Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **23** (2023) 061303 (1418-1427) AKU J. Sci. Eng.**23** (2023) 061303 (1418-1427)

DOI: 10.35414/akufemubid.1300509

Araştırma Makalesi / Research Article

Lie Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Kategoriksel Özellikleri

Pınar KÜÇÜKER[1], Ali AYTEKİN[2*]

[1] *Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli.*

[2] *Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Denizli.*

kucukerpinar@gmail.com *ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-5567-231X*

Sorumlu Yazar* eposta: *aaytekin@pau.edu.tr* *ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-7892-6960*

Geliş Tarihi: 22 Mayıs 2023 ; Kabul Tarihi: 16 Kasım 2023

Anahtar kelimeler
Lie Cebirleri; Çaprazlanmış Modüller; Geri Çekme; İleri İtme

Öz

Kategori teorisi, matematiksel yapılar ve bu yapılar arası ilişkiler ile soyut açıdan ilgilenen bir matematik kuramı olarak bilinmektedir. Ayrıca bir cebirsel yapının kategoriksel özelliklerini incelemek, o kategori hakkında detaylı bilgiye sahip olmak adına oldukça önemlidir. Bu makalede, Lie cebirleri ve onun çaprazlanmış modülleri hakkında temel bilgiler verilerek Lie çaprazlanmış modüller kategorisinin bir alt kategorisinde eşitleyici, çarpım, limit, geri çekme, ileri itme gibi bazı kategoriksel özellikler incelenmiştir.

Some Categorical Aspects of Lie Crossed Modules

Keywords
Lie Algebras; Crossed Modules;Pullback; Pushout

Abstract

Category theory is known as a mathematical theory that deals abstractly with mathematical structures and the relationships between these structures. In addition, examining the categorical properties of an algebraic structure is very important in order to have detailed information about that category. In this article, elementary properties were given about Lie algebras and their crossed modules. Some categorical aspects such as equalizer, product, limit, pullback, pushout were examined in a subcategory of the category of Lie crossed modules.

1. Giriş

Lie cebirleri, sonsuz küçük dönüşümler kavramını incelemek üzere Sophus Lie (1871) tarafından tanımlanmıştır ve Killing (1880, 1885) tarafından Lie'den bağımsız bir şekilde keşfedilmiştir. Daha önceki çalışmalarda "sonsuz küçük grup" şeklinde ifade edilen cebirsel yapıya Weyl (1931) tarafından "Lie cebir" ismi verilmiştir. Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından, Lie grupları ve cebirleri ile diferansiyel denklem sistemlerinin integrasyonuyla ilgili çalışmalar geliştirilmiştir. Lie cebirleri ve Lie teorisi matematiğin diferansiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gibi pek çok dalında çeşitli uygulamalara sahiptir.

Whitehead (1949) ilk kez gruplar üzerinde çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır. Whitehead tarafından yapılan çalışmada bilhassa relatif homotopi grupların cebirsel yönleri üzerine çaprazlanmış modüllerden bahsedilmiştir. O dönemden sonra çaprazlanmış modül kavramı pek çok başka alanda yer almıştır. Çaprazlanmış modülleri temel cebirsel yapılardan biri şeklinde düşünmek mümkündür. Ege (1998) tarafından da çaprazlanmış modüller üzerine çalışmalar yapılmıştır. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, cebirsel K-teori, kombinatoriyel grup teori, gruplarda homoloji, kohomoloji, devirli homoloji ve diferansiyel geometri gibi matematiğin pek çok alanında önemli yer tutmaktadır. Değişmeli cebirlerde çaprazlanmış modüller Porter (1986) tarafından tanımlamış olup Arvasi ve Porter (1996) da çalışmalarında bu konuya dair pek çok önemli sonuca ulaşmıştır. Sonrasında (Arvasi ve Ege Arslan 2003, Aytekin Arıcı ve Şahan 2022, Odabaş vd. 2016), Şahan 2018, Temel vd. 2020) gibi pek çok çalışma literatüre kazandırılmıştır.

Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller ise ilk defa Kassel ve Loday (1982) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller ile ilgili (Casas 1990, Ellis 1993, Casas ve Ladra 1998, 2000, Akça ve Arvasi 2002, Ilgaz Çağlayan 2022) gibi çalışmalar yapılmıştır.

Kategori teorisi, matematiksel yapılar ve bu yapılar arası ilişkiler ile soyut açıdan ilgilenen bir matematik kuramı olarak bilinmektedir. Farklı kategoriler, funktorlar aracılığıyla ilişkilendirilebilir. Funktorlar, ele alınan kategorinin her bir nesnesini farklı bir kategorinin bir nesnesi ile ve ele alınan kategoride bulunan morfizmi diğer kategorideki bir morfizm ile bağdaştıran fonksiyonların bir genelleştirmesi olarak düşünülmektedir. Eilenberg ve MacLane (1945) kategori, funktor ve doğal transformasyon kavramlarını ortaya atmıştır. Özellikle cebirsel topolojide, homolojiden homoloji teorisine geçiş için mühim yer tutmuştur. Kategoriksel özellikler, diğer matematiksel soyut terimler gibi yeni bir dil elde edilmesini sağlamaktadır. Bu dil, düşünce tasarrufuna yardım etmektedir ve farklı alanlarda araştırmacılar arasında daha kolay iletişim sağlanmasının yanı sıra görünüşte ilgisiz çeşitli teoremlerin ve yapıların altında yatan ortak temel fikirleri yüzeye çıkarmaktadır. Bu nedenle eski sorunları görmek için yeni bir bağlam ortaya koymaktadır. Böylece derin, güçlü, klasik sonuçların gerçekte ne olduğunu belirlemeye ve tasvir etmeye yardımcı olmaktadır. Kategoriksel özellikler ile ilgili (MacLane 1971, Herrlich ve Strecker 1973) tarafından detaylı çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca kategori ve funktorlarla ilgili (Aytekin 2019, 2021, Demirci 2011) gibi araştırmacılar çeşitli çalışmalarda bulunmuştur.

Lie çaprazlanmış modüllerin bazı kategoriksel özellikleri hakkında yapılan bu çalışmada; Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili bazı temel kavramlar incelenmiş, Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller ile ilgili bazı kavramlar ele alınmış, Lie çaprazlanmış modüller kategorisinde bazı kategoriksel özellikler verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

2.1 Lie Cebirleri

Tanım 2.1.1 $\boldsymbol{k}$ birimli ve değişmeli bir halka ve L bir $\boldsymbol{k}$-modül olsun. Her $l, l', l'' \in L$ için

i. $[l, l] = 0$

ii. $[l, [l', l'']] + [l', [l'', l]] + [l'', [l, l']] = 0$

özelliklerini sağlayan bir $[,]: L \times L \to L$ bilineer fonksiyonu var ise L ye $\boldsymbol{k}$ üzerinde bir Lie cebir veya Lie $\boldsymbol{k}$-cebir, $[,]$ fonksiyonuna da Lie çarpımı denir. Burada (ii) özelliği jacobi özdeşliğidir.
(i) sebebiyle; $0 = [l + l', l + l'] = [l, l'] + [l', l]$ olduğu için,

iii. $[l, l'] = -[l', l]$

iv. $[l, [l', l'']] = [[l, l'], l''] + [l', [l, l'']]$

elde edilir. Bu çalışma boyunca Lie $\boldsymbol{k}$-cebir yerine Lie cebir ifadesini kullanacağız.

Tanım 2.1.2 L_1 ve L_2 $\boldsymbol{k}$ üzerinde iki Lie cebir ve $\theta: L_1 \to L_2$ bir $\boldsymbol{k}$-modül homomorfizmi olsun. Her $a, b \in L_1$ için $\theta([a, b]) = [\theta(a), \theta(b)]$ ise θ ya bir Lie cebir homomorfizmi denir. Şayet θ bir Lie cebir homomorfizmi ve birebir örten ise θ ya bir Lie cebir izomorfizmi, L_1 ve L_2 ye de izomorfiktirler denir.

Tanım 2.1.3 A bir Lie cebir olup $B \subseteq A$ ve her $c, d \in B$ için $[c, d] \in B$ olsun. B, A nın alt modülü oluyorsa B ye A nın Lie alt cebiri adı verilir ve $B \leq A$ ile gösterilir. B, A nın Lie alt cebiri iken her $c \in B$ ve $d \in A$ olduğunda $[c, d] \in B$ oluyorsa B ye A nın ideali denir ve $B \trianglelefteq A$ ile gösterilir.

2.2 Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genişlemesidir. Aynı zamanda her halka kendisi üzerinde bir çaprazlanmış modül olduğundan, çaprazlanmış modüller, halkaların genellemesi olarak düşünülebilir.

Tanım 2.2.1 $\boldsymbol{k}$ sıfırdan farklı birime sahip olan bir değişmeli halka, L ve N iki Lie cebir olsun. O halde,

$$N \times L \to L$$
$$(n, l) \mapsto n^l$$

dönüşümü her $k \in \boldsymbol{k}$ ve $l, l' \in L$, $n, n' \in N$ için

i. $k^{(n^l)} = (k^n)^l = n^{(k^l)}$

ii. $n^{(l+l')} = n^l + n^{l'}$

iii. $(n + n')^l = n^l + (n')^l$

iv. $[n, n']^l = n^{((n')^l)} - n'^{(n^l)}$

v. $n^{[l,l']} = [n^l, l'] + [l, n^{l'}]$

şartlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme N nin L üzerinde Lie etkisi denir.

Tanım 2.2.2 L ve N iki Lie cebir olsun. $\alpha: L \to N$ bir Lie cebir homomorfizmi olmak üzere ve

$$N \times L \to L$$
$$(n, l) \mapsto n^l$$

N nin L üzerine Lie etkisiyle beraber her $l, l' \in L$ ve $n \in N$ için

i. $\alpha(n^l) = [n, \alpha(l)]$

ii. $(\alpha(l))^{l'} = [l, l']$

şartları sağlanıyorsa (L, N, α) üçlüsüne Lie çaprazlanmış $\boldsymbol{k}$-modül veya Lie çaprazlanmış modül denir. Makale boyunca Lie çaprazlanmış modül yerine kısaca çaprazlanmış modül ifadesi kullanılacaktır. Yalnızca (i) şartını sağlayan (L, N, α) üçlüsüne Lie ön çaprazlanmış $\boldsymbol{k}$-modül adı verilir.
(ii) özelliğine ise Peiffer özdeşliği adı verilir.

Örnek 2.2.1 L, herhangi bir $\boldsymbol{k}$-modül ve $l_1, l_2 \in L$ olmak üzere

$$L \times L \to \mathrm{L}$$
$$(l_1, l_2) \mapsto [l_1, l_2] = 0$$

çarpımı tanımlansın. L bir Lie cebir yapısı oluşturur. Diğer taraftan

$$0: L \to N$$
$$x \mapsto 0(x) = 0$$

biçiminde verilen sıfır morfizmi ve

$$N \times L \to \mathrm{L}$$
$$(n, l) \mapsto n^l = nl$$

etkisi her $n \in N$, $l, l' \in L$ için

i. $0(n^l) = 0(n, l) = 0 = [n, 0] = [n, 0(l)]$

ii. $(0(l))^{l'} = 0(l)l' = 0l' = 0 = [l, l']$

olduğundan $(L, N, 0)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.2.2 N ve L iki Lie cebir ve L nin N üzerinde bir etkisi var olsun.

$$\pi_1: L \ltimes N \to L$$
$$(l, n) \mapsto \mathrm{l}$$

birinci izdüşüm fonksiyonu ve L nin $L \ltimes N$ üzerine her $n \in N$, $l, l' \in L$ için

$$l^{(l',n)} = ([l, l'], l^n)$$

şeklindeki etkisi yardımıyla $(L \ltimes N, L, \pi_1)$ bir ön çaprazlanmış modüldür. Burada $L \ltimes N$ iki Lie cebirinin yarı-direkt çarpımıdır ve üzerindeki her $(l, n), (l', n') \in L \ltimes N$ için

$$[(l, n), (l', n')] = ([l, l'], [n, n'] + l^{n'} - l'^n)$$

braket işlemiyle birlikte bir Lie cebiridir.

Tanım 2.2.3 (L, N, α) ve (L', N', α') iki çaprazlanmış modül olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & L' \arrow[d, "\alpha'"] \\ N \arrow[r, "g"'] & N' \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $\alpha' f(l) = g\alpha(l)$ olacak şekilde, $f: L \to L'$, $g: N \to N'$ Lie $\boldsymbol{k}$-cebir homomorfizmlerinin oluşturduğu,

$$f(n^l) = (g(n))^{f(l)}$$

ile tanımlı bir $(f, g): (L, N, \alpha) \to (L', N', \alpha')$ morfizmi çaprazlanmış modül homomorfizmi olarak adlandırılır. Eğer f ve g birer Lie cebir izomorfizmi ise (f, g) ikilisi bir izomorfizm olup

$$(f, g)(f^{-1}, g^{-1}) = (id, id) = (f^{-1}, g^{-1})(f, g)$$

olacak şekilde

$$(f,g)^{-1} = (f^{-1}, g^{-1}): (L', N', \alpha') \to (L, N, \alpha)$$

ters çaprazlanmış modül izomorfizmi vardır. Böylece, objeleri; Lie çaprazlanmış modüller, morfizmleri; Lie çaprazlanmış modül homomorfizmleri olan bir kategori oluşturulur ve bu kategori ***LXMod*** ile gösterilir.

Not: (L,N,α) ve (L',N',α') iki çaprazlanmış modül ve $(f,g):(L,N,\alpha) \to (L',N',\alpha')$ Lie çaprazlanmış modül homomorfizmi olsun. $N = N'$ ve g nin birim dönüşüm olması durumunda, f bir Lie cebir homomorfizmi olduğundan $f(n^l) = n^{f(l)}$ olup, Tanım 2.2.3 de verilen diyagramın değişmeli olmasından $\alpha' f(l) = \alpha(l)$ elde edilir. Dolayısıyla, ***LXMod*** kategorisinde tanım kümesi (L,N,α) olan her bir morfizm bir $f: L \to L'$ Lie cebir homomorfizmi üzerinden faktörlendiğinden, objeleri ***LXMod*** kategorisinin objeleriyle aynı olan, morfizmleri N ye göre denklik sınıflarından oluşan altkategori ***LXMod/N*** ile gösterilir.

Örnek 2.2.3 (L,N,α) ve (L',N',α') iki çaprazlanmış modül olmak üzere, $(h, id):(L,N,\alpha) \to (L',N',\alpha')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi ise (L,L',h) bir çaprazlanmış modüldür. O halde α' yardımıyla L' nün L ye etkisi her $x' \in L'$ ve $x \in L$ için

$$(x')^x = (\alpha'(x'))^x$$

şeklindedir. Ayrıca

$$(id_L, id_N): (L,N,\alpha) \to (L,N,\alpha)$$

birim homomorfizmi (I,I) ile gösterilebilir.

Tanım 2.2.4 (L,N,α) bir çaprazlanmış modül, $L' \leq L$ ve $G' \leq G$ ise

$$\alpha': \alpha|_L : L' \to \mathrm{N}'$$

α nın L ye kısıtlanışı ve N' nün L' ne etkisi N nin L üzerine etkisinin kısıtlanmışı olduğundan (L',N',α') çaprazlanmış modülüne, (L,N,α) çaprazlanmış modülünün alt Lie çaprazlanmış modülü kısaca alt çaprazlanmış modülü denir ve $(L',N',\alpha') \leq (L,N,\alpha)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.2.4 K, N nin bir alt Lie cebiri iken (K,K,id_K), $(0,K,id_K)$, (N,N,id_N) ve $(0,N,id_N)$ birer çaprazlanmış modüldür. Ayrıca (K,K,id_K), (N,N,id_N) nin bir alt çaprazlanmış modülü, $(0,K,id_K)$ da $(0,N,id_N)$ nın alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 2.2.5 I, N nin herhangi bir ideali olsun. (I,N,id_N), (N,N,id_N) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 2.2.6 K ve M, N nin ideali; $M \subseteq K$ olmak üzere; (M,N,id_N), (K,N,id_N) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 2.2.7 K, N-modül; X, K içinde N-alt modül olsun. $(X,N,0)$, $(K,N,0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Tanım 2.2.5 (L,N,α) çaprazlanmış modül ve (L',N',α') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere eğer

i. N', N cebirinin bir idealidir,

ii. Her $n \in N$ ve $l' \in L'$ için $n^{l'} \in L'$,

iii. Her $n' \in N'$ ve $l \in L$ için $(n')^l \in L'$

şartları sağlanıyorsa (L',N',α') alt çaprazlanmış modülüne, (L,N,α) çaprazlanmış modülünün ideali adı verilir ve $(L',N',\alpha') \trianglelefteq (L,N,\alpha)$ biçiminde gösterilir. Burada $(L',N',\alpha') \trianglelefteq (L,N,\alpha)$ oluyorsa her $l \in L$ ve $l' \in L$ için $[l,l'] = (\alpha(l))^{l'} \in L'$ olduğundan L', L nin bir idealidir.

Örnek 2.2.8 $I \trianglelefteq N$ olmak üzere (I,I,id_I), (N,N,id_N) nin ve $(0,I,id_I)$ da $(0,N,id_N)$ nın bir çaprazlanmış idealidir.

Örnek 2.2.9 W bir $\boldsymbol{k}$-cebir, $I \trianglelefteq W$, $q \in I$ ve $w \in W$ olsun. Buradan

$$i: I \to W$$
$$q \mapsto q$$

içine dönüşümü ve W nin I üzerine etkisi

$$W \times I \to I$$
$$(w, q) \mapsto w^q = wq$$

ile birlikte her $w \in W$ ve $q \in I$ için

i. $\partial(w^q) = \partial(wq) = wq = w\partial(q)$

ii. $(\partial w)^{w'} = w^{w'} = ww'$

olduğundan, (I, W, i) bir çaprazlanmış modüldür. Aksine, $\partial: K \to W$ çaprazlanmış W-modül ele alındığında, $\partial K = I$ nın W de ideal olduğu açıktır.

Tanım 2.2.6 (L', N', α'), (L, N, α) nın bir ideali iken N' nün, L/L'üzerine etkisi

$$N' \times L/L' \to L/L'$$
$$\big(n', (l + L')\big) \mapsto (n')^{(l+L')}$$

olmak üzere

$$(n')^{(l+L')} = (n')^l + L'$$

olup $(n')^{l'} \in L'$ olduğu için sıfır olur. Buradan, N/N' bölüm Lie cebiri L/L' üzerine

$$N/N' \times L/L' \to L/L'$$
$$\big((n + N'), (l + L')\big) \mapsto n^l + L'$$

biçiminde Lie etkisi vardır. Ayrıca

$$\hat{\alpha}: L/L' \to N/N'$$
$$(l + L') \mapsto \alpha(l) + N'$$

bir Lie cebir homomorfizmidir. Buradan

$$(L/L', N/N', \hat{\alpha}) = \frac{(L, N, \alpha)}{(L', N', \alpha')}$$

çaprazlanmış modülü elde edilir ve buna bölüm çaprazlanmış modül adı verilir.

Örnek 2.2.10 N', N nin ideali olmak üzere;

$$\frac{(0, N, \iota)}{(0, N', \iota)} = (0, N/N', \iota)$$

Ve

$$\frac{N, N, Id}{N', N', Id} = (N/N', N/N', Id)$$

biçiminde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir.

Tanım 2.2.7 (S, T, α), (L, N, α') iki çaprazlanmış modül ve $S \times L$ ile $T \times N$ Lie cebirlerin direkt çarpımı olsun. Bu durumda

$$\alpha \times \alpha': S \times L \to T \times N$$
$$(s, l) \mapsto (\alpha(s), \alpha'(l))$$

dönüşümü ve

$$(T \times N) \times (S \times L) \to T \times N$$
$$((t, n), (s, l)) \mapsto (t, n)^{(s,l)} = (t^s, n^l)$$

biçiminde verilmiş olan çaprazlanmış modüllerin indirgenen Lie etkileri ile beraber,

$$(S \times L, T \times N, \alpha \times \alpha')$$

çaprazlanmış modülü oluşturulabilir.
Bu modüle ise (S, T, α) ve (L, N, α') çaprazlanmış modüllerinin direkt çarpımı denir ve $(S, T, \alpha) \times (L, N, \alpha')$ şeklinde gösterilir.

3. Bulgular

Bu bölümde, 2. Bölümde tanımlanan ***LXMod/L*** kategorisinin bazı kategoriksel özellikleri incelenecektir. ***LXMod/L*** nin bir objesine (M, L, β) çaprazlanmış L-modülü denir ve kısaca (M, β) ile gösterilir. (M, β) ve (M', β') iki çaprazlanmış L-modül olmak üzere (M, β) ve (M', β') arasındaki morfizm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & L \\ M' \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekildeki $f: M \to M'$ Lie cebir homomorfizmidir.

3.1 Eşitleyiciler

Teorem 3.1.1 ***LXMod/L*** kategorisinde aynı çaprazlanmış modüller arasındaki iki homomorfizm bir eşitleyiciye sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde

$$f, g: (M, \beta) \to (M', \beta')$$

iki morfizma,

$$E = \{m \in M: f(m) = g(m)\}$$

ve

$$\gamma = \beta\big|_E : E \to L$$

olmak üzere, her $l \in L, e \in E, l^e \in E$ için

$$f(l^e) = l^{f(e)} = l^{g(e)} = g(l^e)$$

dir. Diğer taraftan her $l \in L$ ve $e, e' \in E$ için

i. $\gamma(l^e) = \beta(l^e) = [l, \beta(e)] = [l, \gamma(e)]$

ii. $(\gamma(e))^{e'} = (\beta(e))^{e'} = [e, e']$

olduğundan (E, γ) bir çaprazlanmış L-modüldür.
Ek olarak, h: $(E, \gamma) \to (M, \beta)$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[d, equal, "Id_L"] \\
M \arrow[r, "\beta"'] & L
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde, (E', γ') bir çaprazlanmış L-modül ve tanımlanan v: $(E', \gamma') \to (M, \beta)$ morfizmi için $fv = gv$ olur. O halde,

$$u: E' \to E$$
$$e' \mapsto u(e') = v(e')$$

homomorfizmi olsun. Her $e' \in E'$ için

$$(hu)(e') = h\big(u(e')\big) = h\big(v(e')\big) = v(e')$$

olduğundan $hu = v$ olur. Şimdi u nun bir tek olduğunu gösterelim.
u' ile u aynı özellikte iki homomorfizm olmak üzere $v = hu$ ve $v = hu'$ olup

$$hu = hu'$$

olur. Ayrıca, her $e' \in E'$ için

$$v(e') = (hu)(e') = (hu')(e')$$
$$h\big(u(e')\big) = h\big(u'(e')\big)$$
$$u(e') = u'(e')$$

olduğundan $u = u'$ olur. Dolayısıyla u bir tektir. Bu homomorfizmi

$$\begin{tikzcd}
(E, \gamma) \arrow[r, "h"] & (M, \beta) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (M', \beta') \\
(E', \gamma') \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramıyla gösterilebilir. Buradan (E, h), (f, g) nin eşitleyicisidir.

3.2 Sonlu Çarpımlar

Teorem 3.2.1 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde (M, β) ve (N, γ) iki çaprazlanmış L-modül olsun. Buradan β ve γ nın çarpım objesinin $(p: M \times_L N \to L)$ objesi olduğu gösterelim. O halde,

$$M \times N = \{(m, n): m \in M, n \in N\}$$

olmak üzere,

$$f: M \times_L N \to L$$
$$(m, n) \mapsto f(m, n) = \beta(m) = \gamma(n)$$

homomorfizmi ve

$$L \times (M \times_L N) \to L$$
$$\big(l, (m, n)\big) \mapsto l^{(m,n)} = (l^m, l^n)$$

Lie etkisiyle birlikte $p: M \times_L N \to L$ çaprazlanmış L-modüldür. Ayrıca, çaprazlanmış L-modülün

$$u: M \times N \to M$$
$$(m, n) \mapsto m$$

Ve

$$v: M \times N \to N$$
$$(m, n) \mapsto n$$

iki homomorfizmi olmak üzere

$$\beta \xleftarrow{u} (p: M \times_L N \to L) \xrightarrow{v} \gamma$$

Olup

$$\begin{tikzcd}
& \beta \\
\delta \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"'] & p \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] \\
& \gamma
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü

$$h: S \to M \times N$$
$$s \mapsto h(s) = (f(s), g(s))$$

olmak üzere,

$$(uh)(s) = u\big(h(s)\big) = u\big(f(s), g(s)\big) = f(s)$$

Ve

$$(vh)(s) = v\big(h(s)\big) = v\big(f(s), g(s)\big) = g(s)$$

olduğundan $uh = f$ ve $vh = g$ olur.
Ek olarak her $l \in L, s \in S$ için

$$\begin{aligned} h(l^s) &= \big(f(l^s), g(l^s)\big) \\ &= (l^{f(s)}, l^{g(s)}) \\ &= l^{(f(s),g(s))} \\ &= l^{h(s)} \end{aligned}$$

olduğundan h bir homomorfizmdir. Şimdi h nin bir tek olduğunu gösterelim.
h' ve h aynı özellikte olmak üzere,

$$h': S \to M \times N$$
$$s \mapsto h(s) = (f(s), g(s))$$

olup $uh' = f$ ve $vh' = g$ olsun. O halde,

$$(uh')(s) = u\big(h'(s)\big) = u\big(f(s), g(s)\big) = f(s)$$
$$(vh')(s) = v\big(h'(s)\big) = v\big(f(s), g(s)\big) = g(s)$$
$$h'(s) = \big(f(s), g(s)\big) = h(s)$$

olduğundan $h = h'$ olur. Dolayısıyla h bir tektir. Buradan, $(p: M \times_L N \to L)$ objesi $\beta: (M \to L)$ ve $\gamma: (N \to L)$ objelerinin çarpım objesidir.

Sonuç 3.2.2 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu tamdır. Diğer bir deyişle bu kategori sonlu limitlere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisi eşitleyici ve çarpıma sahip olduğu için sonlu limitlere sahiptir.

3.3 Geri Çekmeler

Teorem 3.3.1 ***LXMod/L*** kategorisi geri çekmelere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f: (M, \beta) \to (M', \beta')$ ve $g: (N, \gamma) \to (M', \beta')$ iki morfizm olmak üzere

$$S = M \times_{M'} N = \{(m, n): f(m) = g(n)\}$$

ve S üzerindeki braket işlemi,
her $(m, n), (m', n') \in S$ için

$$[(m, n), (m', n')] = ([m, m'], [n, n'])$$

olup

$$\alpha: S \to L$$
$$(m, n) \mapsto \alpha(m, n) = \beta(m) = \gamma(n)$$

homomorfizmi ile L nin S üzerine etkisi her $l \in L$ ve $(m, n) \in S$ için

$$l^{(m,n)} = (l^m, l^n)$$

şeklinde tanımlansın.
Ayrıca her $(m, n), (m', n') \in S$ için

i. $$\begin{aligned} \alpha\big(l^{(m,n)}\big) &= \alpha(l^m, l^n) \\ &= \beta(l^m) \\ &= [l, \beta(m)] \\ &= [l, \alpha(m, n)] \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} (\alpha(m, n))^{(m',n')} &= (\beta(m))^{(m',n')} \\ &= ((\beta(m))^{m'}, (\beta(m))^{n'}) \\ &= ((\beta(m))^{m'}, (\gamma(n))^{n'}) \\ &= ([m, m'], [n, n']) \\ &= [(m, n), (m', n')] \end{aligned}$$

olduğu için (S,α) bir çaprazlanmış L-modüldür. Ek olarak, $f(m)=g(n)$ için

$$\begin{tikzcd}
(S,\alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (M,\beta) \arrow[d, "f"] \\
(N,\gamma) \arrow[r, "g"'] & (M',\beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Buradan, her $l\in L$ ve $(m,n)\in S$ için

$$\begin{aligned}(\beta u)(m,n) &= \beta\big(u(m,n)\big)=\beta(m)\\ &=\alpha(m,n)=(1_L\alpha)(m,n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}u\big(l^{(m,n)}\big) &= \alpha(l^m,l^n)=l^m\\ &=\big(1_L(l)\big)^{(u(m,n))}\end{aligned}$$

olduğundan u bir çaprazlanmış L-modül homomorfizmi olur. Benzer biçimde v nin de bir çaprazlanmış L-modül homomorfizmi olduğu gösterilebilir.

Şimdi (S',α') nın bir çaprazlanmış L-modül olduğunu gösterelim. $fu'=gv'$ olduğundan

$$\begin{tikzcd}
(S',\alpha') \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & (M,\beta) \arrow[d, "f"] \\
(N,\gamma) \arrow[r, "g"'] & (M',\beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Buradan, her $(m',n')\in S$ ve $\big(u'(m',n'),v'(m',n')\big)\in S$ için

$$\begin{aligned}(fu')(m',n') &= f(u'(m',n'))\\ &= f(m')\\ &= g(n')\\ &= g(v'(m',n'))\\ &= (gv')(m',n')\end{aligned}$$

olur.

d bir L-modül homomorfizmi olmak üzere

$$\begin{aligned}w\colon S' &\to S\\ d &\mapsto w(d)=(u'(d),v'(d))\end{aligned}$$

Olursa

$$\begin{tikzcd}
(S',\alpha') \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] \arrow[dr, dashed, "w"] & (M,\beta) \\
(N,\gamma) & (M',\beta') \arrow[l, "v"] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Şimdi w nin bir tek olduğunu gösterelim.

w' ve w aynı özellikte olmak üzere, her $d\in S'$ için

$$\begin{aligned}uw&=u'\\ uw'&=u'\\ w(d)&=\big(u'(d),v'(d)\big)=w'(d)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla w bir tektir. Buradan

$$\begin{tikzcd}
(S',\alpha') \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "u'"] \arrow[ddr, bend right, "v'"'] & & \\
& (S,\alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & (M,\beta) \arrow[d, "f"] \\
& (N,\gamma) \arrow[r, "g"'] & (M',\beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı geçerlidir. O halde (S,α), (f,g) nin geri çekmesidir.

3.4 İleri İtmeler

Teorem 3.4.1 ***LXMod/L*** kategorisi ileri itmelere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f\colon(M,\beta)\to(U,\alpha)$ ve $g\colon(M,\beta)\to(V,\eta)$ iki morfizm olmak üzere her $u\in U, v\in V, m\in M$ için $((\alpha(u))^v,(\eta(v))^u)$ ve $(g(m),-f(m))$ tarafından üretilen ideal W olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\varphi\colon \frac{V\rtimes U}{W} &\to L\\ (v,u)+W &\mapsto \varphi\big((v,u)+W\big)=\alpha(u)+\eta(v)\end{aligned}$$

homomorfizmi ile birlikte $(\frac{V\rtimes U}{W},\varphi)$ bir çaprazlanmış L-modüldür. Ayrıca

$$h_1\colon V\to\frac{V\rtimes U}{W} \qquad h_2\colon U\to\frac{V\rtimes U}{W}$$

$$v \mapsto (v,0)+W \qquad\qquad u \mapsto (0,u)+W$$

homomorfizmleri olsun. Her $m \in M$ için

$$\big(g(m),-f(m)\big) = -\big(0,f(m)\big) + (g(m),0) \in W$$

olur ve $h_2 f = h_1 g$ olup

$$\begin{tikzcd}
(M,\beta) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (U,\alpha) \arrow[d, "h_2"] \\
(V,\eta) \arrow[r, "h_1"'] & (\frac{V\rtimes U}{W},\varphi)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Ek olarak $w_1\colon U \to S, w_2\colon V \to S$ morfizmleri olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, "w_2"] & \\
\frac{V\rtimes U}{W} \arrow[r, dashed, "w"'] & S \\
U \arrow[u, "h_2"] \arrow[ur, "w_1"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde

$$w\colon \frac{V \rtimes U}{W} \to L$$
$$(v,u)+W \mapsto w\big((v,u)+W\big) = w_1(u) + w_2(v)$$

homomorfizmi tanımlanabilir. Şimdi w nin biricik olduğunu gösterelim.

w' ve w aynı özellikte olmak üzere,

$$w'\colon \frac{V \rtimes U}{W} \to L$$
$$(v,u)+W \mapsto l$$

olup w' çaprazlanmış modül morfizmi

$$w'h_2 = w_1$$

ve

$$w'h_1 = w_2$$

olduğundan

$$w = w'$$

olur. Dolayısıyla w biriciktir.

O halde,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[d, "h_2"] \arrow[ddr, "w_1"] & \\
V \arrow[r, "h_1"'] \arrow[drr, "w_2"'] & \frac{V\rtimes U}{W} \arrow[dr, dashed, "w"] & \\
& & S
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup $(\frac{V\rtimes U}{W}, w)$, (f,g) nin ileri itmesidir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada Lie çaprazlanmış modüllerin bazı kategoriksel özellikleri ele alındı. Önce Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili temel kavramlara ve özelliklere yer verildi. Sonra Lie çaprazlanmış modüllerin bir alt kategorisinde eşitleyici, sonlu çarpım, limit, geri çekme, ileri itme gibi bazı kategoriksel özellikler incelendi.

Teşekkür

Bu makale Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri öğrencisi Pınar Küçüker'in yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

5. Kaynaklar

Akça, İ. and Arvasi, Z., 2002. Simplicial and Crossed Lie Algebras,Homology.*Homotopy and Applications*, **4**(1), 43-5.

Arvasi, Z. and Ege Arslan, U., 2003. Annihilators Multipliers and Crossed Modules. *Applied Categorical Structures*, **11**, 487-506.

Arvasi, Z. and Porter, T., 1996. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebras*, **181**, 426-448.

Aytekin, A., 2019. Categorical structures of Lie-Rinehart crossed module. *Turkish Journal of Mathematics*, **43**, 511-522.

Aytekin, A., 2021. (Co)Limits of Hom-Lie Crossed Module.*Turkish Journal of Mathematics*, **45**(5), 2140-2153.

Aytekin Arıcı, G. and Şahan, T., 2022. Coverings and liftings of generalized crossed modules. *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, **17**(1), 117-139.

Casas, J. M., 1990. Invariantes de módulos cruzados en Álgebras de Lie. Ph.D.Thesis, Unıversity of Santiago, 173.

Casas, J. M. and Ladra, M., 1998. The Actor of a CrossedModule in Lie Algebras. *Communications in Algebra*, **26**(7), 2065-2089.

Casas, J. M. and Ladra, M., 2000. Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras. *Georgian Mathematical Journal*, **7**(3), 461-474.

Demirci, M., 2011. Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, 79.

Ege, U., 1998. Çaprazlanmış Modüller. Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, 61.

Eilenberg, S. and MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, **58**, 231-294.

Ellis, G. J., 1993. Homotopical Aspects of Lie Algebras. *Journal of Australian Mathematical Society. (Series A)*, **54**, 393-419.

Herrlich, H. and Strecker, G. E., 1973. Category Theory. Allyn and Bacon Inc., Boston,100-140.

Ilgaz Çağlayan, E., 2022. Class preserving actor and commutativity degree of isoclinic Lie crossed modules. *New Trends in Mathematical Science*, **10**(3), 54-62.

Ilgaz Çağlayan, E., 2022. n-exterior isoclinic Lie crossed modules. *New Trends in Mathematical Science*, **10**(3), 44-53.

Ilgaz Çağlayan, E., 2022. n-Isoclinic Lie Crossed Modules. *Filomat*, **36**(14), 4935-4946.

Kassel, C. and Loday, J. L., 1982. Extensions Centrales d'algébres de Lie. *Annales de l'institut Fourier. Grenable*, **32**(4), 119-142.

Killing, W., 1880. Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **89**, 265-287.

Killing, W.,1885. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. BG Teubner, Dresden.

Lie, S., 1871. On a class of geometric transformations. PhD thesis, University of Oslo, 163.

MacLane, S., 1971. Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag New York Inc., New York.

Odabaş, A., Uslu, E. Ö. and Ilgaz Çağlayan, E., 2016. Isoclinism of crossed modules. *Journal of Symbolic Computation*, **74**, 408-424.

Porter, T., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. *Journal of Algebra*, **99**, 458-465.

Şahan, T., 2018. Derived Crossed Modules. *Korean Journal of Mathematics*, **26**(3), 439-458.

Temel, S., Şahan, T. and Mucuk, O., 2020. Crossed modules double group-groupoids and crossed squares. *Filomat*, **34**(6), 1755-1769.

Weyl, H., 1931. The theory of groups and quantum mechanics. Methuen & co. ltd., London.

Whitehead, J. H. C., 1949. Combinatorial Homotopy. *Bulletin of American Mathematical Society*, **55**, 453-496.