜKSİYON METODU

Abdullah Kaplan*

A.Sabri İPEK**

Seyfullah HIZARCI***

Özet

Matematiksel induksiyon başlıca ispat yöntemlerinden biridir. Bu çalışmada, matematiksel induksiyon metodunun matematik öğretimindeki önemi ve etkinliği araştırılmıştır. Ayrıca, bu metodun geometri öğretiminde nasıl kullanılabileceği bazı uygulamalar göz önünde bulundurularak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İndüksiyon Metodu, Matematik Öğretimi

Abstract

Mathematical induction is one of the main proving procedures. In this study, the importance and the efficiency of mathematical induction method in mathematics teaching have been investigated. In addition, the possible use of the method by considering some applications in geometry teaching has been investigated.

Key Words: Mathematical Induction Method, Mathematics Teaching

1.Giriş

Bilim dalları içerisinde matematiğin, ispata yönelik bir çalışma alanı olduğu genel bir kanıdır. Matematiğin var olduğu günden beri, ispat kavramının matematiksel bilimlerin bir parçası olarak düşünülmesi sonucu,

* Yrd. Doç. Dr. Atatürk Üniversitesi K.K.Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü

** Yrd. Doç. Dr. Atatürk Üniversitesi K.K.Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü

*** Yrd. Doç. Dr. Atatürk Üniv K.K.Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları

bu yaklaşımın tarihsel bir perspektif olarak yerleştiği görülmektedir. İlk pratik ve bilimsel bilginin tümdengelimci matematik sistematiği içerisinde yer almasından beri matematiksel ispat, modern matematiğin merkezi bir yapıtaşı olmuştur. Bu kavramın matematik ders müfredatlarında yer alması da uzun dönemler öncesine dayanmaktadır. İkinci dünya savaşı sonrası dönemde eğitim alanındaki en önemli atılımlardan biri olan yeni matematik hareketi sürecinde, ispat kavramı matematikle ilgili diğer alanlara da uygulanmıştır. Bu süreç sonucunda; öğrencilerin ispat kavramına bakış açıları

tespit etmeye yönelik birçok çalışma yapılmıştır [3,4,5,9]. Ayrıca yapılan bazı çalışmalarda öğrencilerin ispat kavramının öğrenilmesi sürecinde ciddi zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir [8,11]. Bu noktada; öğretmen ve öğrencinin matematiksel ispat kavramına bakış açısının ve bu kavramın öğrenciye kazandırılma biçiminin özel bir önemi vardır.

İspatlanması istenen teoreme, belli bir ilişkiyi ortaya koyan bir genelleme olarak bakılabilir[12]. Dolayısıyla öğretmen ve öğrencinin öncelikle ispat edilecek bir genellemeye ulaşması beklenir. Örneğin; üçgen alan formülünün dikdörtgenin alan formülünden, dairenin alan formülünün ise üçgenin alan formülünden yararlanarak oluşturulabileceği görülmelidir. Matematik öğretiminde öğretmen ve öğrenci ispat kavramına bu açıdan bakarsa, bu kavramın öğrencinin muhakeme gücünün gelişmesindeki etkisi artırılabilir. Matematiksel ispat kavramı üzerine yapılan bir araştırmada; derslerde düzenlenen etkinliklerin sosyal yönünün kurgulanması halinde, ispat kavramını anlamının daha iyi bir iletişim olanağı sağlayabileceği üzerinde durulmuştur[1]. Matematiksel ispat kavramı, sosyal bir pratik olarak göz önüne alınabilir ve bu kavramın matematik öğretiminde bireysel ve bireyler arası anlamları analiz edilebilir. Dolayısıyla bu kavramın yalnızca matematikte değil, aynı zamanda birçok bilim dalında da uygulama olanağı ortaya çıkar.

Matematikte ispat yöntemleri içerisinde en önemlilerinden biri matematiksel induksiyon metodudur. Bu metottan matematikte ve diğer bilim dallarında geniş ölçüde yararlanılmaktadır. Genel olarak tümevarım prensibine dayalı ispata matematiksel induksiyon metodu adı verilmektedir. Matematiksel induksiyonla ispat metodunun diğer ispat yöntemlerinden daha az açıklayıcı olduğunu belirtilmiştir [7]. Bu düşüncenin genel bir değerlendirme olarak haklılık payı olmasına rağmen, bu metodu diğer ispat metotlarından farklı pozitif yönleri de olduğu bir gerçektir. Bu ispat metodu sorgulanamaz veya ezberlenmesi gerekli bir kavram olarak düşünülen ispat kavramına öğrencinin eleştirel yaklaşımını teşvik eder. Dolayısıyla matematiksel induksiyon metodu sorgulayıcı ve yaratıcı ispat için güçlü bir araçtır. Nesne ve olayların anlaşılma sürecinde sıkça kullanılan bu metot, matematikte olduğu kadar mantıksal sistemlerin incelenmesinde de kullanışlı bir metottur.

Bu özelliklerine rağmen; öğretim sürecinde matematiksel induksiyon metodundan yeterince ve etkili bir şekilde yararlanabilmekte miyiz? Bu soru irdelenmesi gerekli bir sorunu ortaya koymaktadır. Matematik ve mantıksal sistemlerdeki yaygın uygulanabilirliğine rağmen, bu metottan gerektiği oranda faydalanabildiğimizi söylemek pek mümkün değildir.

Bu çalışmada, öncelikle matematiksel induksiyon metodunun matematik öğretimindeki önemi incelenmiştir. Özellikle öğrencide yaratıcı düşünce gelişimini oluşturmada, bu tekniğin işlevi ortaya konmaya çalışılmıştır. Son bölümde; bu tekniğin matematik ders müfredatlarında pek yer almayan geometri konularına nasıl uygulanabileceği örneklerle sunulmaya çalışılmıştır.

2. Matematiksel İndüksiyon Metodunun Matematik Eğitimindeki Önemi

Matematiksel induksiyon metodu matematiğin birçok dallarında uygulama alanı bulmaktadır. Bu metottan hem orta öğretim hem de yüksek öğretim matematiği müfredatlarında yararlanılmaktadır. Ancak; bu ispat

metodunun uygulamalarının belirli konularla sınırlandırıldığı görülmektedir. Halbuki matematiksel indüksiyon metodu matematikteki birçok önerme yada aksiyomların gerçekleşmesinde kullanılabilir. Dolayısıyla matematikle ilgili bireyin, bu metodu iyi bir şekilde bilmesi ve nasıl uygulanabileceği ile ilgili bilgi sahibi olması gerekir. Aynı zamanda bu teknik, genel anlamıyla öğretici ve yapıcı bir değer taşıdığından matematikle ilgisi olmayan bireyler için de çekicidir. Matematiksel indüksiyon metodunda ispat iki aşamadan ibarettir.

1.Aşama: İddia, ifadeyi gerçekleyen en küçük k tamsayısı için ispat edilir.

2.Aşama: İddia, $n \geq k$ doğal sayısı için doğru ise bu sayının ardışı olan $n+1$ sayısı içinde doğru olacağı gösterilir.

Matematiksel indüksiyonla yapılan biçimsel ispatlarda genellikle tümevarım aşaması öğrenciler için bir problemdir[10]. Tümevarım (özel bir durum için genel bir yargıya varma) varsayımı kendi içinde benzer biçimsel bir yapıya sahiptir. Dolayısıyla öğrencide ispat etmeye çalıştığı iddianın, varsayıldığı şekliyle istendiği şeklinde bir izlenim oluşabilir. Ayrıca öğrencide genellikle ispatın ilk aşamasının gerekli olmadığı sadece ikinci aşamanın gerçekleştirilmesi halinde ispatlama işleminin tamamlanacağı şeklinde bir fikir de oluşabilir. Yalnızca ikinci aşamanın gerçekleşmesi ispat için yeterli değildir. Örneğin iddia; herhangi bir n sayısının ardışığına eşit olduğu ise, yani $n = n+1$ ise, bu eşitliğin her iki tarafına 1 ilave edilerek $n+1 = n+2$ elde edilir. Dolayısıyla $n+1$ sayısı da ardışığına eşit olur. Buradan bütün n sayıları için doğru olduğu sonucuna ulaşmak mümkün değildir.

Matematiksel indüksiyon metodu, matematik eğitiminde önemli bir yeri olan buluş yoluyla öğretim stratejisinin uygulanmasında önemli bir role sahiptir. Matematik eğitimine önemli katkılar sağlamış olan Polya, buluş sanatı olarak adlandırdığı çalışmalarında, bu yöntemin önemi ve bu yöntemin matematik öğretimine uygulanabilirliği üzerinde durmaktadır. Polya'nın bu stratejisinin dört basamağa indirgenmesi mümkündür.

- 1.*Basamak:* Merak güdüsünü uyandırarak öğrenciyi problemi oluşturma ve anlama çabası içine sokmak
- 2.*Basamak:* Probleme ilgili verileri analiz etmek, veriler arasında bağlantılar oluşturmak ve problemi basitleştirmek amacıyla ana hatlarına indirgemek
- 3.*Basamak:* Sezgisel tahminlerde bulunarak genelleme yada teoremler ulaşmak.
- 4.*Basamak:* Varılan çözüme alternatif çözümler ilave etmek ve bu çözümler içerisinde en uygununu seçmek.

Öğrencide, buluş yoluyla öğrenme basamaklarının oluşmasının tümevarımla gerçekleştirilebileceği kabul edilmektedir. Bu yolla öğrenci, bilgiyi sadece alma rolünden sıyrılmakta; aynı zamanda aldığı bu bilgiyi uygulama, analiz ve sentez etme aşamalarında kullanabilmektedir. Öğrencinin klasik eğitim ortamlarında olduğu gibi, pasif yapıdan çıkıp aktif olarak öğretim sürecine katılmasının gerekliliğini vurgulayan bu yaklaşımda, öğrencinin ilgi ve yeteneklerinin ortaya çıkarılması amaçlanır. Buluş yoluyla öğrenme, öğrencinin davranışları, kendi gözlem ve etkinliklerine dayanarak kazanmayı esas alır[2]. Öğrenciye eleştirel ve yaratıcı düşüncenin kazandırılmasının amaçlandığı matematik öğretim ortamlarına en uygun öğrenme modellerinden biri buluş yoluyla öğrenmedir. Matematik derslerinde; matematiksel indüksiyon metodunun kullanılması, buluş yoluyla öğretim stratejisiyle amaçlanan hedeflere ulaşmada etkin bir rol oynayabilir. Çünkü bu teknik ile buluş yoluyla öğrenme modeli arasında yakın bir ilişki vardır. Hem matematiksel indüksiyon metodu hem de buluş yoluyla öğrenme öğrencinin yaratıcı düşüncesini geliştirmeye olanak sağlar. Yalnız matematiksel indüksiyon metodunun uygulanması ile buluş yoluyla öğrenme stratejisine uygun etkinliklerin düzenlenmesi arasında küçük bir farklılık bulunmaktadır. Matematiksel indüksiyon metodunun uygulanmasında, öğrencinin bulması istenen hedef veya genellemeler önceden belirlenmiştir. Öğrencinin sezgisel olarak düşünmesi gerekmekte; fakat sonuca kendince ulaşması beklenmemektedir. Buluş yoluyla öğretimde ise; öğrenci ulaşması istenilen kural veya genellemelerden haberdar değildir. Öğretmen, öğrenciyi

bu kural ve genellemelere ulaşması için örnek olan ve olmayan ipuçları sunar. Öğrenci konu ve örnekler arasında bir bağlantı kurarak istenilen sonuca kendisi varır.

Matematiksel indüksiyon metodu öğrencide eleştirel ve yaratıcı düşünce gelişimine önemli katkı sağlar. Öğrencide bu düşünce gelişimini oluşturmada gerekli üç kavram: (1) Genelleştirme (2) Özelleştirme (3) Benzetmedir. Matematikte sonuçlara varmada ve yeni yapıları sorgulamada bu üç kavram sıkça kullanılır. Genelleştirme: verilen bir cümlede elemanlarını göz önünde bulundurarak, o cümleyi, kendini kapsayan daha geniş bir cümlede elemanlarını incelemeye bir geçiş olarak tanımlanabilir. Örneğin: üçgen kavramı ile ilgili bir teoremi, daha çok kenarı olan herhangi bir çokgene uygulamak bir genellemedir. Genel olarak genelleştirmenin tersi bir işlem olarak düşünülen özelleştirme: verilen bir cümlede elemanlarını göz önünde bulundurarak, ilgili cümlede herhangi bir alt cümlesinde elemanlarının incelenmesi için yapılan bir dönüşümdür. Asal sayılar ile ilgili herhangi bir teoremin, 13 gibi bir asal sayı için doğruluğunun incelenmesi bir özelleştirme örneğidir. Matematiksel ispatlarda sıkça kullanılan benzetme kavramı; iki sistemden birinin elemanları arasında tanımlı bağıntıların, diğer sistemin bu elemanlara karşılık gelen elemanları arasındaki bağıntılarla örtüşmesi durumu olarak tanımlanabilir. Ancak; benzetme kavramı yalnız başına kullanıldığında ulaşılmak istenen sonuç yanlış olabilir. Örneğin; her n pozitif tamsayısı için n^3-n sayısı 3 ile, n^5-n sayısı 5 ile, n^7-n sayısı 7 ile bölünebilmektedir. Bu benzerliğe dayanarak her n pozitif tamsayısı için n^k-n sayısının k ile bölünebileceği hükmü, $k=9$ için geçerli değildir. Yani bulunması amaçlanan sonuca yalnızca benzetme kavramı kullanılarak varılamaz. Herhangi bir genel kuralın incelenmesinde ileri sürülen hipotezlerin denenmesine ve bu hipotezlerden yanlış olanların ihmal edilerek doğru olanların kabulü temeline dayanan matematiksel indüksiyon metodu, bu üç kavramı ihtiva etmektedir. Yani bu kavramlar, matematiksel indüksiyon metodunun uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır. Bu kavramların öğrencide yaratıcı muhakeme gücünün gelişimindeki etkisi

açıktır. Dolayısıyla matematiksel indüksiyon tekniği, bu düşünce gücünün kazandırılmasında etkin bir rol oynayabilir.

3.Geometri Öğretiminde Matematiksel İndüksiyon Metodu

Matematiksel indüksiyon metodunun matematik öğretimindeki önemi ile ilgili yukarıda yapılan değerlendirmelerden sonra, bu bölümde, matematiksel indüksiyon metodunun geometri öğretiminde nasıl kullanılabileceği uygulamalarıyla beraber irdelenecektir. Matematik ders etkinliklerinde, öğrencinin eleştirel düşünce gelişimi önemli bir yer tutar. Geometri, öğrencide eleştirel ve yaratıcı düşünce becerilerinin gelişiminde önemli katkılar sağlayan bir alandır. Bu bağlamda; matematiksel indüksiyon metodunun geometri öğretimindeki uygulamaları ayrıca bir öneme sahiptir. Buna rağmen; matematiksel indüksiyon metodunun geometri derslerinde pek kullanılmadığı görülmektedir. Sayı kavramı ile bağlantısından dolayı matematiksel indüksiyon; genel olarak analiz, cebir ve sayılar teorisinde kullanılan bir metot olarak düşünülmektedir. Matematiksel indüksiyon, özel bir ilgi ve muhakeme gücü gerektiren bir ispat türüdür. Matematiksel indüksiyon metodunun bu yapısal özelliğini geometri problemlerinde gözlemlemek daha kolaydır. Bu metodun geometri derslerinde yeterli oranda kullanılmamasında; tümdengelimci öğretim yapısına uygun olduğu düşünülen geometriye bu metodun nasıl uygulanabileceği konusunda matematik öğretmenlerinin yeterli bilgiye sahip olmamaları en önemli neden olarak gözükmektedir. Örnek.1 bu metodun geometri öğretiminde nasıl kullanılabileceği ile ilgilidir.

Örnek 3.1: Bir n -gen(konveks olmayabilir) kesişmeyen köşegenleri yardımıyla kaç tane üçgene ayrılabilir[6].

Çözüm 3.1: i) Bir üçgen için bu sayının 1, bir dörtgen için 2 olduğu açıktır.

ii) $k < n$ olan her k -genin kesişmeyen köşegenlerle $k-2$ tane üçgene bölünebildiğini kabul edilsin. Ayrıca bir A_1, A_2, \dots, A_n n -geninin herhangi

üçgenlere bölünmesi göz önüne alınsın ve A_1A_k bu bölünmenin köşegenlerinden biri olsun. Bu köşegen A_1, A_2, \dots, A_n n-genini A_1, A_2, \dots, A_k k- genini ile $A_1A_kA_{k+1} \dots A_n$ (n-k+2)-genine ayırır. $k < n$ için bu önermeye göre, bu bölünme ile elde edilen üçgenlerin sayısı;

$(k-2) + [(n-k+2)-2] = n-2$ olur. Dolayısıyla iddia, her n için ispat edilmiş olur.

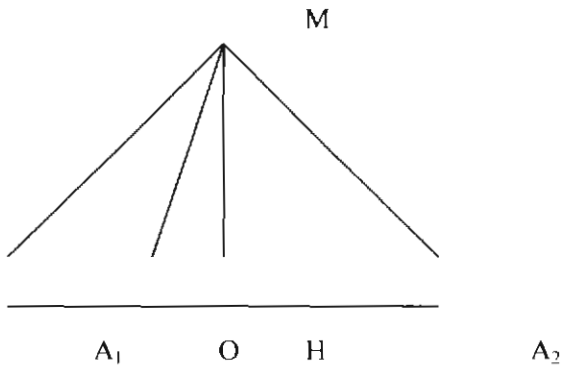
Cebir ve sayılar teorisinde olduğu gibi geometride de matematiksel indüksiyon metodu, en çok hesaplama problemlerinde kullanılır. Ayrıca bu metot, geometride, parçalara ayırma, çizim yapma ve geometrik yerlerin belirlenmesi gibi konulara da uygulanabilir. Örnek.2 bu metodun geometrik yerlerin belirlenmesi konusuyla ilgili bir uygulamadır.

Örnek 3.2: Verilen n noktaya olan uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometri yeri nedir?

Çözüm 3.2: A_1, A_2, \dots, A_n n nokta olsun. Özel olarak n=2 olarak seçilsin. Aynı zamanda A_1A_2 doğru parçasının orta noktası O olsun. Yani:

$$A_1O = \frac{1}{2} A_1A_2 \quad , \quad OA_2 = \frac{1}{2} A_1A_2$$

olsun. M noktası da, düzlemin herhangi bir noktası ve H, M den A_1A_2 doğrusuna indirilen dikmenin ayağı olsun (Şekil-1



Şekil-1

Buna göre;

$$MA_1^2 = MO^2 + A_1O^2 + 2A_1O.OH \quad (1)$$

$$MA_2^2 = MO^2 + OA_2^2 + 2OA_2.OH \quad (2)$$

dir.

$$|OA_2| \cdot (1) + |A_1O| \cdot (2)$$

ifadesinden;

$$\begin{aligned} MA_1^2 + OA_2^2 + MA_2^2 \cdot A_1O &= MO^2(OA_2 + A_1O) + A_1O^2 \cdot OA_2 + OA_2 \cdot A_1O \\ &= MO^2 \cdot A_1A_2 + A_1O \cdot OA_2 \cdot A_1A_2 \end{aligned}$$

(3)

elde edilir. A_1O ve OA_2 değerleri (3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} MA_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 + MA_2^2 \cdot \frac{1}{2} A_1A_2 &= MO^2 A_1A_2 + \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_1A_2 \\ &= MO^2 A_1A_2 + \frac{1}{4} (A_1A_2)^3 \end{aligned}$$

veya

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MO^2 + \frac{1}{2} (A_1A_2)^2$$

elde edilir. Buna göre, hipotezden $MA_1^2 + MA_2^2 = R^2$ sabiti göz önüne alınırsa;

$$MO^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} (A_1A_2)^2 = c$$

olur. Dolayısıyla;

$$i) K = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} (A_1A_2)^2 > 0 \quad \text{ise M noktalarının geometrik yeri;}$$

merkezi O, yarıçapı \sqrt{K} olan bir çember,

- ii) $K=0$ ise aranılan geometrik yer O noktası,
- iii) $K<0$ ise geometrik yerin hiçbir noktası yoktur.

4.Sonuç

Matematiksel indüksiyon ispat yöntemleri içerisinde en önemlilerinden biridir. Bu metot, matematiğin yanı sıra mühendislik ve mantık gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Matematik öğretim sürecinde matematiksel indüksiyon metodu, yaratıcı ispat için en önemli araçların başında gelmektedir. Bu tekniğin diğer ispat yöntemlerinden farklı öğretici ve şaşırtıcı bir yönü vardır. Özel durumlara dayanılarak genel sonuçlara ulaşmaya imkan sağlayan yapısı itibariyle bu metodun matematik öğretiminde yararlanılan ispat metotları içerisinde daha çok uygulama olanağı bulması, öğrencide eleştirel ve yaratıcı muhakeme gücünün gelişmesine olumlu katkı sağlayabilir. Ayrıca belirli konularla sınırlanmayıp matematik derslerindeki pek çok konuya uygulanması halinde, bu metot, öğrencide ispat kavramına farklı bir bakış açısı kazandırmada etkin bir rol oynayabilir.

Kaynakça

- [1] Alibert, D. & Thomas, M.,(1991), Research on mathematical proof. In: Tall, D., Editor, , 1991. *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, The Netherlands, pp. 215-230
- [2] Baykul, Y.(1999), Matematik Öğretimi, Arı Yayıncılık, Genişletilmiş 3. Baskı, Ankara
- [3] Brennan, C. M. (1976). Toward a theory of sequencing: Study 4-3: the development and investigation of a canonical teaching procedure for aspects of mathematical proof. Dissertation Abstracts International, 37, 7093A.

- [4] Bittinger, M. L. (1968). The effect of a unit in mathematical proof on the performance of college mathematics majors in future mathematics courses. *Dissertation Abstracts*, 29, 3906A.
- [5] Carlson, P. R. (1971). An investigation of the effects of instruction in logic on pupils' success in proving theorems in mathematics. *Dissertation Abstracts International*, 35, 7765A.
- [6] Golovina, L. I. , Yaglom, I.M. (1968), Geometride İndüksiyon, Çev: Büke, A., İstanbul
- [7] Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In: *Proceedings of the Thirteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-51), Paris.
- [8] Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics teacher*, 78, 448-456
- [9] Summa, D. J. (1981). The effect of proof format, problem structure, and the type of given information on achievement and efficiency in geometric proof. *Dissertation Abstracts International*, 42, 3084A.
- [10] Reid, D. A. (1992). *Mathematical induction: an epistemological study with consequences for teaching*. Unpublished Master's thesis, Concordia University, Department of Mathematics and Statistics
- [11] Williams, E. R. (1979). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton
- [12] Yıldırım, C. (1988), Matematiksel Düşünme, Remzi Kitabevi, İstanbul