Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 13(4), 2958-2972, 2023
Journal of the Institute of Science and Technology, 13(4), 2958-2972, 2023
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618
Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.1303212**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Geliş tarihi / *Received*: 26.05.2023 **Kabul tarihi / *Accepted*: 08.09.2023**

Atıf İçin: Şahan, T. ve Kendir, E. (2023). Çaprazlanmış Cat^1-Modüller. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(4), 2958-2972.

To Cite: Şahan, T. & Kendir, E. (2023). Crossed Cat^1-Modules. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 13(4), 2958-2972.

Çaprazlanmış Cat^1-Modüller

Tunçar ŞAHAN[1*], Emre KENDİR[2]

Öne Çıkanlar:
- Yeni cebirsel model
- Homotopi 3-tipler
- Denklik

Anahtar Kelimeler:
- Çaprazlanmış modül
- cat^1-grup
- çaprazlanmış kare
- cat^2-grup

ÖZET:

Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin homotopi 2-tipten bağlantılı uzayların bir cebirsel modeli olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Ayrıca cat^1-gruplar ve grupların kategorisindeki iç kategoriler, diğer bir ifadeyle 2-gruplar veya grup-grupoidler, kategoriksel olarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllere denktirler. Bu çalışmada, homotopi 3-tipten bağlantılı uzayların yeni bir cebirsel modeli olarak cat^1-grupların kategorisindeki çaprazlanmış modül, yani çaprazlanmış cat^1-modül, cebirsel yapısı karakterize edilip bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategoriksel olarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelere ve böylece cat^2-gruplara denk oldukları gösterilmiştir.

Crossed Cat^1-Modules

Highlights:
- New algebraic model
- Homotopy 3-types
- Equivalence

Keywords:
- Crossed module
- cat^1-group
- crossed square
- cat^2-group

ABSTRACT:

It is well known that crossed modules over groups are an algebraic model of homotopy 2-type connected spaces. Moreover, cat^1-groups and internal categories in the category of groups, i.e. 2-groups or group-groupoids, are categorically equivalent to crossed modules over groups. In this study, as a new algebraic model of homotopy 3-type connected spaces, the algebraic structure of the crossed module on the category of cat^1-groups, i.e. the crossed cat^1-module, is characterized and some of its properties are studied. It is also shown that crossed cat^1-modules are categorically equivalent to crossed squares over groups and hence to cat^2-groups.

[1] Tunçar ŞAHAN (**Orcid ID:** 0000-0002-6552-4695), Aksaray Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Aksaray, Türkiye
[2] Emre KENDİR (**Orcid ID:** 0000-0002-7790-8688), Aksaray Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Aksaray, Türkiye

***Sorumlu Yazar/*Corresponding Author*:** Tunçar ŞAHAN, e-mail: tuncarsahan@aksaray.edu.tr

Bu çalışma Emre KENDİR'ın Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.
Makale 31 Ağustos-3 Eylül 2021 tarihlerinde İstanbul'da düzenlenen "33. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda" sözlü olarak sunulmuştur.

GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller ilk kez 1946 yılında İngiliz matematikçi John Henry Constantine Whitehead tarafından tanıtıldı ve Whitehead bu yapıları homotopi teorisi ve cebirsel topoloji üzerine yaptığı çalışmalarında kullandı (Whitehead, 1946). Whitehead çaprazlanmış modül kavramını, bir uzayın temel grubunu incelemek için bir araç olarak tanıttı ve bir uzayın birinci homotopi grubunun, uzayla ilişkili belirli bir çaprazlanmış modülün otomorfizm grubu olarak elde edilebileceğini gösterdi (Whitehead, 1948, 1949). Çaprazlanmış modül kavramı diğer matematikçiler tarafından daha da geliştirildi ve kavram, cebirsel topoloji, homotopi teorisi ve kategori teorisi dahil olmak üzere matematiğin çeşitli alanlarında uygulandı (Brown ve Spencer, 1976; Brown ve Higgins, 1978; Brown, 1984; Loday, 1982; Brown ve Loday, 1987a; Porter, 1987). Çaprazlanmış modüller ayrıca uzayların homotopi gruplarını, liflerin (fibrations) homotopi teorisini ve grupların gruplar tarafından genişlemelerinin sınıflandırılmasını incelemek için kullanıldı (Brown, 1987). Ayrıca yüksek boyutlu cebir çalışmalarında ve topolojik kuantum alan teorilerinin geliştirilmesinde kullanılmıştır (Ellis, 1988; Yetter 1992, 1993). Çaprazlanmış modüller fizikte, özellikle ayar (gauge) teorilerinin incelenmesinde de kullanılmıştır (Dijkgraaf ve Witten, 1990). Genel olarak, çaprazlanmış modül kavramının farklı cebirsel yapılar arasındaki ilişkileri anlamak için yararlı bir araç olduğu kanıtlanmış ve modern matematikte aktif bir araştırma alanı olmaya devam etmektedir (Higgins, 1956; Orzech 1792a, 1972b; Akız ve ark., 2020).

Çaprazlanmış modüller, cebirsel yapıları grup seviyesinin ötesinde genelleştirmeyi amaçlayan daha büyük bir yüksek boyutlu cebir teorisinin parçasıdır. Yüksek boyutlu cebirin temel fikri, yalnızca öğeleri ve işlemleri değil, aynı zamanda bu öğeler arasındaki yüksek boyutlu ilişkileri de içeren cebirsel yapıları incelemektir. Yüksek boyutlu cebirin kalbinde, kategori kavramını genelleştiren matematiksel bir yapı olan n −kategori kavramı vardır. 0 −kategori sadece bir kümedir, 1 −kategori bir kategoridir, 2 −kategori morfizmler arasındaki ilişkileri içeren ekstra yapıya sahip bir kategoridir. Yüksek boyutlu cebirin temel kavrayışlarından biri, geleneksel olarak kümeler ve fonksiyonlar açısından tanımlanan birçok cebirsel yapının doğal olarak n −kategorileri olarak yeniden yorumlanabilmesidir. Örneğin, bir grup tek bir nesneye sahip bir 1 −kategori olarak düşünülebilir, burada morfizmler grup elemanlarıdır ve kompozisyon işlemi grup işlemi ile verilir. Benzer şekilde, bir topolojik uzay, nesneleri noktalar olan ve morfizmleri noktalar arasındaki eğriler olan bir 1 −kategori olarak düşünülebilir.

Brown ve Spencer (1976) grupoidlerin, yani her morfizmin bir izomorfizm olduğu kategorilerin, kategorisinde grup objeleri karakterize edip bu tip bir yapıyı grup-grupoid olarak adlandırmışlardır. Ayrıca grup-grupoidlerin kategorisi ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin doğal olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Bu denklik sayesinde çaprazlanmış modüller için tanımlanmış birçok kavram grup-grupoidlerin kategorisinde yorumlanmıştır (Brown ve Mucuk, 1994; Mucuk ve ark., 2014; Mucuk ve Şahan, 2019, Şahan, 2019). Brown ve Spencer (1976) tarafından verilen denklik, çok işlemli gruplar olarak adlandırılan, çok daha genel cebirsel kategoriler için Porter (1987) tarafından elde edilmiştir. Bu denklik sonucunda benzer yorumlama çalışmaları çok işlemli gruplar için de verilmiştir (Akız ve ark., 2013; Mucuk ve Şahan, 2014; Akız ve ark., 2020; Şahan ve Mucuk, 2020).

Çaprazlanmış kompleksler teorisi, çoklu grup etkimeleri ve daha yüksek boyutlu ilişkiler içeren daha yüksek boyutlu cebirsel yapıları incelemek için bir çerçeve sağlar. Çaprazlanmış kompleksler, çaprazlanmış modüllerin doğal bir genellemesidir ve karmaşık bir şekilde etkileşime giren bir grup kulesi ve grup etkimeleri olarak tanımlanır (Norrie, 1987, 1990; Brown ve Higgins, 1991; Mutlu ve Porter, 2000). Çaprazlanmış modüller ayrıca cebirde normal altgrupların, modüllerin ve merkezsel genişlemelerin bir genellemesidir. Ayrıca son zamanlarda çaprazlanmış modül kavramı diferensiyel geometri ve Galois teoride kullanılmaya başlamıştır (Jurčo, 2011; Martins ve Picken, 2011; Mackenzie, 1987).

1982 yılında Loday (1982) tarafından cat^1-grup (1-cat-grup) olarak adlandırdığı yeni bir cebirsel yapı tanımlanmıştır. Bir cat^1-grup; bir G grubu ve Tanım 11'de hatırlatılan iki özel şartı sağlayan bu grubun $s,t\colon G \to G$ şeklinde iki endomorfizminden oluşur. Cat^1-gruplar, çaprazlanmış modüllere göre daha basit bir cebirsel yapı olarak düşünülebilir. Loday (1982) aynı çaprazlanmış modüller gibi cat^1-grupların da $2-$tipler için bir cebirsel model olduğunu gösterip, cat^1-grupların kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğunu göstermiştir.

Porter (1987) çok işlemli gruplar kategorisi olarak adlandırılan bazı cebirsel kategorilerde bir çaprazlanmış modülün nasıl elde edileceğini açık olarak tarif etmiştir. Porter'ın yöntemi kullanılarak birçok cebirsel yapı için çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Örneğin, çaprazlanmış modüller kategorisi de çok işlemli gruplar kategorisi olduğundan çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki çaprazlanmış modüller Conduché (1984) tarafından karakterize edilip bu yapılar çaprazlanmış kare olarak adlandırılmıştır (Arvasi, 1997).

Bu çalışmada, materyal ve yöntem bölümünde Porter (1987) tarafından verilen çok işlemli gruplar kategorisinde çaprazlanmış modüllerin elde edilmesi yöntem grupların kategorisi özelinde hatırlatılmış ve gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi elde edilmiştir. Ayrıca çaprazlanmış modüllerin; alt objeleri, normal alt objeleri (idealleri), morfizmleri ve morfizmlerinin çekirdeği ile görüntüsü hatırlatılmıştır. Yine bu bölümde, ayrıntılı olarak cat^1-grup tanımı Loday (1982) tarafından tanımlandığı haliyle verilmiş, cat^1-grupların kategorisi tarif edilmiş ve cat^1-grupların kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denkliği detaylı olarak verilmiştir. Bulgular bölümünde ise Porter (1987) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak, cat^1-grupların kategorisi de çok işlemli gruplar kategorisi olduğundan, cat^1-grupların kategorisinde çaprazlanmış modüller elde edilmiş ve bu cebirsel yapılar çaprazlanmış cat^1-modül olarak adlandırılmıştır. Daha sonra çaprazlanmış cat^1-modüllerin bazı özellikleri incelenip çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategorisi elde edilmiştir. Bunula birlikte, çalışmanın en önemli sonuçlarından biri olan, çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategorisinin çaprazlanmış karelerin kategorisine doğal olarak denk olduğu gösterilmiştir. Böylece, çaprazlanmış kareler 3-tipler için bir cebirsel model olduğundan çaprazlanmış cat^1-modüller de yine 3-tipler için bir başka cebirsel model olarak gösterilmiştir. Ayrıca, iyi bilinen bir sonuç olarak, çaprazlanmış kareler ile cat^2-gruplar kategorik olarak denk olduğundan çaprazlanmış cat^1-modüllerin de cat^2-gruplara kategorik olarak denk olduğu gösterilmiştir Son olarak, sonuç bölümünde, bu çalışmanın devamı olarak yapılabilecek çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

MATERYAL VE METOT

Porter (1987) çok işlemli gruplar kategorisi olarak adlandırılan bazı cebirsel kategorilerde bir çaprazlanmış modülün nasıl elde edileceğini ayrıntılı bir biçimde tarif etmiştir. Bu bölümde öncelikle Porter'ın yöntemi gruplar kategorisinde detaylı olarak gösterilmiş ve bu yapıların cat^1-gruplar ile olan ilişkisinden bahsedilmiştir.

Tanım 1. A ve B birer grup olmak üzere $B \times A \to A,\ (b,a) \mapsto b \cdot a$ şeklinde gösterilen fonksiyon her $b, b_1 \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için aşağıdaki Eşitlik (1)-(3) 'te verilen şartları sağlıyorsa B grubu A grubu üzerine etkir denir:

$$(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a) \tag{1}$$

$$b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1 \tag{2}$$

$$0_B \cdot a = a \tag{3}$$

Tanım 2. G ve H iki grup olsun. Şekil 1'de verilen grup homormorfizmleri dizisinde her bir homomorfizmin görüntüsü bir sonrakinin çekirdeğine eşit ise bu dizi, grupların bir kısa tam dizisi olarak adlandırılır.

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{0\}$$

Şekil 1. Grup homomorfizmlerinin bir dizisi

Şekil 1'de verilen grup homomorfizmleri dizisinde $\{0\} \to G$ ve $H \to \{0\}$ sıfır homomorfizmler, $i: G \to E$ bir monomorfizm, $p: E \to H$ bir epimorfizm ve $i(G) = \ker p$ ise, yani bu dizi bir kısa tam dizi ise E ye H grubunun G grubu ile bir genişlemesi denir.

Tanım 3. E grubu, H grubunun bir G grubu ile bir genişlemesi olsun. Eğer $ps = 1_H$ olacak şekilde bir $s: H \to E$ grup homomorfizmi varsa E ye H nin G ile bir ayrık (split) genişlemesi denir.

Burada $i: G \to E$ bir monomorfizm olduğundan G grubunu E grubunun bir alt grubu, hatta $i(G) = \ker p$ olduğundan bir normal alt grubu olarak düşünebilir ve böylece her $g \in G$ için $i(g) = g$ olarak alınabilir.

E grubu, H grubunun bir G grubu ile bir ayrık genişlemesi olmak üzere $H \times G \to G$, $(h, g) \mapsto h \cdot g = s(h) + g - s(h)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir grup etkimesi belirtir. Ayrıca $G \times H$ kümesi ile E kümesinin elemanları arasında birebir bir eşleme vardır. Bu eşlemeler ise Eşitlik (4) ve Eşitlik (5)'te verilen fonksiyonlarla tanımlanır.

$$\theta: G \times H \to E, (g, h) \mapsto \theta(g, h) = g + s(h) \quad (4)$$

$$\theta^{-1}: E \to G \times H, e \mapsto \theta^{-1}(e) = \big(e - sp(e), p(e)\big) \quad (5)$$

Bu birebir eşleşmeler yardımıyla, bu eşleşmeler birer grup homomorfizmi (izomorfizmi) olacak şekilde, $G \times H$ üzerinde bir grup yapısı oluşturulabilir. Bu grubun işlemi ise Eşitlik (6)'daki gibi bulunur.

$$(g, h) + (g_1, h_1) = (g + h \cdot g_1, h + h_1) \quad (6)$$

Böylece Eşitlik (6)'da verilen ikili işlemle $G \times H$ üzerinde, E grubuna izomorf olan, bir grup yapısı oluşturulur. Bu $G \times H$ grubuna G ile H gruplarının yarı-direkt çarpımı denir ve bu grup genelde $G \rtimes H$ ile gösterilir. Bu grupta birim eleman $(0_G, 0_H)$ elemanı ve bir (g, h) elemanının tersi ise $\big((-h) \cdot (-g), -h\big)$ dır.

E grubu, B grubunun bir A grubu ile bir ayrık genişlemesi ve E_1 grubu, B_1 grubunun bir A_1 grubu ile bir ayrık genişlemesi olsun. Bu durumda $f_A: A \to A_1$, $f_E: E \to E_1$ ve $f_B: B \to B_1$ birer grup homomorfizmi olmak üzere

(i) $f_E i = i_1 f_A$,
(ii) $f_B p = p_1 f_E$ ve
(iii) $f_E s = s_1 f_B$

ise (f_A, f_E, f_B) üçlüsüne grupların kategorisinde bir ayrık genişleme dönüşümü denir.

Bir B grubunun bir A grubu üzerine bir grup etkimesi verilmişse bu etkimeden elde edilen yarı-direkt çarpım grubunun B nin A ile bir ayrık genişlemesi olduğunu görmüştük. Ayrıca her A grubunun kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile de bir ayrık genişlemesi elde edilebilir.

Tanım 4. $B \times A \to A$, $(b, a) \mapsto b \cdot a$ fonksiyonu bir grup etkimesi ve $\alpha: A \to B$ bir grup homomorfizmi olsun. Bu durumda eğer $(1_A, 1_A \times \alpha, \alpha)$ ve $(\alpha, \alpha \times 1_B, 1_B)$ üçlüleri sırasıyla A grubunun konjügasyon etkimesi tarafından üretilen ayrık genişlemesinden B nin A üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesine ve B nin A üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesinden B grubunun konjügasyon etkimesi tarafından üretilen ayrık genişlemesine birer ayrık genişleme dönüşümü ise (A, B, α) üçlüsüne bir çaprazlanmış modül denir (Porter, 1987).

Yukarıdaki tanımda verilen $(1_A, 1_A \times \alpha, \alpha)$ ve $(\alpha, \alpha \times 1_B, 1_B)$ dönüşümlerinin birer ayrık genişleme dönüşümü olması için $1_A \times \alpha$ ve $\alpha \times 1_B$ dönüşümlerinin birer grup homomorfizmi olması yeterlidir. Yani; her $a_1, a_2 \in A$ ve her $b \in B$ için $\alpha(a_1) \cdot a_2 = a_1 + a_2 - a_1$ ve $\alpha(b \cdot a_1) = b +$

$\alpha(a_1) - b$ olmalıdır. Böylece çaprazlanmış modül tanımını Porter (1987) aşağıdaki şekilde karakterize etmiştir.

Önerme 5. $\alpha\colon A \to B$ dönüşümü A ve B grupları arasında bir grup homomorfizmi olsun ve B grubunun A grubu üzerine etkimesi $b \cdot a$ ile gösterilsin. Eğer her $a, a_1 \in A$ ve $b \in B$ için;

(i) $\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b$,

(ii) $\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a$

şartları sağlanıyorsa (A, B, α) üçlüsü grupların kategorisinde bir çaprazlanmış modül olur.

Örnek 6. Her G grubu iki farklı biçimde bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir.

(i) G nin herhangi bir N normal alt grubu için G nin N üzerine konjügasyon etkimesi ile birlikte $\mathrm{inc}\colon N \to G$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) G nin tüm otomorfizmlerinin grubu $\mathrm{Aut}(G)$ nin G üzerine $f \cdot x = f(x)$ şeklinde tanımlı etkimesiyle birlikte $\Phi\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ iç otomorfizm dönüşümü bir çaprazlanmış modül belirtir.

(A, B, α) ve (A', B', α') birer çaprazlanmış modül, $f_A\colon A \to A'$ ve $f_B\colon B \to B'$ birer grup homomorfizmi olsun. Eğer

(i) $f_B\alpha = \alpha' f_A$ ve

(ii) her $a \in A$ ve $b \in B$ için $f_A(b \cdot a) = f_B(b) \cdot f_A(a)$

şartları sağlanırsa $\langle f_A, f_B\rangle\colon (A, B, \alpha) \to (A', B', \alpha')$ ikilisine (A, B, α) dan (A', B', α') ya bir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Gruplar üzerinde tanımlanmış çaprazlanmış modüller ve aralarındaki çaprazlanmış modül morfizmleri $\mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})$ ile gösterilen bir kategori yapısına sahiptir.

Tanım 7. Herhangi iki (A, B, α) ve (C, D, γ) çaprazlanmış modülü için eğer;

(i) C ve D sırasıyla A ve B nin birer altgrubudur,

(ii) γ dönüşümü α dönüşümünün C üzerine kısıtlamasıdır ve

(iii) D grubunu C grubu üzerine etkimesi, B grubunun A grubu üzerine etkimesinin kısıtlamasıdır;

şartları sağlanıyorsa (C, D, γ) çaprazlanmış modülü (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir alt objesi ya da alt çaprazlanmış modülü olarak adlandırılır (Norrie, 1987).

Önerme 8. Herhangi bir $\langle f_A, f_B\rangle\colon (A, B, \alpha) \to (A', B', \alpha')$ çaprazlanmış modül morfizmi için bu çaprazlanmış modül morfizminin görüntüsü olan $\mathrm{Im}\langle f_A, f_B\rangle = \left(\mathrm{Im}\, f_A, \mathrm{Im}\, f_B, \alpha'|_{\mathrm{Im}\, f_A}\right)$ bir çaprazlanmış modüldür. Bunula birlikte $\left(\mathrm{Im}\, f_A, \mathrm{Im}\, f_B, \alpha'|_{\mathrm{Im}\, f_A}\right)$ çaprazlanmış modülü (A', B', α') çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür (Norrie, 1987, 1990).

Tanım 9. Herhangi bir (A, B, α) çaprazlanmış modülü verilsin ve (S, T, σ) bu çaprazlanmış modülün bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer

(i) $T \trianglelefteq B$,

(ii) her $s \in S$ ve $b \in B$ için $b \cdot s \in S$,

(iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için $t \cdot a - a \in S$

şartları sağlanıyorsa (S, T, σ) çaprazlanmış modülüne (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir normal alt objesi ya da normal alt çaprazlanmış modülü ya da kısaca bir ideali denir (Norrie, 1987).

Önerme 10. Herhangi bir $\langle f_A, f_B\rangle\colon (A, B, \alpha) \to (A', B', \alpha')$ çaprazlanmış modül morfizmi için bu çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği olan $\ker\langle f_A, f_B\rangle = \left(\ker f_A, \ker f_B, \alpha|_{\ker f_A}\right)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca $\left(\ker f_A, \ker f_B, \alpha|_{\ker f_A}\right)$ çaprazlanmış modülü (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

Tanım 11. G bir grup ve $s, t \in \mathrm{End}(G)$ dönüşümleri G grubunun birer endomorfizm olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G, s, t) üçlüsüne bir cat^1-grup denir (Loday, 1982).

(i) $st = t$, $ts = s$ ve
(ii) $[\ker s, \ker t] = \{0\}$.

Burada (ii) şartı şu anlama gelmektedir: G nin $\ker s$ ve $\ker t$ notmal altgruplarının elemanları değişmelidir.

Önerme 12. (G, s, t) bir cat^1-grup olmak üzere
(i) $ss = s$,
(ii) $tt = t$ ve
(iii) $\operatorname{Im} s = \operatorname{Im} t$ dir.

Her tek elemanlı $\{0\}$ grubu $s = 1_{\{0\}}$ ve $t = 1_{\{0\}}$ endomorfizmleri ile beraber bir cat^1-grup olur. Bu cat^1-gruba sıfır cat^1-grup denir. Ayrıca, daha genel olarak, her G grubu için $(G, 1_G, 1_G)$ üçlüsü de bir cat^1-gruptur.

Tanım 13. (G, s, t) ve (G', s', t') birer cat^1-grup olsun. Bir $f: G \to G'$ grup homomorfizmi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa bu f dönüşümüne bir cat^1-grup morfizmi denir (Loday, 1982).
(i) $fs = s'f$ ve
(ii) $ft = t'f$.

$f: (G, s, t) \to (G', s', t')$ bir cat^1-grup morfizmi olmak üzere eğer $f: G \to G'$ grup homomorfizmi bir monomorfizm (epimorfizm, izomorfizm) ise bu $f: (G, s, t) \to (G', s', t')$ cat^1-grup morfizmi monomorfizm (epimorfizm, izomorfizm) olarak adlandırılır.

Tüm cat^1-gruplar ve yukarıda tanımlandığı şekilde cat^1-gruplar arasındaki döüşümler ile birlikte $\mathbf{Cat^1} - (\mathbf{Gp})$ ile gösterilen olan bir kategori yapısına sahiptir.

Loday (1982) gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller ile cat^1-grup yapılarının kategorik anlamda doğal olarak denk olduğunu göstermiştir. Şimdi bazı detaylara ihtiyacımız olduğundan bu denkliği ispatının taslağını da vererek hatırlatalım.

Teorem 14. Grupların üzerinde tanımlanmış çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})$ ile cat^1-grupların kategorisi $\mathbf{Cat^1} - (\mathbf{Gp})$ doğal olarak denktir (Loday, 1982).

İspat: Öncelikle bir $F: \mathbf{XMod}(\mathbf{Gp}) \to \mathbf{Cat^1} - (\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım: (A, B, α) herhangi bir çaprazlanmış modül olmak üzere $G = A \rtimes B$, $s(a, b) = (0, b)$ ve $t(a, b) = (0, \alpha(a) + b)$ olmak üzere $F_0\big((A, B, \alpha)\big) = (G, s, t)$ dir. Ayrıca bir çaprazlanmış modül morfizmi $\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \to (A', B', \alpha')$ için $F_1(\langle f_A, f_B \rangle) = f_A \times f_B$ dir.

Şimdi, tersine olarak, bir $H: \mathbf{Cat^1} - (\mathbf{Gp}) \to \mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım: Bir (G, s, t) cat^1-grubu için $\operatorname{Im} s \times \ker s \to \ker s$, $(x, g) \mapsto x \cdot g = x + g - x$ şeklinde tanımlı fonksiyon bir grup etkimesidir ve bu etkime ile birlikte $t|_{\ker s}: \ker s \to \operatorname{Im} s$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül yapısına sahiptir. Yani; $H_0\big((G, s, t)\big) = (\ker s, \operatorname{Im} s, t|_{\ker s})$ olarak tanımlanır. Ayrıca bir $f: (G, s, t) \to (G', s', t')$ cat^1-grup morfizmi için $\langle f|_{\ker s}, f|_{\operatorname{Im} s} \rangle: (\ker s, \operatorname{Im} s, t|_{\ker s}) \to (\ker s', \operatorname{Im} s', t'|_{\ker s'})$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Yani; $H_1(f) = \langle f|_{\ker s}, f|_{\operatorname{Im} s} \rangle$ dir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Cat^1-Grupların Kategorisinde Genişlemeler ve Yarı-Direkt Çarpım

Bu kısımda Porter (1987) tarafından verilen tekniğe göre öncelikle Cat^1-grupların kategorisinde genişlemeler ve yarı-direkt çarpım kavramları verilmiştir. Yazım kolaylığı açısından makalenin devamında cat^1-gruplar $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$, $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$, … şeklinde gösterilmiştir.

$\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$, $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ ve $\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ birer cat^1-grup olmak üzere sıfır cat^1-grup $\mathcal{O} = \big(\{0\}, 1_{\{0\}}, 1_{\{0\}}\big)$ ile gösterilsin. $i: \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ bir cat^1-grup monomorfizmi, $p: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ bir cat^1-grup epimorfizmi ve $k: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ ise $pk = 1_{\mathcal{B}}$ olacak şekilde bir cat^1-grup monomorfizmi olsun. Bu durumda

$\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ cat¹-grubuna $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ nin $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ tarafından bir ayrık cat¹-grup genişlemesi denir.

Bu şekilde bir ayrık genişlemeden $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ nin $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ üzerine Eşitlik (7)'deki şekilde tanımlanan bir türetilmiş etkimesi elde edilir.

$$\mathcal{B} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ (b, a) \mapsto b \cdot a = k(b) + a - k(b) \tag{7}$$

Bu etkime aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için $(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a)$,
(ii) her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için $b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1$,
(iii) her $a \in A$ için $0_B \cdot a = a$,
(iv) her $b \in B$ için $b \cdot 0_A = 0_A$,
(v) her $b \in \ker s_B$ ve $a_1 \in \ker t_A$ için $b \cdot a_1 = a_1$,
(vi) her $b_1 \in \ker t_B$ ve $a \in \ker s_A$ için $b_1 \cdot a = a$.

Burada dikkat edelim ki (iv) şartı (ii) şartından elde edilebilmektedir. Böylece cat¹-grupların kategorisinde etkime tanımı verebiliriz.

Tanım 15. $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat¹-grup olmak üzere Eşitlik (8)'deki şekilde gösterilen bir

$$B \times A \to A,\ (b, a) \mapsto b \cdot a \tag{8}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için $(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a)$,
(ii) her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için $b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1$,
(iii) her $a \in A$ için $0_B \cdot a = a$,
(iv) her $b \in \ker s_B$ ve $a_1 \in \ker t_A$ için $b \cdot a_1 = a_1$,
(v) her $b_1 \in \ker t_B$ ve $a \in \ker s_A$ için $b_1 \cdot a = a$,

şartları sağlanıyorsa bu fonksiyona $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine bir cat¹-grup etkimesi denir.

Bir $\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ cat¹-grubu bir $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ cat¹-grubunun bir $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ cat¹-grubu tarafından bir ayrık cat¹-grup genişlemesi ve bir $\mathcal{E}' = (E', s_{E'}, t_{E'})$ cat¹-grubu bir $\mathcal{B}' = (B', s_{B'}, t_{B'})$ cat¹-grubunun bir $\mathcal{A}' = (A', s_{A'}, t_{A'})$ cat¹-grubu tarafından bir ayrık cat¹-grup genişlemesi olsun. Eğer $f_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $f_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ ve $f_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ ayrık cat¹-grup genişlemesi yapısını oluşturan dönüşümlerle uyumlu birer cat¹-grup morfizmi iseler bu durumda $(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{E}}, f_{\mathcal{B}})$ üçlüsüne bir ayrık cat¹-grup genişlemesi morfizmi denir.

Tüm ayrık cat¹-grup genişlemeleri ve bunlar arasındaki ayrık cat¹-grup genişlemesi morfizmlerinin kategori yapısına sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrık cat¹-grup genişlemelerinin kategorisi $\mathbf{SpExt}(\mathbf{Cat^1 - Gp})$ ile gösterilir.

Tanım 16. $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat¹-grup olmak üzere $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine Eşitlik (9)'deki şekilde gösterilen bir

$$\mathcal{B} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ (b, a) \mapsto b \cdot a \tag{9}$$

cat¹-grup etkimesi verilsin. Bu durumda $A \rtimes B$ grubu $s_{A \rtimes B}(a, b) \coloneqq s_A \times s_B(a, b) = \big(s_A(a), s_B(b)\big)$ ve $t_{A \rtimes B}(a, b) \coloneqq t_A \times t_B(a, b) = \big(t_A(a), t_B(b)\big)$ dönüşümleri ile birlikte bir cat¹-grup yapısına sahiptir. Gerçekten $s_{A \rtimes B} t_{A \rtimes B} = t_{A \rtimes B}$ ve $t_{A \rtimes B} s_{A \rtimes B} = s_{A \rtimes B}$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $[\ker s_{A \rtimes B}, \ker t_{A \rtimes B}] = \{(0,0)\}$ olduğunu da görelim. $(a, b) \in \ker s_{A \rtimes B}$, yani $a \in \ker s_A$, $b \in \ker s_B$ ve $(a_1, b_1) \in \ker t_{A \rtimes B}$, yani $a_1 \in \ker t_A$, $b_1 \in \ker t_B$, olsun. Bu durumda etkime tanımının (iv) ve (v) şartlarından $[\ker s_{A \rtimes B}, \ker t_{A \rtimes B}] = \{(0,0)\}$ dir (Eşitlik (10)).

$$\begin{aligned}(a,b)+(a_1,b_1)&=(a+b\cdot a_1,b+b_1)\\&=(a+a_1,b+b_1)\\&=(a_1+a,b_1+b)\\&=(a_1+b_1\cdot a,b_1+b)\\&=(a_1,b_1)+(a,b)\end{aligned} \tag{10}$$

Bu $(A \rtimes B, s_{A\rtimes B}, t_{A\rtimes B})$ cat^1-grubuna $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B}=(B,s_B,t_B)$ cat^1-gruplarının yarı-direkt çarpımı denir ve $\mathcal{A}\rtimes\mathcal{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}\rtimes\mathcal{B}$ yarı-direkt çarpım cat^1-grubu $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ tarafından bir ayrık cat^1-grup genişlemesi olur.

Örnek 17. $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ bir cat^1-grup olsun. A nın konjügasyon etkimesi aslında $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ nın kendi üzerine bir cat^1-grup etkimesidir. Gerçekten $a\in \ker s_A$ ve $a_1\in\ker t_A$ olmak üzere Eşitlik (11)'de görüldüğü gibi $a_1\cdot a=a$ dir.

$$a_1\cdot a=a_1+a-a_1=a+a_1-a_1=a \tag{11}$$

Diğer şartların sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Bu etkime ile birlikte $\mathcal{A}$ nın kendisi ile yarı-direkt çarpımı $\mathcal{A}\rtimes\mathcal{A}$ elde edilir. $\mathcal{A}\rtimes\mathcal{A}$ yarı-direkt çarpım cat^1-grubu $\mathcal{A}$ nın kendisi tarafından bir ayrık cat^1-grup genişlemesi olur.

Çaprazlanmış Cat¹-Modüller

Tanım 18. $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B}=(B,s_B,t_B)$ birer cat^1-grup olmak üzere $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine Eşitlik (12)'deki şekilde gösterilen bir

$$\mathcal{B}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\ (b,a)\mapsto b\cdot a \tag{12}$$

cat^1-grup etkimesi verilsin. Ayrıca bir $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ cat^1-grup morfizmi bulunsun. Eğer $(1_{\mathcal{A}},1_{\mathcal{A}}\times\alpha,\alpha)$ ve $(\alpha,\alpha\times 1_{\mathcal{B}},1_{\mathcal{B}})$ üçlüleri sırasıyla $\mathcal{A}$ nın konjügasyon etkimesi tarafından oluşturulan ayrık cat^1-grup genişlemeden $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesine ve $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesinden $\mathcal{B}$ nin kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile elde edilen ayrık genişlemesine birer ayrık genişleme dönüşümü ise $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ üçlüsüne bir cat^1-grupların kategorisinde bir çaprazlanmış modül ya da kısaca bir çaprazlanmış cat^1-modül denir.

Yukarıdaki tanımda belirtilen şartlar incelendiğinde çaprazlanmış cat^1-modül tanımı elemanlar cinsinden de verilebilir.

Önerme 19. $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B}=(B,s_B,t_B)$ birer cat^1-grup ve $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ bir cat^1-grup morfizmi olmak üzere Eşitlik (13)'deki şekilde gösterilen fonksiyon bir cat^1-grup etkimesi olsun.

$$\mathcal{B}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\ (b,a)\mapsto b\cdot a \tag{13}$$

Eğer her $a,a_1\in A$ ve $b\in B$ için;

(i) $\alpha(b\cdot a)=b+\alpha(a)-b$,

(ii) $\alpha(a)\cdot a_1=a+a_1-a$

şartları sağlanıyorsa $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ üçlüsü bir çaprazlanmış cat^1-modül olur.

Sonuç 20. $\mathcal{A}=(A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B}=(B,s_B,t_B)$ birer cat^1-grup ve $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ bir cat^1-grup morfizmi olmak üzere Eşitlik (14)'deki şekilde gösterilen fonksiyon bir cat^1-grup etkimesi olsun.

$$\mathcal{B}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\ (b,a)\mapsto b\cdot a \tag{14}$$

Eğer bu etkime ile birlikte (A,B,α) gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül yapısına sahip ise $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ üçlüsü bir çaprazlanmış cat^1-modül olur. Diğer bir ifadeyle bir çaprazlanmış cat^1-modül gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinde bir cat^1-obje olarak da düşünülebilir.

Örnek 21. G bir grup ve N de bunun bir normal altgrubu olsun. Bu durumda $(G,1_G,1_G)$ ve $(N,1_N,1_N)$ üçlülerinin birer cat^1-grup olduklarını biliyoruz. Ayrıca G nin N üzerine konjügasyon etkimesi aslında bir cat^1-grup etkimesi olur. Böylelikle $\text{inc}:N\to G$ içine dönüşümü bir cat^1-grup morfizmi olup $\big((N,1_N,1_N),(G,1_G,1_G),\text{inc}\big)$ bir çaprazlanmış cat^1-modüldür.

Tanım 22. $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ ile $(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ üçlüleri birer çaprazlanmış cat^1-modül ve $f\colon A\to A'$ ile $g\colon B\to B'$ birer grup homomorfizmi olsun. Eğer

(i) $fs_A = s_{A'}f,\ ft_A = t_{A'}f,$
(ii) $gs_B = s_{B'}g,\ gt_B = t_{B'}g,$
(iii) $g\alpha = \alpha' f$ ve
(iv) her $a\in A$ ve $b\in B$ için $f(b\cdot a) = g(b)\cdot f(a)$

şartları sağlanıyorsa $\langle f,g\rangle$ ikilisine $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ dan $(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ ne bir çaprazlanmış cat^1-modül morfizmi denir ve bu $\langle f_A,f_B\rangle\colon(A,B,\alpha)\to(A',B',\alpha')$ şeklinde gösterilir.

Dikkat edelim ki burada (i) şartı $f\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ dönüşümünün bir cat^1-grup morfizmi olduğu, (ii) şartı $g\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ dönüşümünün bir cat^1-grup morfizmi olduğu, (iii) ve (iv) şartları ise $\langle f,g\rangle\colon(A,B,\alpha)\to(A',B',\alpha')$ dönüşümünün gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller arasında tanımlı bir morfizmi olduğu anlamına gelmektedir.

Objeleri tüm çaprazlanmış cat^1-modüller, morfizmleri ise tüm çaprazlanmış cat^1-modül morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1-Gp})$ ile gösterilir.

Kategori Denkliği

Çaprazlanmış kareler, cebir, topoloji ve kombinatorik dahil olmak üzere çeşitli alanlarda incelenen cebirsel bir kavramdır. Cebirde, grupların yapısını ve grup genişlemelerini incelemek için çaprazlanmış kareler kullanılmıştır. Ayrıca, çaprazlanmış modüller ve çift grupoidler gibi yeni cebirsel yapılar oluşturmak için de çaprazlanmış modüller kullanılmıştır. Topolojide, homotopi teorisini ve daha yüksek boyutlu cebirleri incelemek ve homotopi 3-tipleri için yeni modeller oluşturmak için çaprazlanmış kareler kullanılmıştır. Genel olarak, çaprazlanmış kareler, çeşitli alanlarda uygulamaları olan çok yönlü matematiksel objelerdir. Çaprazlanmış kareler üzerine daha fazla araştırma, cebir, topoloji ve kombinatorikte yeni anlayışlara ve uygulamalara yol açabilir.

Şimdi öncelikle çaprazlanmış kare tanımını Brown ve Loday (1987b) tarafından verildiği şekilde hatırlayalım.

Tanım 23. L, M, N ve P birer grup, $\lambda\colon L\to M$, $\lambda'\colon L\to N$, $\mu\colon M\to P$ ve $\nu\colon N\to P$ birer grup homomorfizmi ve P grubunun L, M ve N grupları üzerine birer etkimesi bulunsun. Bu etkimeler sayesinde; M nin N ve L üzerine μ tarafından $m\cdot n=\mu(m)\cdot n$ ve $m\cdot l=\mu(m)\cdot l$ şeklinde tanımlı ve N nin M ve L üzerinde ν tarafından $n\cdot m=\nu(n)\cdot m$ ve $n\cdot l=\nu(n)\cdot l$ şeklinde tanımlı etkimeleri elde edilir. Ayrıca P grubu kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile ele alınsın.

$$h\colon M\times N\to L,\ (m,n)\mapsto h(m,n) \tag{15}$$

Eğer Eşitlik (15)'te verilen h fonksiyonu ile beraber $\mathcal{X}=(L,M,N,P)$ dörtlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu $\mathcal{X}=(L,M,N,P)$ dörtlüsüne grupların kategorisinde bir çaprazlanmış kare denir. Her $l\in L$, $m,m'\in M$, $n,n'\in N$ ve $p\in P$ için

(i) λ ve λ' dönüşümleri $P-$invaryanttır, yani, $\lambda(p\cdot l)=p\cdot\lambda(l)$ ve $\lambda'(p\cdot l)=p\cdot\lambda'(l)$ dır. Ayrıca (M,P,μ), (N,P,ν) ve $(L,P,\kappa=\mu\lambda=\nu\lambda')$ birer çaprazlanmış modüldür.
(ii) $\lambda h(m,n)=m+n\cdot(-m)$, $\lambda' h(m,n)=m\cdot n-n$,
(iii) $h(\lambda(l),n)=l+n\cdot(-l)$, $h(m,\lambda'(l))=m\cdot l-l$,
(iv) $h(m+m',n)=m\cdot h(m',n)+h(m,n)$,
$h(m,n+n')=h(m,n)+n\cdot h(m,n')$ ve
(v) $h(p\cdot m,p\cdot n)=p\cdot h(m,n)$.

$\mathcal{X}=(L,M,N,P)$ ve $\mathcal{X}'=(L',M',N',P')$ birer çaprazlanmış kare ve f_L, f_M, f_N ve f_P birer grup homomorfizmi olsun. Eğer bu f_L, f_M, f_N ve f_P grup homomorfizmleri tüm etkimeler ve $h\colon M\times N\to L$ ile $h'\colon M'\times N'\to L'$ fonksiyonları ile uyumlu ise $f=\langle f_L,f_M,f_N,f_P\rangle$ dörtlüsüne $\mathcal{X}$ den $\mathcal{X}'$ ne tanımlı bir çaprazlanmış kare morfizmi denir. Gruplar üzerinde tanımlanan tüm çaprazlanmış kareler ile bunlar arasında yukarıdaki gibi tanımlanan çaprazlanmış kare morfizmleri grup homomorfizmlerinin uygun bileşkesi işlemi ile birlikte $\mathbf{X^2Mod}$ ile gösterilen bir kategori yapısına sahiptir.

Teorem 24. Cat^1-grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1-Gp})$ ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X^2Mod}(\mathbf{Gp})$ doğal olarak denktir.

İspat: Öncelikle bir $\theta\colon \mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1-Gp}) \to \mathbf{X^2Mod}(\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. θ fanktoru objeler üzerinde şöyle tanımlansın: $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ üçlüsü $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1-Gp})$ kategorisinde bir obje olsun. O halde $L=\ker s_A$, $M=\ker s_B$, $N=\operatorname{Im} s_A$, $P=\operatorname{Im} s_B$, $\lambda=\alpha|_{\ker s_A}$, $\lambda'=t_A|_{\ker s_A}$, $\mu=t_B|_{\ker s_B}$, $\nu=\alpha|_{\operatorname{Im} s_A}$ ve $h(m,n)=m\cdot n-n$ olmak üzere $\theta_0\big((\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)\big)=\mathcal{X}=(L,M,N,P)$ bir çaprazlanmış karedir. Önce h fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $m\in M=\ker s_B$ ve $n\in N=\operatorname{Im} s_A$ için $s_B(m)=0$ ve $s_A(a)=n$ olacak şekilde bir $a\in A$ vardır. Böylece $s_A\big(m\cdot s_A(a)-s_A(a)\big)=0$ dır (Eşitlik (16)).

$$\begin{aligned} s_A\big(m\cdot s_A(a)-s_A(a)\big) &= s_A\big(m\cdot s_A(a)\big)-s_As_A(a)\\ &= s_B(m)\cdot s_As_A(a)-s_As_A(a)\\ &= 0\cdot s_A(a)-s_A(a)\\ &= s_A(a)-s_A(a)\\ &=0 \end{aligned} \tag{16}$$

Yani $m\cdot n-n\in\ker s_A=L$ dir. Şimdi (i)-(v) şartlarının sağlandığını gösterelim. Gerçekten, $l\in L$, $m\in M$, $n\in N$ ve $p\in P$ olmak üzere P nin M üzerine etkimesi ve N nin L üzerine etkimesi sırasıyla $p\cdot m=p+m-p$ ve $n\cdot l=n+l-n$ şeklinde tanımlıdır.

Şimdi $l\in L$, $m,m'\in M$, $n,n'\in N$ ve $p\in P$ olsun.

(i) Önce λ ve λ' dönüşümlerinin $P-$invaryant olduğunu (Eşitlik (17)) gösterelim.

$$\lambda(p\cdot l)=\alpha(p\cdot l)=p+\alpha(l)-p=p\cdot\alpha(l)=p\cdot\lambda(l) \tag{17}$$

ve $p\in P=\operatorname{Im} s_B$ olduğundan $p=s_B(b)$ olacak şekilde bir $b\in B$ vardır. O halde $\lambda'(p\cdot l)=p\cdot\lambda'(l)$ dir (Eşitlik (18)).

$$\lambda'(p\cdot l)=t_A(s_B(b)\cdot l)=t_Bs_B(b)\cdot t_A(l)=s_B(b)\cdot t_A(l)=p\cdot\lambda'(l) \tag{18}$$

Böylece λ ve λ' dönüşümlerinin $P-$invaryant olduğunu göstermiş olduk. Şimdi (M,P,μ), (N,P,ν) ve $(L,P,\kappa=\mu\lambda)$ üçlülerinin birer çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. (M,P,μ) üçlüsünün bir çaprazlanmış modül olduğunu zaten biliyoruz. Ayrıca $(N,P,\nu)=\langle s_A,s_B\rangle(A,B,\alpha)$ görüntü çaprazlanmış modülüdür. O halde sadece $(L,P,\kappa=\mu\lambda)$ üçlüsünün bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) $l\in L$ ve $p\in P$ olmak üzere

$$\kappa(p\cdot l)=\mu\big(\lambda(p\cdot l)\big)=\mu\big(p\cdot\lambda(l)\big)=p+\mu\big(\lambda(l)\big)-p=p+\kappa(l)-p \tag{19}$$

(b) $l,l'\in L$ olmak üzere

$$\kappa(l)\cdot l'=\mu\big(\lambda(l)\big)\cdot l'=\lambda(l)\cdot l'=l+l'-l \tag{19}$$

olup (L,P,κ) da bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) Şimdi $\lambda h(m,n)=m+n\cdot(-m)$ ve $\lambda' h(m,n)=m\cdot n-n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \lambda h(m,n) &= \lambda(m\cdot n-n)=\alpha(m\cdot n-n)\\ &= m+\alpha(n)-m-\alpha(n)=m+\alpha(n)\cdot(-m)\\ &= m+\nu(n)\cdot(-m)=m+n\cdot(-m) \end{aligned} \tag{20}$$

ve $n\in N=\operatorname{Im} s_A$ olduğundan $n=s_A(a)$ olacak şekilde bir $a\in A$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}\lambda' h(m,n) &= \lambda'\big(m\cdot s_A(a) - s_A(a)\big) = t_A\big(m\cdot s_A(a) - s_A(a)\big)\\ &= t_A\big(m\cdot s_A(a)\big) - t_A\big(s_A(a)\big) = t_B(m)\cdot t_A\big(s_A(a)\big) - s_A(a)\\ &= \mu(m)\cdot s_A(a) - s_A(a) = \mu(m)\cdot n - n = m\cdot n - n\end{aligned} \tag{21}$$

(iii) Şimdi $h(\lambda(l),n) = l + n\cdot(-l)$ ve $h(m,\lambda'(l)) = m\cdot l - l$ olduğunu gösterelim.

$$h(\lambda(l),n) = \lambda(l)\cdot n - n = \alpha(l)\cdot n - n = l + n - l - n = l + n\cdot(-l) \tag{22}$$

ve

$$h\big(m,\lambda'(l)\big) = m\cdot\lambda'(l) - \lambda'(l) = t_B(m)\cdot t_A(l) - t_A(l) = t_A(m\cdot l - l) \tag{23}$$

olup $m\cdot l - l \in N = \operatorname{Im} s_A$ olduğundan $m\cdot l - l = s_A(a)$ olacak şekilde bir $a\in A$ vardır. Böylece

$$h\big(m,\lambda'(l)\big) = t_A(m\cdot l - l) = t_A\big(s_A(a)\big) = s_A(a) = m\cdot l - l\text{'dir.} \tag{24}$$

(iv) Şimdi $h(m+m',n) = m\cdot h(m',n) + h(m,n)$ ve $h(m,n+n') = h(m,n) + n\cdot h(m,n')$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}h(m+m',n) &= (m+m')\cdot n - n = m\cdot(m'\cdot n) - n\\ &= m\cdot(m'\cdot n) - m\cdot n + m\cdot n - n\\ &= m\cdot(m'\cdot n - n) + (m\cdot n - n) = m\cdot h(m',n) + h(m,n)\end{aligned} \tag{25}$$

ve

$$\begin{aligned}h(m,n+n') &= m\cdot(n+n') - (n+n') = m\cdot n + m\cdot n' - n' + n\\ &= m\cdot n - n + n + (m\cdot n' - n') + n\\ &= h(m,n) + (n + h(m,n') + n) = h(m,n) + n\cdot h(m,n)\text{'dir.}\end{aligned} \tag{26}$$

(v) Son olarak $h(p\cdot m, p\cdot n) = p\cdot h(m,n)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}h(p\cdot m,p\cdot n) &= h(p+m-p,p\cdot n) = (p+m-p)\cdot(p\cdot n) - p\cdot n\\ &= (p+m-p+p)\cdot n - p\cdot n = p\cdot(m\cdot n) - p\cdot n\\ &= p\cdot(m\cdot n - n) = p\cdot h(m,n)\text{'dir.}\end{aligned} \tag{27}$$

Böylece $\mathcal{X} = (L,M,N,P)$ gerçekten bir çaprazlanmış karedir. Şimdi $(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ üçlüsü $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1}-\mathbf{Gp})$ kategorisinde herhangi bir obje, $\theta_0\big((\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')\big) = \mathcal{X}' = (L',M',N',P')$ ve $\langle f,g\rangle\colon(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)\to(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ ise $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1}-\mathbf{Gp})$ kategorisinde herhangi bir morfizm olsun. O halde $f_L = f|_{\ker s_A}$, $f_M = g|_{\ker s_B}$, $f_N = f|_{\operatorname{Im} s_A}$ ve $f_P = g|_{\operatorname{Im} s_B}$ olmak üzere $\theta_1(\langle f,g\rangle) = \langle f_L,f_M,f_N,f_P\rangle\colon \mathcal{X} = (L,M,N,P)\to\mathcal{X}' = (L',M',N',P')$ bir çaprazlanmış kare morfizmidir. $\theta = (\theta_0,\theta_1)$ dönüşümünün bir fanktor olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi bir $\psi\colon \mathbf{X^2Mod}(\mathbf{Gp})\to\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1}-\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. ψ fanktoru objeler üzerinde şöyle tanımlansın: $\mathcal{X} = (L,M,N,P)$ bir çaprazlanmış kare, $l\in L$, $m\in M$, $n\in N$ ve $p\in P$ olmak üzere $A = L\rtimes N$, $B = M\rtimes P$, $s_A(l,n) = (0,n)$, $t_A(l,n) = (0,\lambda'(l)+n)$, $s_B(m,p) = (0,p)$, $t_B(m,p) = (0,\mu(m)+p)$, $\alpha = \lambda\times\nu$ ve B grubunun A grubu üzerine etkimesi $(m,p)\cdot(l,n) = (m\cdot(p\cdot l) + h(m,p\cdot n), p\cdot n)$ olarak tanımlansın. O halde $\psi_0(\mathcal{X}) = (\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat^1}-\mathbf{Gp})$ kategorisinde bir objedir. Gerçekten $\mathcal{A} = (A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B,s_B,t_B)$ nin birer cat[1]-grup ve (A,B,α) nın bir çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. O halde sadece etkimenin bir cat[1]-grup etkimesi olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(m,p)\in B$ ve $(l,n)\in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}s_A\big((m,p)\cdot(l,n)\big) &= s_A(m\cdot(p\cdot l) + h(m,p\cdot n),p\cdot n) = (0,p\cdot n) = (0,p)\cdot(0,n)\\ &= s_B(m,p)\cdot s_A(l,n)\end{aligned}$$

ve (28)

$$
\begin{aligned}
t_A\big((m,p)\cdot(l,n)\big) &= t_A(m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n),p\cdot n)\\
&= \big(0,\lambda'\big(m\cdot(p\cdot l)+h(m,p\cdot n)\big)+p\cdot n\big)\\
&= \big(0,\lambda'\big(m\cdot(p\cdot l)\big)+\lambda' h(m,p\cdot n)+p\cdot n\big)\\
&= \big(0,\lambda'\big((\mu(m)+p)\cdot l\big)+m\cdot(p\cdot n)-p\cdot n+p\cdot n\big)\\
&= \Big(0,\lambda'\big((\mu(m)+p)\cdot l\big)+m\cdot(p\cdot n)\Big)\\
&= (0,(\mu(m)+p)\cdot\lambda'(l)+(\mu(m)+p)\cdot n)\\
&= \big(0,(\mu(m)+p)\cdot(\lambda'(l)+n)\big)\\
&= (0,\mu(m)+p)\cdot(0,\lambda'(l)+n)\\
&= t_B(m,p)\cdot t_A(l,n)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

dır. Şimdi $\mathcal{X}'=(L',M',N',P')$ üçlüsü $\mathbf{X^2Mod(Gp)}$ kategorisinde herhangi bir çaprazlanmış kare, $\theta_0\big(\mathcal{X}'=(L',M',N',P')\big)=(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ ve $\langle f_L,f_M,f_N,f_P\rangle:\mathcal{X}\to\mathcal{X}'$ ise bir çaprazlanmış kare morfizmi olsun. O halde $f=f_L\times f_N$ ve $g=f_M\times f_P$ olmak üzere $\psi_1(\langle f_L,f_M,f_N,f_P\rangle)=\langle f,g\rangle:(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)\to(\mathcal{A}',\mathcal{B}',\alpha')$ $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ kategorisinde bir morfizmdir. $\psi=(\psi_0,\psi_1)$ dönüşümünün bir fanktor olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi $\eta:\psi\theta\Rightarrow 1_{\mathbf{Cat^1-XMod}}$ ve $\varphi:\theta\psi\Rightarrow 1_{\mathbf{X^2Mod}}$ doğal izomorfizmlerini tanımlayalım. $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ kategorisindeki her $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ objesi için

$$f_A:\ker s_A\times \operatorname{Im} s_A\to A,\ (a,x)\mapsto a+x \tag{30}$$

ve

$$f_B:\ker s_B\times \operatorname{Im} s_B\to B,\ (b,y)\mapsto b+y \tag{31}$$

olmak üzere $\eta_{(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)}=(f,g)$ izomorfizmidir. Ayrıca $\mathbf{X^2Mod(Gp)}$ kategorisindeki herhangi bir çaprazlanmış kare $\mathcal{X}=(L,M,N,P)$ için

$$f_L=\pi_1:L\times\{0\}\to L,\ (l,0)\mapsto l \tag{32}$$
$$f_M=\pi_1:M\times\{0\}\to M,\ (m,0)\mapsto m \tag{33}$$
$$f_N=\pi_2:\{0\}\times N\to N,\ (0,n)\mapsto n \tag{34}$$
$$f_P=\pi_2:\{0\}\times P\to P,\ (0,p)\mapsto p \tag{35}$$

olmak üzere $\varphi_{\mathcal{X}}=\langle f_L,f_M,f_N,f_P\rangle$ izomorfizmidir. Diğer detaylar kolaylıkla görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 25 G bir grup ve $i\in\{1,2\}$ olmak üzere $s_i,t_i:G\to G$ dört grup endomorfizmi olmak üzere eğer

(i) her $i\in\{1,2\}$ için $s_it_i=t_i$, $t_is_i=s_i$,

(ii) $i\neq j$ olacak şekildeki her $i,j\in\{1,2\}$ için $s_is_j=s_js_i$, $t_it_j=t_jt_i$, $s_it_j=t_js_i$,

(iii) her $i\in\{1,2\}$ için $[\ker s_i,\ker t_i]=\{0\}$

şartları sağlanıyorsa (G,s_1,t_1,s_2,t_2) beşlisine bir cat^2-grup denir (Loday, 1982).

Açıkça görülüyor ki bir (G,s_1,t_1,s_2,t_2) cat^2-grubu aslında aynı G grubu üzerinde birbirinden bağımsız fakat bibiriyle uyumlu iki cat^1-gruptan, (G,s_1,t_1) ve (G,s_2,t_2), oluşur.

(G,s_1,t_1,s_2,t_2) ve (G',s_1',t_1',s_2',t_2') birer cat^2-grup olsun. Eğer bir $f:G\to G'$ grup morfizmi

(i) her $i\in\{1,2\}$ için $fs_i=s_i'f$,

(ii) her $i\in\{1,2\}$ için $ft_i=t_i'f$

şartlarını sağlıyorsa bu f dönüşümüne cat^2-grupların bir morfizmi denir. Diğer bir deyişle f grup homomorfizminin bir cat^2-grup morfizmi olabilmesi için gerek ve yeter şart $f:(G,s_1,t_1)\to(G',s_1',t_1')$ ve $f:(G,s_2,t_2)\to(G',s_2',t_2')$ dönüşümlerinin birer cat^1-grup morfizmi olmasıdır. Objeleri cat^2-gruplar, morfizmleri ise yukarıda tanımlandığı şekilde cat^2-grup morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori ise $\mathbf{Cat^2-Gp}$ sembolü ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem 1988 yılında Ellis (1988) tarafından verilmiştir.

Teorem 26 Cat^2-grupların kategorisi $\mathbf{Cat^2-Gp}$ ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X^2Mod(Gp)}$ doğal olarak denktir (Ellis, 1988).

Bu denkliklerin ispatlarında verilen fanktorlar birlikte göz önüne alındığında $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ kategorisindeki bir $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ objesi için $G \coloneqq (\ker s_A \rtimes \operatorname{Im} s_A) \rtimes (\ker s_B \rtimes \operatorname{Im} s_B)$ dersek

$$s_1: G \to G,\ \big((a,x),(b,y)\big) \mapsto s_1\big((a,x),(b,y)\big) = \big((0,x),(0,y)\big) \quad (36)$$

$$t_1: G \to G,\ \big((a,x),(b,y)\big) \mapsto t_1\big((a,x),(b,y)\big) = \big((0,t_A(a)+x),(0,t_B(b)+y)\big) \quad (37)$$

$$s_2: G \to G,\ \big((a,x),(b,y)\big) \mapsto s_2\big((a,x),(b,y)\big) = \big((0,0),(b,y)\big) \quad (38)$$

$$t_2: G \to G,\ \big((a,x),(b,y)\big) \mapsto t_2\big((a,x),(b,y)\big) = \Big((0,0),\big(\alpha(a),\alpha(x)\big)+(b,y)\Big) \quad (39)$$

olmak üzere (G,s_1,t_1,s_2,t_2) beşlisi bir cat^2-grup olur. Tersine olarak (G,s_1,t_1,s_2,t_2) bir cat^2-grup ise $A=\ker s_2$, $B=\operatorname{Im} s_2$, $\alpha = t_2|_A$, $s_A = s_1|_A$, $t_A = t_1|_A$, $s_B = s_1|_B$ ve $t_B = t_1|_B$ olmak üzere $\mathcal{A} = (A,s_A,t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B,s_B,t_B)$ birer cat^1-grup ve (A,B,α) bir çaprazlanmış modüldür. Hatta $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ üçlüsü $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ kategorisinin bir objesidir.

O halde yukarıdaki verilmiş olan sonuçlar ışığında bizde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 27 Çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ ile cat^2-grupların kategorisi $\mathbf{Cat^2-Gp}$ doğal olarak denktir.

Ayrıca Şahan ve Mohammed (2019) çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategorileri karakterize edip bu tip cebirsel yapılar ile çaprazlanmış karelerin kategoriksel olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Bu sonuca dayanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 28 Cat^1-grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod(Cat^1-Gp)}$ ile çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki iç kategorilerin kategorisi $\mathbf{Cat(XMod)}$ doğal olarak denktir.

SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle cat^1-grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüller tanımlanmış ve elemanlar, işlemler ve etkimeler yardımı ile karakterize edilmiştir. Bu tip cebirsel yapılar çaprazlanmış cat^1-modüller olarak adlandırılmış ve çeşitli özellikleri incelenerek çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategorisi oluşturulmuştur. Bir çaprazlanmış cat^1-modülün aslında gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinde bir cat^1-obje olduğu görülmüştür. Son olarak, bu çalışmanın asıl amacı içinde, çaprazlanmış cat^1-modüller kategorisinin gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi ile doğal olarak denk olduğu ispatlanmış ve böylece yeni oluşturulan bu cebirsel yapının, çaprazlanmış cat^1-modüllerin, homotopi 3-tipleri için yeni bir cebirsel model olduğu ortaya çıkarılmıştır. Daha önce yapılmış çalışmalardan bilindiği üzere gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi ile cat^2-grupların kategorisi doğal olarak denktir. Bu denklik bu çalışmada elde edilen sonuç ile birleştirildiğinde çaprazlanmış cat^1-modüllerin kategorisinin de cat^2-grupların kategorisine denk olduğu sonucuna varılır.

Daha sonra yapılabilecek çalışmalara örnek olarak, bu çalışmada tekrar edilen teknikler kullanılarak, benzer sonuçlar, yalnızca cat^1-gruplar için değil, aynı zamanda daha genel ve daha yüksek boyutlu cebirsel kategoriler için de gösterilebilir. Ayrıca grup teorisinde bildiğimiz; normallik, bölüm, merkez, komütatör, vb. kavramları, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerde elde edildiği gibi, çaprazlanmış cat^1-modüller için de elde edilebilir.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Akız, H. F., Alemdar, N., Mucuk, O. ve Şahan, T. (2013). Coverings of internal groupoids and crossed modules in the category of groups with operations. *Georgian Mathematical Journal*, 20(2), 223 – 238.

Akız, H. F., Mucuk, O. ve Şahan, T. (2020). Liftings of crossed modules in the category of groups with operations. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 38(7), 181 – 193.

Alp, M. (1998). Pullbacks of crossed modules and cat^1-groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 22, 273 – 281.

Arvasi, Z. (1997). Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras. *Theory and Applications of Categories*, 3(7), 160 – 181.

Brown, R. (1984). Coproducts of crossed P −modules: Applications to second homotopy groups and to the homology of groups. *Topology*, 23(3), 337 – 345.

Brown, R. (1987). From groups to groupoids: a brief survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19, 113 – 134.

Brown, R. ve Higgins, P. J. (1978). On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 36, 193-212.

Brown, R. ve Higgins, P. J. (1991). The classifying space of a crossed complex. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 110(1), 95 – 120.

Brown, R. ve Loday, J. L. (1987a). Homotopical excision, and Hurwicz theorems, for n −cubes of spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 54(3), 176 – 192.

Brown, R. ve Loday, J. L. (1987b). Van Kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology*, 26(3), 311 – 335.

Brown, R. ve Spencer, C. B. (1976). G −groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen series A*, 79(4), 296 – 302.

Conduché, D. (1984). Modules croisés généralisés de longueur 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34(2-3), 155 – 178.

Dijkgraaf, R. ve Witten, E. (1990). Topological gauge theories and group cohomology. *Communications in Mathematical Physics*, 129(2), 393 – 429.

Ellis, G. J. (1988). Higher dimensional crossed modules of algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52, 277 – 282.

Higgins, P. J. (1956). Groups with multiple operators. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(6), 366 – 416.

Jurčo, B. (2011). Crossed module bundle gerbes; classification, string group and differential geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 8(05), 1079 – 1095.

Loday, J. L. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24, 179 – 202.

Mac Lane, S. ve Whitehead, J. H. C. (1950). On the 3-types of a complex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 41 – 48.

Mackenzie, K. C. H. (1987). Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry. London Mathematical Society Lecture Note Series 124, Cambridge University Press.

Martins, J. F. ve Picken, R. (2011). The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module. *Differential Geometry and its Applications*, 29(2), 179 – 206.

Mucuk, O. ve Şahan, T. (2014). Coverings and crossed modules of topological groups with operations. *Turkish Journal of Mathematics*, 38(5), 833 – 845.

Mucuk, O. ve Şahan, T. (2019). Group-groupoid actions and liftings of crossed modules. *Georgian Mathematical Journal*, 26(3), 437 – 447.

Mucuk, O., Şahan, T. ve Alemdar, N. (2014). Normality and quotients in crossed modules and group-groupoids. *Applied Categorical Structures*, 23, 415 – 428.

Mutlu, A. ve Porter, T. (2000). Freeness conditions for crossed squares and squared complexes, *Kluwer Academic Publishers*, 20(8), 345 – 368.

Norrie, K. (1987). Crossed modules and analogues of groups theorems. Dissertation, King's College, University of London.

Norrie, K. (1990). Actions and automorphisms of crossed modules. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 118(2), 129 – 146.

Orzech, G. (1972a). Obstruction theory in categories. I. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2, 287 – 314.

Orzech, G. (1972b). Obstruction theory in categories. II. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2, 315 – 340.

Porter, T. (1987). Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 30, 373 – 381.

Porter, T. (1998). Topological quantum field theories from homotopy n −types. *Journal of the London Mathematical Society*, 58(3), 723 – 732.

Şahan, T. (2019). Further remarks on liftings of crossed modules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(3), 743 – 752.

Şahan, T. ve Mucuk, O. (2020). Normality and quotient in the category of crossed modules within the category of groups with operations. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 38(7), 169 – 179.

Whitehead, J.H.C. (1946). Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 47(4), 806 – 810.

Whitehead, J.H.C. (1948). On operators in relative homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 49, 610 – 640.

Whitehead, J.H.C. (1949). Combinatorial homotopy. II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 213 – 245.

Yetter, D.N. (1992). Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G −sets. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 1, 1–20.

Yetter, D.N. (1993). TQFT's from homotopy 2-types. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2, 113 – 123.